خمهـای جبـری

سیاوش شهشهانی*

همهٔ ما در هندسهٔ تحلیلی دبیرستان با خمهای جبری درجهٔ ۱ و درجهٔ ۲ آشنا شده‌ایم. اگر $p(x, y)$ یک چندجمله‌ای با دو متغیر x و y باشد، مجموعهٔ نقاط (x, y) در صفحه که در معادلهٔ $p(x, y) = 0$ صدق می‌کنند یک خم جبری خوانده می‌شود. مقصود از درجهٔ این خم، بالاترین درجه در بین درجات جمله‌های $p(x, y)$ است. مثلاً $3x^5y^2 - 4x^6 + x^2y^3 - x + 1 = 0$ یک خم درجهٔ هفت را تعریف می‌کند (توانهای جملات، به‌ترتیب از چپ به‌راست، عبارت‌اند از: $7 = 2 + 5$، 6، $5 = 3 + 2$، 1، 0). هر خم درجهٔ یک، معادله‌ای به‌شکل $ax + by + c = 0$ دارد، یعنی یک خط راست است. خمهای درجهٔ دوم از تنوع بیشتری برخوردارند. دایره، بیضی، سهمی، و هذلولی، و نیز تعدادی موارد استثنایی، خمهای درجهٔ دوم را تشکیل می‌دهند (تابلوی ۱). این خمها را می‌توان از برخورد یک صفحه و یک مخروط به‌دست آورد و از این‌رو به‌مقاطع مخروطی نیز معروف‌اند. معرفی مقاطع مخروطی به‌منایخموس[1] از آکادمی افلاطون نسبت داده می‌شود. آپولونیوس در قرن سوم پیش از میلاد به‌کشفیات مهمی در مورد مقاطع مخروطی دست یافت و کتاب مقاطع مخروطی او که در اسکندریه به‌رشتهٔ تحریر درآمد، از مهمترین آثار باقیماندهٔ از ریاضیات یونان باستان است. بررسی عمیق مقاطع مخروطی توسط یونانیان از بارزترین نمونه‌های فعالیت پیگیرانه در ریاضیات محض در عهد باستان است. یونانیان آتن و اسکندریه تنها با تکیه زدن به‌روشهای استدلال هندسی، بسیاری از ویژگیهای مقاطع مخروطی را دریافتند. و به‌نظر می‌آید که هیچگونه انگیزهٔ کاربردی آنها را در این کوشش یاری نکرده باشد. (گو اینکه ادعا شده که ممکن است مسائل مربوط به‌ساعتهای آفتابی توجه یونانیان را به‌ویژگیهای مقاطع مخروطی جلب کرده باشد.)

در واقع اولین کاربردهای علمی و صنعتی مقاطع مخروطی قرنها بعد در دورهٔ رنسانس اروپا مطرح شد. در آغاز قرن هفدهم میلادی کپلر به‌شکل بیضوی مدار سیارات پی برد، و در اواخر همان قرن قانون جاذبهٔ نیوتن مشخص ساخت که مسیر حرکت یک ذره در میدان جاذبهٔ مرکزی، باید یکی از مقاطع مخروطی باشد. ویژگی بازتابی مقاطع مخروطی (تابلوی ۱) نیز در ساختن تلسکوپهای بازتابی مورد بهره‌گیری قرار گرفت. اگر از یک نقطهٔ سهمی دو خط، یکی به‌موازات محور سهمی و دیگری به‌کانون سهمی، رسم شوند، این دو خط با مماس بر سهمی در نقطهٔ ترسیم، زاویهٔ برابر می‌سازند. بدین ترتیب هرگاه آینهٔ سهموی تلسکوپ به طرف یک شیء سماوی دوردست گردانده شود، اشعهٔ آن شیء پس از برخورد با آینه، در کانون متمرکز شده و تصویر دقیقی به‌دست می‌دهند.

تابلوی ۱. مقاطع مخروطی

کلیترین چندجمله‌ای درجهٔ دوم را در نظر بگیرید:

$$p(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$$

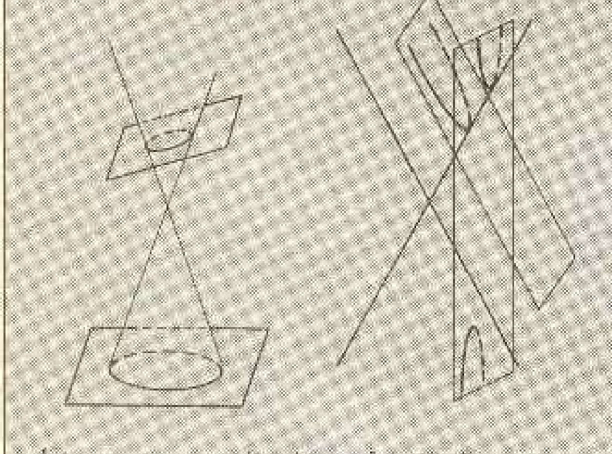
تنها محدودیتی که قائل می‌شویم این است که A، B، و C توأماً صفر نباشند. مکان هندسی $p(x, y) = 0$ یکی از صورتهای زیر است:

(الف) بیضی (شامل دایره)، هذلولی، و سهمی
این سه نوع خم، انواع اصلی (نا تباهیده، غیر استثنایی) مقاطع مخروطی محسوب می‌شوند؛

(ب) دو خط متقاطع، دو خط موازی، یا دو خط منطبق بر هم

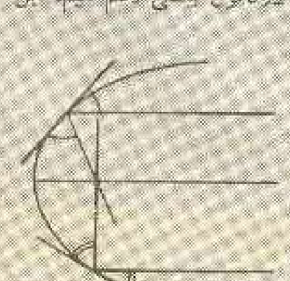
(ج) یک نقطه

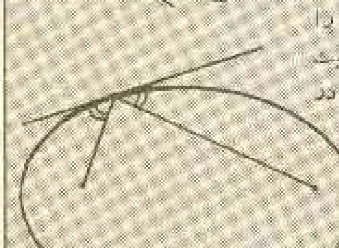
(د) تهی



همهٔ حالات فوق به‌استثنای مکان هندسی تهی و دو خط موازی را می‌توان از برخورد یک صفحه با یک مخروط دوار دو پارچه به‌دست آورد.

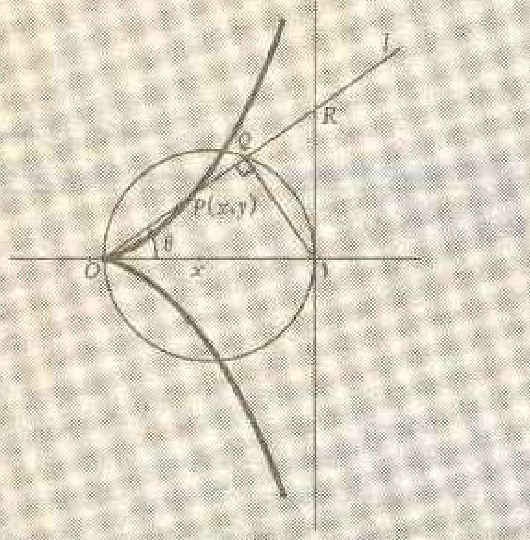
از مهمترین ویژگیهای مقاطع مخروطی، ویژگی بازتابی است که در زیر برای بیضی و سهمی نمایش داده شده است. اگر از یک نقطهٔ بیضی خطوطی به‌دو کانون بیضی رسم کنیم، این دو خط با مماس بر بیضی در آن نقطه زاویهٔ برابر می‌سازند. بدین ترتیب هرگاه منبع نوری در یک کانون بیضی قرار داشته باشد، بنابر قانون انعکاس نور، اشعهٔ آن پس از برخورد با بیضی از کانون دیگر می‌گذرند. اگر یک کانون بیضی را ثابت نگاهداشته کانون دیگر را به‌بینهایت سوق دهیم، وضعیت حدی سهمی پدید می‌آید که در متن تشریح شده است.





