شرط عمود بودن و مماس بودنِ یک خط بر مقاطع مخروطی

◆ سیامک جعفری

* دایره

برای پیدا کردن شرطی که بنا به آن خط $y = mx + b$ بر مقطع مخروطی، دایره مماس باشد چنین عمل می‌کنیم. معادله دایره را $x^2 + y^2 = R^2$ بگیرید.

اگر (α , β) نقطه تماس باشد، کاملاً مشخص است که خط $x\alpha + y\beta = R^2$ از نقطه (α , β) می‌گذرد و در همین نقطه بر دایره مماس است. حال اگر با $y = mx + b$ متحد قرار دهیم با مقایسه ضرایب خواهیم داشت:

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{\beta}{-1} = \frac{-R^2}{b}$$

نتیجه می‌دهد:
$$\alpha = -\frac{R^2 m}{b} \quad , \quad \beta = \frac{R^2}{b}$$

که در معادله دایره صدق می‌کند.

$$\alpha^2 + \beta^2 = R^2 \Rightarrow (\frac{R^4 m^2}{b^2}) + (\frac{R^4}{b^2}) = R^2$$
$$\Rightarrow R^2(1 + m^2) = b^2$$

رابطه اخیر شرط مماس بودن خط مذکور است و $(-\frac{R^2 m}{b} , \frac{R^2}{b})$ نقطه تماس خواهد بود.

** بیضی

از قبل می‌دانیم معادله مماس بر بیضی در نقطه (x_1 , y_1)، $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$ می‌باشد. این خط باید با $y = mx + h$ متحد باشد و با مقایسه ضرایب خواهیم داشت.

$$\frac{x_1}{a^2 m} = \frac{y_1}{-b^2} = \frac{-1}{h}$$

که نتیجه می‌دهد:
$$x_1 = -\frac{a^2 m}{h} \quad و \quad y_1 = \frac{b^2}{h}$$

این نقطه در معادله بیضی صدق می‌کند:

$$\frac{1}{a^2}(\frac{a^2 m}{h})^2 + \frac{1}{b^2}(\frac{b^2}{h})^2 = 1$$

و نتیجه می‌دهد:
$$h^2 = a^2 m^2 + b^2$$

از رابطه اخیر که شرط تماس خط با بیضی خواهد بود، ملاحظه می‌کنید که

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2}$$

این شرط را در بر می‌گیرد و بر بیضی مماس می‌شود. نقاط تماس برای خطوط $y = mx + \sqrt{a^2m^2+b^2}$ و $y = mx - \sqrt{a^2m^2+b^2}$ بترتیب به‌صورتِ

$$\left(\frac{a^2 m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{-b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right) , \left(-\frac{a^2 m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$$

خواهند بود.

*** هذلولی

این شرط برای هذلولی با توجه به شباهتی که با رابطه بیضی دارد به همان ترتیب به‌دست می‌آید:

$$h^2 = a^2 m^2 - b^2$$

**** سهمی

اگر خط $y = mx + h$ بر سهمی $y^2 = 4Rx$ در (x_1 , y_1) مماس باشد، می‌دانیم معادله خط مماس در این حالت بر سهمی در نقطه‌ای واقع بر آن به شکل $yy_1 = 2k(x + x_1)$ می‌باشد که با خط

مذکور متحد خواهد شد، از مقایسه ضرایب نتیجه زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{y_1}{1} = \frac{2k}{m} = \frac{2kx_1}{h}$$

در سهمی صدق می‌کند: $x_1 = \frac{h}{m} \quad , \quad y_1 = \frac{2k}{m}$

$$\left(\frac{2k}{m}\right)^2 = 4k\left(\frac{h}{m}\right) \Rightarrow h = \frac{k}{m}$$

معادله خط مماس $y = mx + \frac{k}{m}$ بوده و نقطه تماس $\left(\frac{k}{m^2} \, , \, \frac{2k}{m}\right)$ می‌باشد.

تست ۱

مرکز یک دایره بر مبدأ مختصات منطبق و این دایره بر خط $3x - 4y + 20 = 0$ مماس است. معادله دایره را پیدا کنید.

۱) $x^2 + y^2 + 16 = 0$ ۳) $x^2 + y^2 - 20 = 0$

۲) $x^2 + y^2 - 16 = 0$ ۴) $x^2 + y^2 + 20 = 0$

حل: $R^2(1+m^2)=b^2 \Rightarrow R^2=\frac{b^2}{1+m^2}=\frac{\left(\frac{20}{4}\right)^2}{1+\left(-\frac{3}{-4}\right)^2}$

جواب ۲ درست است. $\Rightarrow R = 4$

تست ۲

خط $x - y - 5 = 0$ بر یک بیضی به کانونهای $F(3\,,\,0)$ و $F'(-3\,,\,0)$ مماس است. معادله این بیضی را بنویسید.