1. Menaechmus

تابلوی ۲. پیچکوار دیوکلس

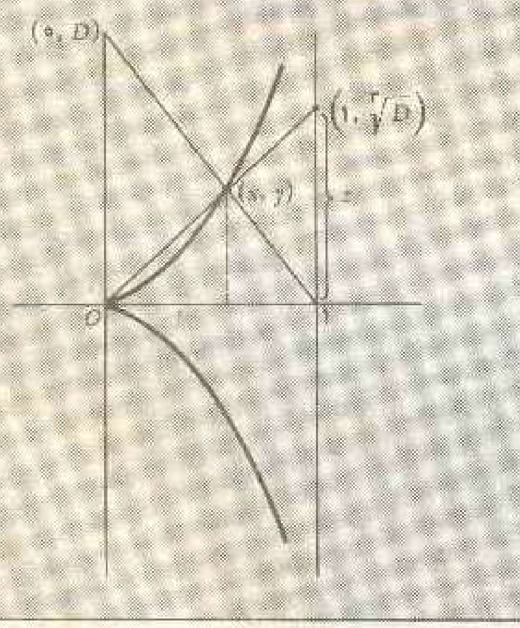


دایره‌ای به‌قطر واحد را در صفحهٔ دکارتی درنظر بگیرید که از دو نقطهٔ $O=(0,0)$ و $(1,0)$ می‌گذرد. از O خط l را رسم کنید تا خط $x=1$ را قطع کند. اگر R نقطهٔ برخورد باشد، نقطهٔ P روی خط l را طوری اختیار کنید که طول OP با طول QR برابر شود. (طبق شکل، Q نقطهٔ دیگر برخورد خط با دایرهٔ مفروض است.) با تغییر l، نقطهٔ P خمی رسم می‌کند که به‌پیچکوار دیوکلس معروف است. برای به‌دست آوردن معادلهٔ این خم، مختصات P را با (x, y) نمایش می‌دهیم. محاسبات زیر براساس ریاضیات دبیرستان انجام می‌شود

$$\cos\theta = \overline{OQ} = \overline{OR} - \overline{OP}$$
$$= \sec\theta - x\sec\theta$$

پس $1-x=\cos^2\theta$، یا $1-x=x^2/(x^2+y^2)$، که از آن معادلهٔ $x^3+xy^2-y^2=0$ نتیجه می‌شود. برای $x\neq 0$، این معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3=\frac{y}{1-x} \qquad (*)$$



برای ترسیم ریشهٔ سوم طول D، از نقطهٔ $(0, D)$ خطی به $(1, 0)$ رسم می‌کنیم تا پیچکوار را در نقطهٔ (x, y) قطع کند. ادعا می‌کنیم که خط گذرنده از O و (x, y)، در نقطهٔ $(1, \sqrt[3]{D})$ خط $x=1$ را قطع می‌کند و بدین ترتیب $\sqrt[3]{D}$ برابر مختص y این نقطه است. محاسبه با استفاده از مثلثهای متشابه صورت می‌گیرد

$$\frac{D}{y}=\frac{1}{1-x}$$

$$\frac{z}{y}=\frac{1}{x}$$

پس با توجه به $(*)$، نتیجه می‌شود که $z=\sqrt[3]{D}$.

شایان ذکر است که مفاهیم جبری بودن یک خم و درجهٔ یک خم جبری به‌طورصریح برای ریاضیدانان باستان مطرح نبودند و این مفاهیم بعدها با ابداع هندسهٔ تحلیلی صورتبندی شدند. یونانیان تعدادی خم جبری و غیرجبری را به‌خاطر ویژگیهای هندسی جالب توجهشان مد نظر قراردادند. در اینجا، به‌طور خلاصه، دو خم جبری دیگررا نیز که درقرن دوم قبل از میلاد توسط ریاضیدانان اسکندریه مورد مطالعه قرار گرفتند تشریح می‌کنیم. «پیچکوار»[1] خمی است که دیوکلس[2] برای حل مسألهٔ «تضعیف مکعب» ابداع کرد. یکی از مسائل کلاسیک ریاضیات باستان، ساختن مکعبی است که حجم آن دو برابر حجم یک مکعب مفروض باشد. اگر طول ضلع مکعب داده شده را a بگیریم، طول ضلع مکعب مطلوب برابر $a\sqrt[3]{2}$ است، پس مسأله به‌ترسیم طول $\sqrt[3]{2}$ منجر می‌شود. (یونانیان از روش ساختن حاصلضرب دو طول، در اینجا a و $\sqrt[3]{2}$، آگاهی داشتند.) کوشش یونانیان برای ترسیم طول $\sqrt[3]{2}$ (با دردست داشتن طول واحد) به‌وسیلهٔ خط‌کش غیرمدرج و پرگار به‌جایی نرسید (که البته عدم امکان این امر قرنها بعد ثابت شد)، ولی دیوکلس نشان داد که چگونه می‌توان با استفاده از خم پیچکوار، ریشهٔ سوم هر طول را رسم کرد (تابلوی ۲). در صفحهٔ مختصات دکارتی، پیچکوار یک خم درجهٔ سوم بامعادلهٔ $x^3+xy^2-y^2=0$ است. این معادله را می‌توان به‌شکل $(y/x)^3=y/(1-x)$، $x\neq 0$، نیز نوشت. با تعمیم این خم به‌خم درجهٔ nام

$$\left(\frac{y}{x}\right)^n=\frac{y}{1-x}, \quad x\neq 0$$

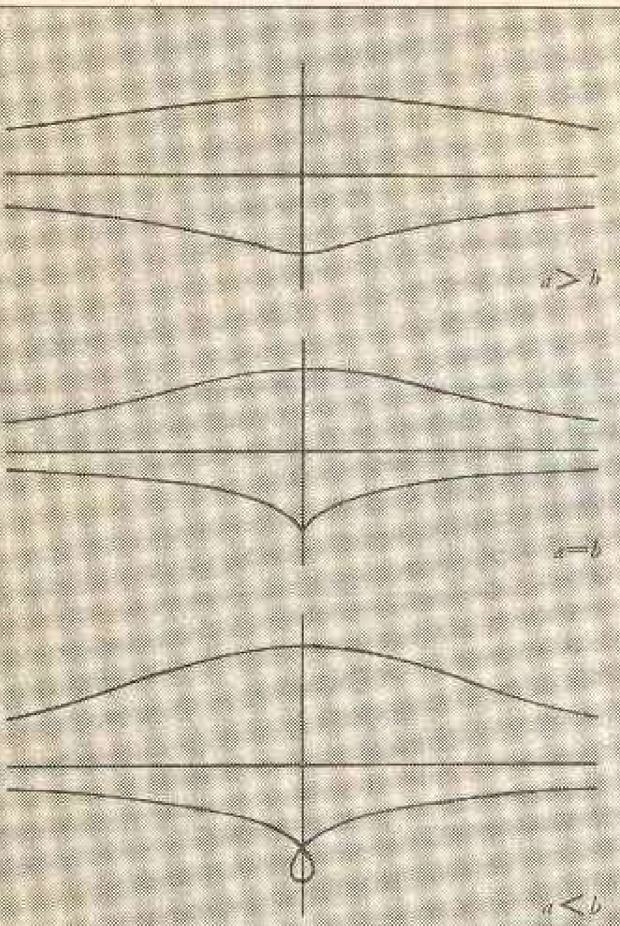
می‌توان به‌روشی مشابه با روشی که در تابلوی ۲ توصیف شد، ریشهٔ nام هر طول را رسم کرد.

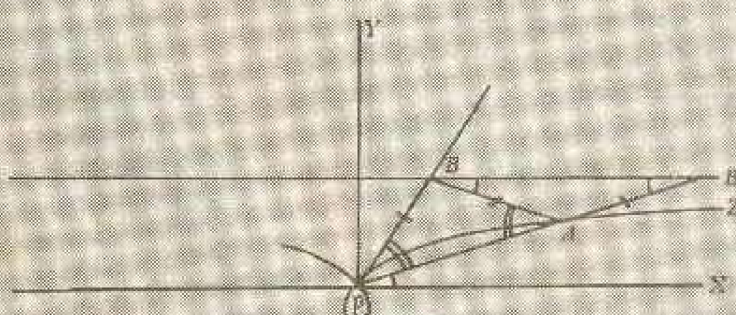
1. cissoid 2. Diocles

تابلوی۳. صدفوار نیکومدس

دو عدد حقیقی مثبت a و b داده شده‌اند. از نقطهٔ $(0,-a)$ خطی رسم می‌کنیم که محور x را قطع کند و در دو طرف نقطهٔ برخورد، روی خط، دو نقطه به‌فاصلهٔ b از محل برخورد را در نظر می‌گیریم. با حرکت دادن خط رسم شده از $(0,-a)$، دو نقطه دو شاخهٔ خمی را طی می‌کنند که صدفوار نیکومدس نام دارد. بسته به‌این‌که $a>b$، $a=b$، یا $a<b$، سه شکل مختلف به‌دست می‌آید.