۱) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{17}=1$ ۳) $\frac{x^2}{17}+\frac{y^2}{8}=1$

۲) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1$ ۴) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{5}=1$

حل:

$$h^2=a^2m^2+b^2 \Rightarrow (-5)^2=a^2(1)^2+b^2 \Rightarrow \begin{cases} 25=a^2+b^2 \\ 9 = a^2-b^2 \end{cases}$$

فاصله کانونی $C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a^2 = 17 \\ b^2 = 8 \end{matrix}$$

جواب ۳ درست است.

تست ۳

یک هذلولی به معادله $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{8} = -1$ مفروض است. بر این هذلولی مماسهای موازی با خط $2x + 4y - 5 = 0$ مرور داده‌ایم؛ فاصله آنها را حساب کنید.

۱) $2\sqrt{\frac{2}{5}}$ ۳) $5\sqrt{\frac{2}{5}}$

۲) $2\sqrt{\frac{5}{2}}$ ۴) $2\sqrt{10}$

حل:

$$h^2=a^2m^2-b^2 \Rightarrow h^2=64\times\left(\frac{2}{4}\right)^2-8=8$$

$$\Rightarrow h=\pm\sqrt{8}$$

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow d=\frac{|2\sqrt{8}|}{\sqrt{20}}=2\sqrt{\frac{2}{5}}$$

جواب ۱ درست است.

تست ۴

در چه نقطه‌ای از سهمی به معادله $y^2 - x + 1 = 0$ خط مماس بر آن به موازات خط $2y - x + 1 = 0$ است.

۱) (۱− و ۲) ۳) (۱ و ۲−)

۲) (۱− و ۲−) ۴) (۱ و ۲)

حل: $y^2 = (x + 1) \Rightarrow k = \frac{1}{4}$

و می‌دانیم که $m = \frac{1}{2}$.

$$\frac{y_1}{1}=\frac{2k}{\frac{1}{2}}=\frac{2k(x_1-2)}{h} \quad \begin{cases} y_1 = 4k \Rightarrow y_1 = 1 \\ x_1 = 2h + 2 \end{cases}$$

$$(4k)^2 = (2h+2-1) \Rightarrow 16k^2 = 2h + 1$$

چون $k = \frac{1}{4} \Rightarrow h = 0 \Rightarrow x_1 = 2$

جواب ۴ درست است.

برای پیدا کردن شرط قائم بودن یک خط بر مقطع مخروطی، این مقاطع را مانند حالتی که در بحث مماس ملاحظه کردید جداگانه و در حالت ساده‌ای بررسی می‌کنیم که تعمیم آن مشکل نیست.

* **دایره:**

برای دایره‌ای به معادله $x^۲ + y^۲ + ۲fx + ۲fy + k = ۰$ می‌دانیم که خط قائم، $y = mx + b$ از مرکز این مقطع می‌گذرد. پس $(-g , -f)$ در معادله این خط صدق می‌کند: $-f = m(-g)+b$

نتیجه می‌دهد $mg - f = b$

** **بیضی:**

اگر فرض کنیم خط $y = mx + h$ در نقطه $(x_۱ , y_۱)$ بر بیضی $\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ عمود باشد آنگاه معادلات زیر متحد هستند:

خط مورد نظر $y = mx + h$

و خط قائم بر بیضی $c^۲ = a^۲ - b^۲$

$$\frac{a^۲x}{x_۱} - \frac{b^۲y}{y_۱} = c^۲$$

با مقایسه ضرایب

$$\frac{a^۲}{mx_۱} = \frac{b^۲}{y_۱} = \frac{b^۲ - a^۲}{h}$$

مختصات نقطه تماس به‌دست می‌آید:

$$x_۱ = \frac{ha^۲}{m(b^۲ - a^۲)} \quad , \quad y_۱ = \frac{hb^۲}{b^۲ - a^۲}$$

امّا نقطه $(x_۱ , y_۱)$ روی بیضی است.

$$\frac{h^۲a^۲}{m^۲(b^۲ - a^۲)^۲} + \frac{h^۲b^۲}{(b^۲ - a^۲)^۲} = ۱$$

نتیجه می‌دهد

$$h^۲ = \frac{m^۲(a^۲ - b^۲)^۲}{a^۲ + m^۲b^۲}$$

که همان شرط مورد نظر است.

و دو خط قائم به‌دست می‌آید:

$$y = mx \pm \frac{m\left(a^۲ - b^۲\right)}{\sqrt{a^۲ + m^۲b^۲}}$$

*** **هذلولی:**

در این حالت مشابه بیضی، اگر معادله هذلولی به‌صورت $\frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$ باشد آنگاه

$$h^۲ = \frac{m^۲(a^۲ + b^۲)^۲}{a^۲ - m^۲b^۲}$$

و دو معادلهٔ خط قائم می‌شوند:

$$y = mx \pm \frac{m\,(a^۲ + b^۲)}{\sqrt{a^۲ - m^۲b^۲}}$$

**** **سهمی:**

فرض کنیم خط $y = mx + h$ بر سهمی به معادله $y^۲ = ۴kx$ در نقطه $(x_۱ , y_۱)$ قائم باشد. آنگاه دو معادله زیر متحد هستند.

$$y = mx + h \quad , \quad y - y_۱ = -\frac{y_۱}{۲k}(x - x_۱)$$

با مقایسه ضرایب به‌دست می‌آید:

$$\frac{y_۱}{m} = \frac{۲k}{-۱} = \frac{-۲ky_۱ - x_۱y_۱}{h}$$

چون $y_۱^۲ = ۴kx_۱$ داریم: $h = -(۲km + km^۳)$

که رابطه اخیر شرط قائم بر سهمی است.