از دستگاهی که بتوانیم خم صدفوار را برای $a<b$ رسم کند می‌توان در تثلیث زاویه کمک گرفت. فرض کنید زاویهٔ $\sphericalangle XPZ$ داده شده است. محور PY را عمود بر PX اختیار می‌کنیم و خطی به‌فاصلهٔ دلخواه a به‌موازات PX رسم می‌کنیم. اگر B محل تلاقی PZ با این خط باشد، فاصلهٔ PB را b می‌نامیم. حال صدفوار با پارامترهای a و b را در نظر بگیرید. به‌کمک پرگار نقطه‌ای مانند A روی صدفوار اختیار می‌کنیم که فاصلهٔ آن از B برابر b باشد. از P به A وصل کرده ادامه می‌دهیم تا خط موازی PX را در نقطهٔ B' قطع کند. طبق تعریف صدفوار داریم $AB'=b$. با در نظر گرفتن دو مثلث متساوی‌الساقین PBA و BAB' و نیز این که $\sphericalangle BAP$ یک زاویهٔ خارجی برای مثلث BAB' است، نتیجه می‌شود که زاویهٔ $\sphericalangle APX$ یک سوم زاویهٔ $\sphericalangle ZPX$ است.





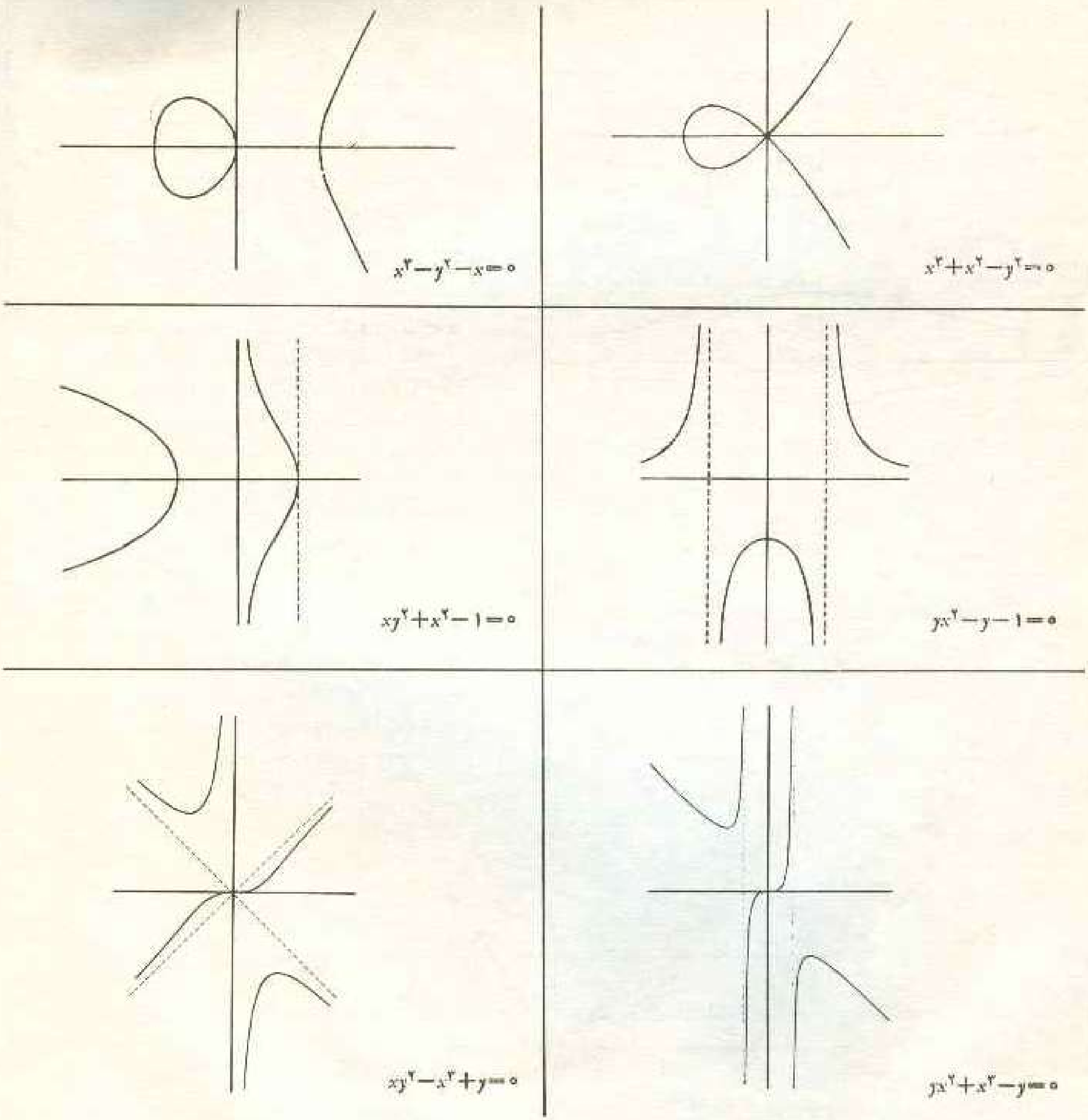
یکی دیگر از مسائل معروف ریاضیات باستان، مسألهٔ «تثلیث زاویه» یا تقسیم زاویهٔ مفروض به‌سه زاویهٔ برابر است. این مسأله نیز با خط‌کش غیرمدرج و پرگار حل‌شدنی نیست، ولی نیکومدس[1] با اختراع خم صدفوار[2]، و ساختن دستگاهی برای ترسیم آن، روشی برای تثلیث زاویه ارائه کرد (تابلوی۳). صدفوار نیز یک خم جبری است از درجهٔ چهار، و با معادلهٔ

$$x^2y^2-(y+a)^2(b^2-y^2)=0$$

که در آن $a>0$ و $b>0$ پارامترهای دلخواه مفروض‌اند.

با کمی تجربهٔ ترسیم خم در هندسهٔ تحلیلی، به‌روشنی دیده می‌شود که با ازدیاد درجه، تنوع اشکال خمها نیز به‌سرعت بیشتر می‌شود. در شکل۱ شش نمونهٔ دیگر از خمهای درجهٔ ۳ نمایش داده شده‌اند. سؤالی که در اینجا مطرح می‌شود این است که آیا می‌توان با برگزیدن خصوصیاتی، یک رده‌بندی کامل از خمهای درجهٔ سه و درجه‌های بالاتر ارائه کرد؟ به‌عبارت دیگر، همچنان که خمهای درجهٔ دوم همه مقاطع مخروطی هستند، آیا نظام مشترکی بر خمهای درجهٔ سه یا درجه‌های بالاتر حکمفرماست؟ برای جواب دادن به‌این سؤال باید از هندسهٔ افکنشی یاری بگیریم.

1. Nicomedes 2. conchoid



شکل ۱

هندسهٔ افکنشی

هندسهٔ افکنشی (یا هندسهٔ تصویری) در قرن هفدهم میلادی توسط معمار فرانسوی دزارگ[1] پایه‌گذاری شد و پس از آنکه بیش از یک قرن تقریباً فراموش شده بود، در قرن نوزدهم پونسله[2] آن را احیا کرد و تا اواخر آن قرن به‌اوج قوام خود رسید تاجایی که ریاضیدان بزرگ انگلیسی کیلی[3] برای آن جایگاهی مرکزی در کلیهٔ مباحث هندسی قائل شد. برای تشریح این نوع هندسه و درک ارتباط آن با مسائل مورد بررسی، فرض می‌کنیم که صفحهٔ مختصات مورد بحث ما درواقع صفحهٔ $Z=1$ در فضای سه‌بعدی (X, Y, Z) است. بدین‌ترتیب همهٔ خمهای ذکر شده در فضای سه‌بعدی جای دارند هرچند که به‌طور مسطح در صفحهٔ $Z=1$ قرار گرفته‌اند. منبع نوری را تصور کنید که ازمبدأ مختصات O، یعنی نقطهٔ $(0, 0, 0)$، نور می‌افکند. اکنون می‌توانیم سایهٔ هرخم در صفحهٔ $Z=1$ را روی صفحاتی که از O نمی‌گذرند بررسی کنیم. مثلاً[4] دایرهٔ $X^2+Y^2=1$، $Z=1$، را در نظر بگیرید. برای یافتن سایهٔ این خم روی صفحه‌ای مانند π، از O خطوط راستی به‌نقاط خم رسم می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا صفحهٔ π را قطع کنند. پس در واقع سایهٔ خم روی π، مکان برخورد π با

1. Desargues
2. Poncelet
3. Cayley

مخروط نوری است که خطوط مرسوم از O به‌خم پدید می‌آورند، یعنی مقاطع مخروطی سایه‌های دایره هستند. معمولاً هر دو بخش مخروط درنظر گرفته می‌شوند تا یك شاخهٔ هذلولی حذف نشود. این قرارداد را ما همواره اعمال خواهیم کرد.

مطالب هندسی فوق را به‌طور تحلیلی بیان می‌کنیم. اگر خم $p(X,Y)=0$، $Z=1$، داده شده باشد، نقاط واقع برخط رسم‌شده از O به نقطهٔ $(x,y,1)$ از خم، مختصاتی به‌شکل $(X,Y,Z)=(\lambda x,\lambda y,\lambda)$ دارند که در آن، λ همهٔ مقادیر حقیقی را می‌گیرد. چون سایهٔ خم فقط روی صفحاتی که از منبع نور نگذرند معنی دارد، نقطهٔ O را از این خط حذف می‌کنیم، یعنی فرض می‌کنیم $\lambda\neq 0$. بدین‌ترتیب $p(x,y)=0$ تبدیل می‌شود به

$$p\left(\frac{X}{Z},\frac{Y}{Z}\right)=0$$

اگر $p(x,y)$ یك چندجمله‌ای درجهٔ n باشد، دست‌کم یك جملهٔ $p(X/Z,Y/Z)$ دارای مخرج Z^n خواهد بود، بنابراین ملاحظه می‌شود که $Z^n p(X/Z,Y/Z)$ یك چندجمله‌ای با متغیرهای X، Y، و Z است که همهٔ جملات آن از درجهٔ n هستند. این چندجمله‌ای را به $p^*(X,Y,Z)$ نمایش خواهیم داد. به‌طور کلی، یك چندجمله‌ای که درجهٔ همهٔ جملات آن n باشد، یك چندجمله‌ای همگون درجهٔ n خوانده می‌شود.

بدین‌ترتیب، مشاهده می‌شود که به‌هر نقطهٔ صفحهٔ $Z=1$، یك‌خط راست گذرنده از O (منهای خود O) نظیر می‌شود که شامل کلیهٔ سایه‌های بالقوهٔ آن نقطه است. به‌عکس، هر خط گذرنده از O که در صفحهٔ $Z=0$ قرار نداشته باشد، یعنی موازی صفحهٔ $Z=1$ نباشد، صفحهٔ $Z=1$ را در نقطهٔ منحصر به‌فردی قطع می‌کند، و از اینرو تناظری یك‌به‌یك میان این خطوط و نقاط صفحهٔ $Z=1$ برقرار می‌شود. برای سهولت بیان، از این پس خطوط راست گذرنده از O را پرتو خواهیم نامید. با پرتوهای واقع در صفحهٔ $Z=0$ چه باید کرد؟ در زیر خواهیم دید که می‌توان هریك از این پرتوها را به‌گونه‌ای طبیعی با «نقطه‌ای بینهایت دور» از صفحهٔ $Z=1$ متناظر ساخت.

یك خط راست در صفحهٔ $Z=1$ درنظر بگیرید. پرتوهای نظیر نقاط این خط، یك صفحهٔ گذرنده از O را تشکیل می‌دهند. به‌همان ترتیبی که در بالا دیدیم، تناظری یك به‌یك میان خطوط راست واقع بر $Z=1$ و صفحات گذرنده از O (به‌استثنای صفحهٔ $Z=0$) برقرار می‌شود. صفحهٔ استثنایی $Z=0$ شامل پرتوهای موازی $Z=1$ است. توجه کنید که نقطهٔ مشترك دو خط متقاطع l و l' در صفحهٔ $Z=1$ متناظر می‌شود با پرتویی که اشتراك صفحات نظیر به l و l' است. حال وضعیت دو خط موازی l و l' در صفحهٔ $Z=1$ را درنظر بگیرید. این دو خط نقطهٔ مشترکی در $Z=1$ ندارند ولی صفحات متناظر با آنها در یك پرتو واقع در $Z=0$ یکدیگر را قطع می‌کنند. اکنون می‌توانیم صفحهٔ افکنشی را بدین‌صورت تعریف کنیم: این «صفحه» از دو دسته نقطه تشکیل شده است، یك‌دسته «نقاط عادی» که می‌توان آنها را نقاط صفحهٔ $Z=1$ یا معادلاً پرتوهای غیرموازی با این‌صفحه تلقی کرد، و دستهٔ دیگر، «نقاط بینهایت دور» که متناظرند با پرتوهای واقع برصفحهٔ $Z=0$. هر «خط راست» در صفحهٔ افکنشی ازیك خط راست عادی به‌علاوهٔ یك نقطهٔ بینهایت دور (پرتو تلاقی صفحهٔ نظیر خط، و صفحهٔ $Z=0$) تشکیل شده است. هر نقطهٔ صفحهٔ افکنشی را به‌یك سه‌تایی $[X,Y,Z]$ نمایش می‌دهیم که نباید آن‌را با سه‌تایی (X,Y,Z) اشتباه کرد. مقصود از (X,Y,Z) یك نقطه درفضای سه‌بعدی است، ولی $[X,Y,Z]$ نمایش پرتویی است که از نقطهٔ (X,Y,Z) می‌گذرد. بدین‌ترتیب، $[X,Y,Z]$ وقتی معنی دارد که هر سه مؤلفهٔ آن، X، Y، و Z، توأماً صفر نباشند، و برای هر عدد حقیقی غیرصفر λ داریم

$$[\lambda X,\lambda Y,\lambda Z]=[X,Y,Z]$$

از نظر جبری، اگر $aX+bY+c=0$، $Z=1$، معادلهٔ یك خط راست باشد، معادلهٔ صفحهٔ نظیر یا این خط عبارت است از $aX+bY+cZ=0$؛ پس تلاقی آن با $Z=0$ عبارت است ازخط راست $X/(-b)=Y/a=Z/0$، یعنی نقطهٔ بینهایت دور خط، نمایشی به‌صورت $[b,-a,0]$ دارد. توجه کنید که این نقطه تنها به‌ضریب زاویه (شیب، یعنی نسبت $-a$ به b) از خط راست بستگی دارد. پس‌هر دسته خطوط موازی در $Z=1$ در واقع یك نقطهٔ مشترك بینهایت دور دارند. صفحهٔ افکنشی را با علامت $\mathbf{P}$ نمایش خواهیم داد.

به‌طور کلی اگر خم جبری $p(X,Y)=0$، $Z=1$، را درنظر بگیریم، مخروطی که با ترسیم خطوط از رأس O برنقاط این خم حاصل می‌شود معادله‌ای به‌شکل $p^*(X,Y,Z)=0$ دارد. باقراردادن $Z=1$ دراین رابطه، نقاط عادی خم به‌دست می‌آیند، و به‌ازای $Z=0$، نقاط بینهایت دور خم حاصل می‌شوند. مکان هندسی $p^*(X,Y,Z)=0$ در صفحهٔ افکنشی، تکمیل افکنشی خم $p(x,y)=0$ خوانده می‌شود. آنچه تکمیل افکنشی اضافه بر خم جبری اولیه دارد، نقاط بینهایت دور خم است.