تست ۱

معادله قطر دایره $x^۲ + y^۲ + ۴x - ۶y - ۱۷ = ۰$ را که بر خطی به معادله $۵x + ۲y - ۱۳ = ۰$ عمود است پیدا کنید.

۱) $y = \frac{۲}{۵}x + \frac{۱۹}{۵}$ ۳) $y = -\frac{۲}{۵}x - ۲$

۲) $y = \frac{۵}{۲}x - \frac{۱۹}{۵}$ ۴) $y = -\frac{۵}{۲}x - ۲$

حل:

$$m' = -\frac{۵}{۲} \Rightarrow m = \frac{۲}{۵}$$

$$mg - f = b \Rightarrow \frac{۲}{۵} \times ۲ + ۳ = b \Rightarrow b = \frac{۱۹}{۵}$$

نتیجه اینکه خط مورد نظر می‌شود.

$$y = \frac{۲}{۵}x + \frac{۱۹}{۵}$$

یا با ساده کردن

$$۲x - ۵y + ۱۹ = ۰$$

جواب ۱ درست است.

تست ۲

در خط $y = -x + h$ مقدار h را طوری بدست آورید که خط بر بیضی $\frac{x^۲}{۲۰} + \frac{y^۲}{۵} = ۱$ عمود باشد.

۱) $h = -۳$ ۲) $h = \sqrt{۳}$ ۳) $h = -\sqrt{۳}$ ۴) $h = \pm ۳$

حل:

$$h^2=\frac{m^2\left(a^2-b^2\right)^2}{a^2+m^2b^2} \Rightarrow h^2=\frac{(20-5)^2}{20+5}$$

$$\Rightarrow h^2=\frac{15^2}{25}$$

$$\Rightarrow h=\pm 3$$

جواب ۴ درست است.

تست ۳

خط $x - y - 4 = 0$ بر یک هذلولی به کانونهای $F'(-2 \text{ و } 0)$ و $F(2 \text{ و } 0)$ عمود است. معادله هذلولی را بنویسید.

۱) $\frac{5x^2}{2} - \frac{5y^2}{3} = -1$ ‏ ۳) $\frac{2x^2}{5} - \frac{2y^2}{3} = 1$

۲) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$ ‏ ۴) $\frac{2x^2}{5} + \frac{2y^2}{3} = 1$

حل: $a^2 + b^2 = c^2 = 4$ و $h = -4$ و $m = -1$

$$h^2 = \frac{m^2(a^2 + b^2)^2}{a^2 - m^2b^2} \Rightarrow 16 = \frac{16}{a^2 - b^2}$$

دستگاه زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow a^2 = \frac{5}{2} \quad , \quad b^2 = \frac{3}{2}$$

خواهد شد:

$$\frac{x^2}{\frac{5}{2}} - \frac{y^2}{\frac{3}{2}} = 1 \Rightarrow \frac{2x^2}{5} - \frac{2y^2}{3} = 1$$

پس جواب ۳ درست است.

تست ۴

بر سهمی به معادله $y^2 = 12x$ خطی به معادله $y = mx + 9$ قائم است. مطلوب است شیب خط و مختصات نقطه تماس:

۱) $m=-1 , x_1=-3 \; y_1=6$ ‏ ۳) $m=1 , x_1=3 \; y_1=-6$

۲) $m=-1 , x_1=3 \; y_1=6$ ‏ ۴) $m=1 , x_1=-3 \; y_1=6$

حل: $h = +9$ و $k = 3$

حدس زده می‌شود که $m = -1$ جواب معادله است.

$$h=-(2km+km^3) \Rightarrow 9=-(6m+3m^3)$$

$$m = -1$$

$$\frac{y_1}{m} = \frac{2k}{-1} \Rightarrow y_1 = 6$$

$$\Rightarrow y^2 = 12x \Rightarrow 36=12x \Rightarrow x = 3$$

جواب ۲ درست است.

منابع

۱ـ جبر تحلیلی — غلامرضا عسجدی

۲ـ جبر پایه — محمد هاشم رستمی

۳ـ هندسه تحلیلی — کیندل

۴ـ مجله یکان

۵ـ مجله برهان

ادب ریاضی

ریاضیات همواره به سبب دو عامل پیشرفت کرده و گسترش یافته است، یکی عامل بیرونی که همانا، نیازهای بشر بوده و کاربرد ریاضیات در علوم دیگر نمایانگر این عامل است و دیگری عامل درونی که همانا، زیبایی ریاضیات است و روابط منطقی حاکم بر اجزای آن که پیدایش نظریه‌ها و شاخه‌های محض در ریاضیات نمایانگر این عامل است که غالباً از آنها نیز مدتی بعد کاربردهایی در علوم دیگر مشاهده می‌شود.