به‌عنوان مثال، سه مقطع مخروطی $x^2+y^2=1$ (دایره)، $x^2-y^2=1$ (هذلولی)، و $x^2-y=0$ (سهمی) را درنظر بگیرید. تکمیلهای افکنشی این سه خم به‌ترتیب عبارت‌اند از

$$X^2+Y^2-Z^2=0$$

$$X^2-Y^2-Z^2=0$$

$$X^2-YZ=0$$

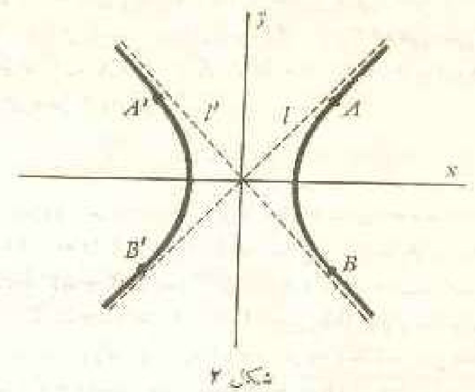
خم اول نقطهٔ بینهایت دور ندارد، خم دوم دو نقطهٔ بینهایت دور $[1,1,0]$ و $[1,-1,0]$ را داراست، وخم سوم یك نقطهٔ بینهایت دور در $[0,1,0]$ دارد. به‌تعبیر این مطلب می‌پردازیم. درشکل ۲، چهار نقطهٔ A، B، A' و B' روی هذلولی $x^2-y^2=1$ مشخص شده‌اند. می‌توان A، B، A'، و B' را به‌ترتیب به $[X,Y,1]$، $[X,-Y,1]$، $[-X,Y,1]$، و $[-X,-Y,1]$ نمایش داد که در آن $X>0$ و $Y>0$. داریم

$$A=[X,Y,1]=\left[1,\frac{Y}{X},\frac{1}{X}\right]$$

$$B=\left[1,-\frac{Y}{X},\frac{1}{X}\right]$$

$$A'=\left[1,-\frac{Y}{X},-\frac{1}{X}\right]$$

$$B'=\left[1,\frac{Y}{X},-\frac{1}{X}\right]$$



شکل ۲

حال این چهار نقطه را روی شاخه‌ای که بر آن قرار دارند تدریجاً از مبدأ مختصات دور می‌کنیم ($X \to \infty$ و $Y \to \infty$). می‌بینیم که A و B' بـه نقطهٔ بینهایت دور $[0, 1, 1]$ (= نقطهٔ بینهایت دور خط مجانب، l) نـزدیك می‌شونـد، و A' و B بـه نقطهٔ بینهـایت دور $[0, -1, 1]$ (= نقطهٔ بینهایت دور خط مجانب دیگر، l') نزدیك می‌گردند. بدین ترتیب با افزودن دو نقطهٔ بینهایت دور بـه هذلولی، شاخه‌های مقابل هذلولی به‌یکدیگر وصل می‌شوند وهذلولی به‌یك خم بسته تبدیل می‌گردد! بـررسی مشابهی نشان می‌دهد که تکمیل افکنشی $x^2 - y = 0$ نیز یك خم بسته است. (نقطهٔ بینهایت دور سهمی، دوسر آن‌را به‌هم وصل می‌کند.)

بحث فوق را که درمورد چند مقطع مخروطی خاص بود، می‌توان درمورد هر بیضی، هذلولی، و سهمی عنوان کرد و مشاهده می‌شود کـه تکمیل افکنشی هریك از این خمها، یك خم بسته است. به‌همین ترتیب، با گذر بـه $\mathbf{P}$، تمایز میان دو خط متقاطع و دوخط موازی (دوحالت استثنایی تقاطع مخروطی) نیز ناپدید می‌شود زیرا که دو خط موازی یکدیگر را دریك نقطهٔ بینهایت دور قطع می‌کنند. بنا بـراین ملاحظه می‌شود که توسل به‌صفحهٔ افکنشی موجب می‌گردد که از تنوع اشکال خمهای درجهٔ دوکاسته شود.

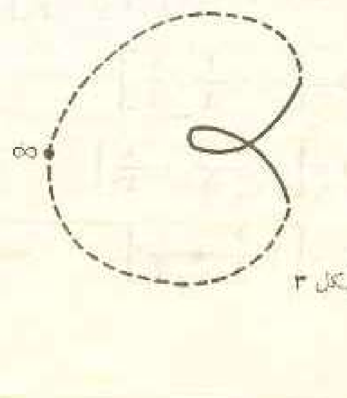
درمورد خمهای از درجات بالا نیز، تکمیل افکنشی به بسیاری از خمها که اشکال کیفی متفاوتی دارند، شکل واحدی می‌بخشد. به سه خم طـرف راست شکل ۱ نگاه کنید. تکمیل افکنشی ایـن سه خـم، به‌ترتیب از بالا به‌پایین، عبارت‌اند از

$$X^3 + X^2Z - Y^2Z = 0$$

$$YX^2 - YZ^2 - Z^3 = 0$$

$$YX^2 + X^3 - YZ^2 = 0$$

ملاحظه می‌کنیم که با تعویض اسامی متغیرها، این سه معادله دقیقاً بههم تبدیل می‌شوند: تکمیل افکنشی هرسه خم طرف راست، شکل واحدی است! این شکل واحد یـك خم بسته است کـه خود را قطع می‌کند (شکل ۳).

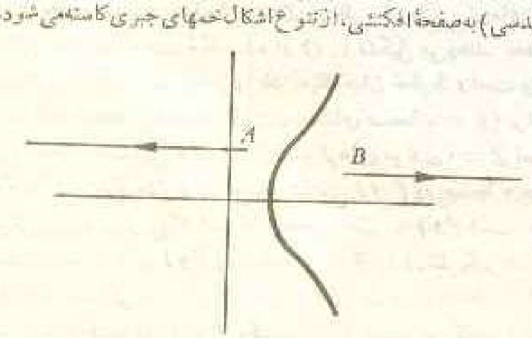


شکل ۳

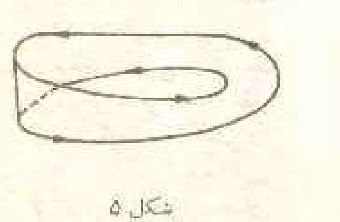
حـال وحدت این سه شکل را از نظرگـاه دیگری کـه مطرح شد، (پرتو به‌جای نقطه) مورد بررسی قرارمی‌دهیم. خم بالای سمت راست شکل ۱ را درصفحهٔ $Z = 1$ تجسم می‌کنیم. مخروطی که از رأس O روی این خم ساخته می‌شود دارای معادلهٔ $X^3 + X^2Z - Y^2Z = 0$ است. سایـهٔ خـم روی صـفحـهٔ $X = 1$ عـبـارت است از $Y^2Z - Z - 1 = 0$، که اگر دراین عبارت به‌جای Y، حرف x و به‌جای Z، حرف y را قـرار دهیم، خم دوم سمت راست شکل ۱ به‌دست می‌آید. به‌همین ترتیب سایـهٔ خم روی صفحهٔ $X = 1$، شکلی مانند خم پایین سمت راست است.

دراینجا ازخواننده دعوت می‌شودکه به‌روشهای مشابه نشان دهد که سه خم سمت چپ شکل ۱ نیز هرسه تکمیلهای افکنشی متحدالشکل دارند. مشاهده خواهد شد که تکمیل افکنشی هر شکل از دو خم بستهٔ مجـزا تشکیل شده است. درمورد خم $x^3 - y^2 - x = 0$، یکی از خمهای بسته در صفحهٔ دکارتی مشاهده می‌شود؛ دو سر بخش دیگر خم نیز با افزودن یك نقطهٔ بینهایت دور بـه‌یکدیگر وصل می‌شوند. نکتهٔ قابل توجه این‌است که خم بستهٔ دوم، علی‌رغم بسته بودن، صفحهٔ افکنشی را بـه دوجزء تقسیم نمی‌کند، یعنی مکمل آن در $\mathbf{P}$، در واقع یـك مجموعهٔ همبند (به‌هم متصل) است! برای ملاحظهٔ این موضوع، به‌شکل ۴ توجه کنید که در آن دونقطهٔ A و B در دوطرف این شاخهٔ خم در نظر گرفته شده‌اند. حال هریك ازاین دونقطه را درجهت نمایش داده شده درطول خط افقی بـه‌بینهایت سوق می‌دهیم. دونیمخط افقی کـه موازی هستند در یـك نقطهٔ مشترك بینهـایت دور بـه‌هم می‌رسند. بدین‌ترتیب می‌توان A و B را بـا یك مسیر پیوسته به یکدیگر وصل کرد بی‌آنکـه مسیر، منحنی بسته را (در $\mathbf{P}$) قطع کند. اینکه شهود هندسی ما حکم می‌کند یك خم بسته بـاید سطح محیط اطراف خود را به دوبخش تجزیه کند، در واقع ناشی از این است کـه توجه ما به‌صفحهٔ اقلیدسی و سطح کره محدود است کـه این ویژگی را دارند. مثالهای خلاف، بسیار فراوان‌اند و به‌صفحهٔ افکنشی محدود نمی‌شوند. لبهٔ نوارموبیوس (شکل ۵) یك‌نمونه است، دوایر «مدار» و «نصف النهار» روی یك چنبره (شکل ۶) مثالهای دیگرند.

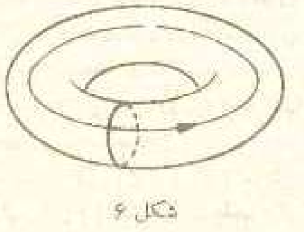
دراین بخش کوشش کردیم نشان دهیم که با گذر از صفحهٔ عادی (اقلیدسی) به‌صفحهٔ افکنشی، ازتنوع اشکال خمهای جبری کاسته‌می‌شود. آیا



شکل ۴



شکل ۵



شکل ۶

ایجاد وحدت در میان خمهای ظاهراً گوناگون در $\mathbf{P}$، به نوعی رده‌بندی کامل خمهای جبری منجر می گردد؟ مسألهٔ رده‌بندی کیفی (توپولوژیك) خمهای جبری در واقع محتوای (نیمی از) مسألهٔ شانزدهم هیلبرت است که در حال حاضر حل کامل آن در افق دیده نمی‌شود. قبل از پایان این مقاله مجدداً بـه این موضوع باز خواهیم گشت، ولی پیش از آن لازم است که گام مهم دیگری در وحدت بخشیدن بـه خمهای جبری برداریم.

صفحهٔ افکنشی مختلط

در بخش پیشین دیدیم که پنج نوع متمایز خم درجهٔ دوم در $\mathbf{P}$ وجود دارد: یـك خم بسته (شامل بیضی، هذلولی، وسهمی)، دوخط متقاطع (که در واقع هر خط افکنشی یك خم بسته است)، دوخط منطبق بر هم، یك نقطه، ومجموعهٔ تهی. در اینجا دوحالت آخر به گونه‌ای نـاقصتر از انواع دیگر می‌نمایند. تصویر ذهنی ما از شکل خم، شیئی یك بعدی است کـه از تداوم کشیدن قلم روی کاغذ پدید می آید. مسلماً یك تك‌نقطه‌ای یا مجموعهٔ تهی را نمی‌توان خم نوعی تلقی کرد. در این بخش می بینیم که وضعیت غیرعادی این دو نوع مکان هندسی تنها ناشی از مشکلات جبری کار کردن با اعداد حقیقی است (به‌طور خلاصه، اینکه $1-$ جذر حقیقی ندارد)، وچنانچه اعداد مختلط را جایگزین اعداد حقیقی کنیم، این دو نوع خم در انواع دیگر جذب خواهند شد.

یادآوری می کنیم که نقاط صفحهٔ افکنشی به صورت سه‌تاییهای $[X, Y, Z]$ نمایش داده می‌شوند که در آن اعداد حقیقی X، Y، و Z توأماً صفر نیستند، و بـه‌علاوه برای $\lambda \neq 0$، سه‌تاییهای $[X, Y, Z]$ و $[\lambda X, \lambda Y, \lambda Z]$ برابر فـرض می‌شوند. در این بخش، X، Y، Z، و λ را اعـداد مختلط می گیریم، مجموعـهٔ حاصل را صفحهٔ افکنشی مختلط می‌نامیم و به $\mathbf{CP}$ نمایش می‌دهیم. سایر تعاریف و قراردادها بـه قوت خود بـاقی هستند. مثلاً یك «خط راست» در این صفحه، مجموعـهٔ $[X, Y, Z]$ هـایی است کـه در رابطـه‌ای بـه شکل $aX+bY+cZ=0$ صدق کنند (a، b، و c اعداد مختلط مفروض و دلخواه‌اند، تنها با این محدودیت که هر سه توأماً صفر نباشند). یـك خم جبری درجهٔ nام، مجموعهٔ $[X, Y, Z]$هایی است که در رابطه‌ای به‌شکل $p^*(X, Y, Z)=0$ صدق کنند، که در اینجا $p^*(X, Y, Z)$ یك چندجمله‌ای همگون درجهٔ n با ضرایب مختلط است.

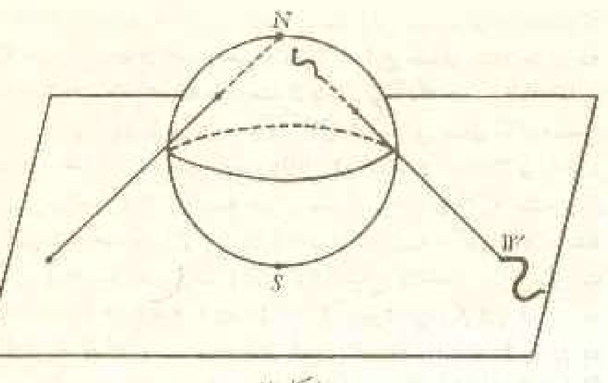
شکل یك خم در $\mathbf{CP}$ چگونه است؟ بـه‌عنوان ساده‌ترین مثال، شکل یك خط راست را بررسی می کنیم. در آغاز، خط $X=0$ را درنظر بگیرید. نقاط این خط به‌شکل $[0, Y, Z]$ هستند کـه در آن Y و Z اعداد مختلط‌اند و توأماً صفر نمی‌باشند. برای $Z=0$، لزوماً $Y \neq 0$، پس

$$[0, Y, 0]=[0, 1, 0]$$

یعنی تنهـا یك نقطه بـه‌شکل $[0, Y, 0]$ روی این خط وجود دارد (چون $Z=0$، این در واقع نقطهٔ بینهـایت دور خط است). برای $Z \neq 0$، داریم

$$[0, Y, Z]=[0, Y/Z, 1]$$

حال با تغییر Y و Z در قلمرو اعداد مختلط، Y/Z کلیهٔ مقادیر مختلط را می‌پذیرد. پس درمجموع تناظری یك‌به‌یك میان نقاط خط $X=0$ از یك‌سو، و اعداد مختلط به‌اضافهٔ یك نقطهٔ بینهایت دور از سوی دیگر، وجود دارد. بـه‌علاوه اگـر Y/Z را بـه W نمایش دهیم، نقطهٔ $[0, Y, Z]$ را می‌توان به $[0, 1, 1/W]$ نیز نمایش داد، وملاحظه



شکل ۷

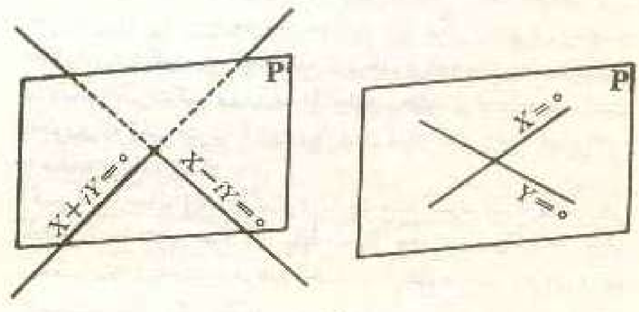
می‌شود که هرطور کـه عدد مختلط W به‌بینهایت میل کند (یعنی $|W|$ به‌طور بیکران بزرگ شود)، نقطهٔ $[0, Y, Z]$ به‌نقطهٔ بینهایت دور خط، یعنی $[0, 1, 0]$، میل خواهد کرد. تنها شکل (توپولوژیك) که متضمن این ویژگیهاست، شکل سطح کرهٔ معمولی (دو بعدی) است. کره‌ای را درنظر بگیرید کـه روی صفحهٔ اعداد مختلط قرار داده شده است به‌طوری که قطب جنوب آن روی O قرار گرفته‌است ونقطهٔ تماس کره با صفحه می‌باشد (شکل ۷).

اگـر قطب شمال (N، درشکل) را یك منبع نـور فـرض کنیم، هر نقطهٔ کره، به‌استثنای خود N، سایهٔ منحصر به‌فردی روی صفحهٔ اعداد مختلط دارد؛ و به‌عکس، هر عدد مختلط سایهٔ نقطهٔ منحصر به‌فردی روی کره است. حال اگر نقطهٔ W روی صفحهٔ اعداد مختلط را به‌هر طریقی از مبدأ دور کرده به‌بینهایت سوق دهیم ($|W| \to \infty$)، نقطهٔ متناظر روی کره مسیری به‌سوی قطب شمال طی خواهد کرد. بدین ترتیب خط $X=0$ را کره‌ای فرض می کنیم که نقطهٔ بینهایت دور آن متناظر بـا قطب شمال است وسایر نقاط در تناظری یك به‌یك بـا مجموعهٔ اعداد مختلط قرار دارند. همین نوع بحث را می‌توان درمورد هر خط راست $aX+bY+cZ=0$ در $\mathbf{CP}$ مطرح کرد، ودیده‌می‌شود که‌مدل هندسی مناسب برای خطوط راست در $\mathbf{CP}$، سطح کرهٔ دوبعدی است.

اینکه «خط راست» در $\mathbf{CP}$ یـك شیء دو بعدی است در نگاه اول غریب به‌نظر می‌رسد. ولی باید توجه داشت که همچنان که مجموعهٔ اعداد حقیقی یك خط راست اقلیدسی را مدرج می کند، اگر قـرار بـاشد که صفحهٔ اعداد مختلط یك خط راست $\mathbf{CP}$ (منهای یك نقطه) را مدرج کند، دوبعدی بودن «خط راست» دیگر دور از ذهن نیست. به‌طور کلی، می‌توان ثابت کرد که هر خم جبری $p^*(X, Y, Z)=0$ در $\mathbf{CP}$ یك رویهٔ دوبعدی است، وبا وضع کردن محدودیتهایی روی ویژگیهای خمها، می‌توان اشکال مجاز برای این رویه‌هـا را به‌طور کامل رده‌بندی کرد.

در آغاز بـه‌مقاطع مخروطی می‌نگـریم و بخصوص دو وضعیت «غیرعادی» (مکان هندسی تك نقطه‌ای وتهی درصفحهٔ اقلیدسی) را در $\mathbf{CP}$ بررسی می کنیم، به‌عنوان مثالهای خاص (و درعین حال نمونه)، دوخم جبری $x^2+y^2=0$ و $x^2+y^2+1=0$ را درنظرمی گیریم کـه تکمیلهای افکنشی آنها به‌ترتیب عبارت‌اند از $X^2+Y^2=0$ و $X^2+Y^2+Z^2=0$. در $\mathbf{P}$، خـم $X^2+Y^2=0$ از تـك نقطهٔ $[0, 0, 1]$ تشکیل شده است؛ ولی عبارت X^2+Y^2 در مجموعـهٔ اعداد مختلط بـه‌صورت $X^2+Y^2=(X+iY)(X-iY)$ تجزیه می‌شود، پس $X^2+Y^2=0$ ازاجتماع دوخط راست $X+iY=0$ و $X-iY=0$ تشکیل شده است که درنقطهٔ $[0, 0, 1]$ متقاطع‌اند. البته هر خط راستی شکل کروی دارد و تجسم دو کرهٔ متقاطع (تنها در

یک نقطه) در فضای سه‌بعدی ممکن نیست، ولی باید توجه داشت که **CP** در واقع چهار بعد حقیقی دارد و در این فضای چهاربعدی، دو کره می‌توانند فقط در یک نقطه مشترک باشند بی‌آنکه در آن نقطه مماس باشند. بدین ترتیب، می‌بینیم که در **CP** تمایزی میان مکان هندسی $X^2+Y^2=0$ و دو خط راست «قابل رؤیت»، مثلاً $XY=0$، وجود ندارد. می‌توانیم **P** را به عنوان یک زیرفضای **CP** متشکل از سه‌تاییهای مختلط $[X, Y, Z]$ تصور کنیم که برای عدد مختلط مناسب λ، هر سه عدد λX، λY، و λZ حقیقی باشند. در این صورت تنها تفاوت $XY=0$ و $X^2+Y^2=0$ نحوهٔ قرار گرفتن آنها در **CP** نسبت به **P** است. $XY=0$ طوری قرار دارد که **P** را در دو خط متقاطع می‌برد، ولی $X^2+Y^2=0$ فقط یک نقطهٔ مشترک با **P** دارد. در شکل ۸ این مطلب به‌طور شمایی مشخص شده است (این نمودارها به‌علت اینکه محدود به فضای دوبعدی‌اند، لزوماً ناقص هستند).



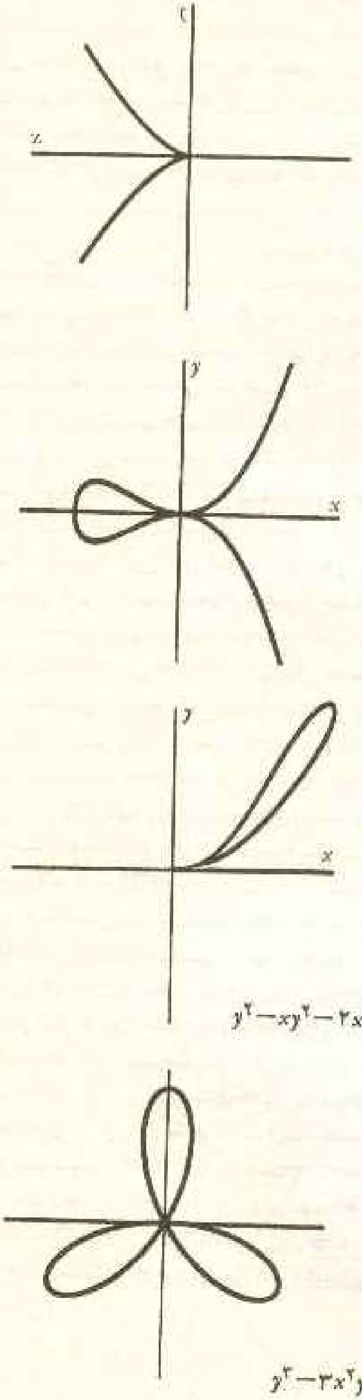
شکل ۸

مکان هندسی $x^2+y^2+1=0$ در صفحهٔ اقلیدسی، یا متناظراً مکان هندسی $X^2+Y^2+Z^2=0$ در **P**، تهی است. ولی چنانچه X، Y، و Z مختلط فرض شوند، تمایز میان $X^2+Y^2+Z^2=0$ و $X^2+Y^2-Z^2=0$ (معادلهٔ دایره) ازمیان برداشته می‌شود زیرا که با قراردادن iW به‌جای Z در معادلهٔ اول، این معادله تبدیل می‌شود به $X^2+Y^2-W^2=0$. با بحثی مشابه می‌توان نشان داد که همهٔ موارد مقاطع مخروطی تک‌نقطه‌ای و تهی در **P** با گذر به **CP** ناپدید شده و به انواع دیگر مقاطع مخروطی می‌پیوندند. بزودی خواهیم دید که «شکل نوعی» یک مقطع مخروطی در **CP** یک کره است و حالت دوخط (کره) متقاطع یا منطبق برهم، به‌طور مجازی در زمرهٔ خمهای جبری درجهٔ دوم درمی‌آید. نکته این است که در موارد اخیر می‌توان عبارت درجهٔ دوم را به دو عبارت درجهٔ یک تجزیه کرد

$$p^*=q^*\cdot r^*$$

پس در واقع، مکان هندسی $p^*(X, Y, Z)=0$ اجتماع دو مکان هندسی $q^*(X, Y, Z)=0$ و $r^*(X, Y, Z)=0$ است که هریک یک خط راست (کره در **CP**) است. به طور کلی، یک چندجمله‌ای (یا خم جبری مربوط به آن) را تحویل‌ناپذیر روی هیأت K می‌نامیم هرگاه نتوان این چندجمله‌ای را به دو چندجمله‌ای از درجات پایینتر با ضرایبی در هیأت K تجزیه کرد. مثلاً X^2+Y^2 روی هیأت اعداد حقیقی تحویل‌ناپذیر است ولی روی هیأت اعداد مختلط به‌دو چندجمله‌ای $X+iY$ و $X-iY$ تجزیه می‌شود و تحویل‌ناپذیر نیست.

در بررسی خمهای از درجات بالاتر باید به‌پدیدهٔ دیگری که ظهور «نقاط تکین» است نیز توجه داشت. به‌خم «آلفا» (تصویر بالای سمت راست شکل ۱) توجه کنید. این خم خود را در نقطهٔ $(0, 0)$ قطع می‌کند ولی یک خم تحویل‌ناپذیر است. $(0, 0)$ یک «نقطهٔ تکین»



$y^2-x^3=0$

$y^2-x^4-x^5=0$

$y^4-xy^2-2x^2y+x^2y^2+x^4=0$

$y^3-3x^2y-(x^2+y^2)^2=0$

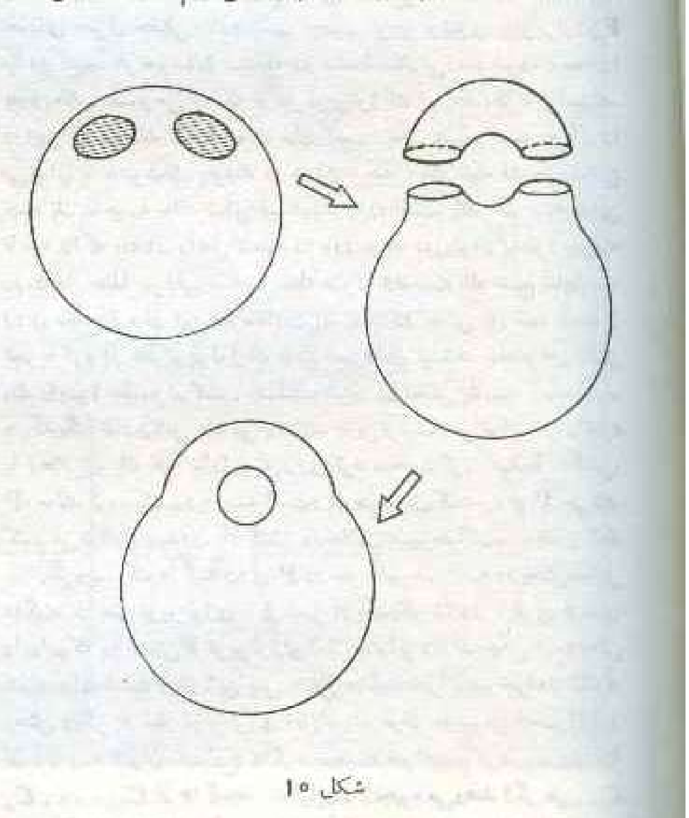
شکل ۹

برای خم محسوب می‌شود، و این در واقع ساده‌ترین نوع از این‌گونه نقطه‌هاست. نمونه‌های دیگری در شکل ۹ نمایش داده شده‌اند. تعریف کلی بدین صورت است: برای خم $p^*(X, Y, Z)=0$، نقطهٔ A واقع بر خم یک نقطهٔ تکین خوانده می‌شود اگر مشتقات p^* نسبت به هر سه متغیر X، Y، و Z در A صفر باشند

$$\frac{\partial p^*}{\partial X}(A)=\frac{\partial p^*}{\partial Y}(A)=\frac{\partial p^*}{\partial Z}(A)=0$$

برای خمهای $p(x, y) = 0$ درصفحهٔ دکارتی، شرط معادل این است که $\partial p/\partial x$ و $\partial p/\partial y$ درنقطهٔ موردبحث صفرشوند. یك خم جبری ناتکین خوانده می‌شود هرگاه فاقد نقاط تکین باشد. می‌توان به‌سادگی نشان دادکه هر خم درجهٔ دوم تحویل‌ناپذیر ناتکین است و از اینرو نقاط تکین درخمهای درجهٔ سه به‌بالا ظاهر می‌شوند.

در زیر قضیه‌ای بیان می‌کنیم به‌این مضمون که برخلاف خمهای حقیقی، کلیهٔ خمهای جبری تحویل‌ناپذیر ناتکین ازیك درجهٔ معین در **CP**، ازنظر توپولوژیك متحدالشکل هستند! برای این‌کار لازم است که به‌توصیف رویه‌هایی که از چسباندن نوعی«دسته» به کره پدید می‌آیندبپردازیم. مقصود ازیك «دسته»، استوانه‌ای با دو لبهٔ مدوراست (شکل ۱۰). روی سطح کره دوحفره ایجاد می‌کنیم و یك دسته را در طول لبه‌ها درمکان حفره‌ها به‌کره پیوند می‌زنیم. رویهٔ حاصل راکه



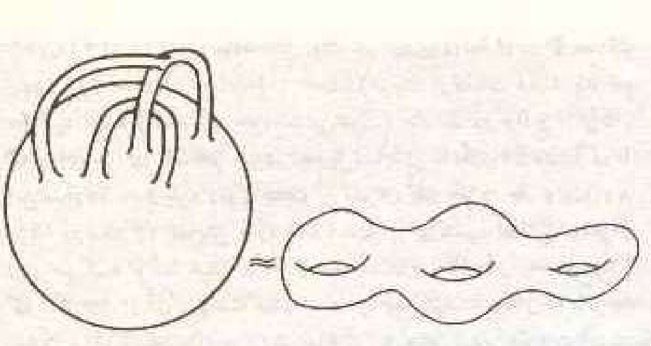
شکل ۱۰

می‌توان باکشاندن وصاف کردن به دلخواه هموار ساخت، یك کرهٔ یك دسته‌ای یا یك چنبره می‌نامند. می‌توان با تکرار این عمل، کرهٔ g دسته‌ای را با نصب g دسته درطول لبهٔ $2g$ حفره روی سطح کره ایجادکرد. توجه کنیدکه از نظر توپولوژیك، مکان ایجاد حفره‌ها و اندازهٔ آنها اهمیتی ندارد. کرهٔ g دسته‌ای، یك رویه ازگونهٔ g نیز نامیده می‌شود. درشکل ۱۱ دو رویه ازگونهٔ ۳ نمایش داده شده‌اند.

قضیهٔ موعود بدین صورت است: شکل توپولوژیك هرمنحنی تحویل‌ناپذیر ناتکین از درجهٔ d در **CP** یك رویه ازگونهٔ g است که در آن

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$$

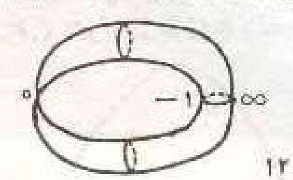
قبلاً اشاره کردیم که خمهای تحویل‌ناپذیر درجهٔ دو فاقد نقطهٔ تکین هستند، پس برای $d = 2$ (و نیز $d = 1$)، $g = 0$، یعنی شکل توپولوژیك، یك کره (بدون دسته) است. این مطلب را در مورد



شکل ۱۱

$d = 1$ (خط راست) قبلاً دیده بودیم، وبرای $d = 2$ نیز می‌توان مطلب را مستقیماً با به‌هم‌چسباندن‌مقاطع خم با صفحات مختلف‌مشاهده کرد (به‌مثال ۱.۲، فصل‌اول مرجع [۹] نگاه‌کنید). شکل توپولوژیك خمهای تحویل‌ناپذیر ناتکین درجهٔ سه، یك چنبره است. در میان خمهای جبری، خمهای درجهٔ سه این امتیاز را دارندکه می‌توان آنها را به‌گونه‌ای طبیعی به یك گروه تبدیل کرد. وجود ساختار گروهی برای خمهای درجهٔ سه ارتباط تنگاتنگی با بررسی توابع بیضوی در آنالیزمتغیر مختلط ونظریهٔ اعداد دارد (مراجع [۳]، [۸]، و [۹]).

قضیهٔ بالا نقش ساده کننده و وحدت‌بخش گذر به صفحهٔ افکنشی و اعداد مختلط را بدروشنی بیان می‌کند. با این حال نباید مسأله را در **CP** تمام شده تلقی کرد زیراکه علاوه برمسائل متعددی که در این مقاله بدانها اشاره‌ای نشده است، وجود نقاط تکین در خمهای درجهٔ سه به‌بالا به‌هیچوجه یك امر استثنایی نیست وپدیده‌ای درخوربررسی می‌باشد. پیشرفتهای عظیمی که در رده‌بندی‌نقاط تکین وبررسی شکل خمهای تکین صورت گرفته است در این مقاله نمی‌گنجد. به عنوان نمونه، شکل منحنی آلفا راکه در **CP** یك «چنبرهٔ تباهیده» است در شکل ۱۲ نمایش می‌دهیم. مطالعهٔ کاملتر این مبحث باید درچارچوب نظریهٔ رویه‌های ریمانی یا هندسهٔ جبری صورت گیرد.



شکل ۱۲

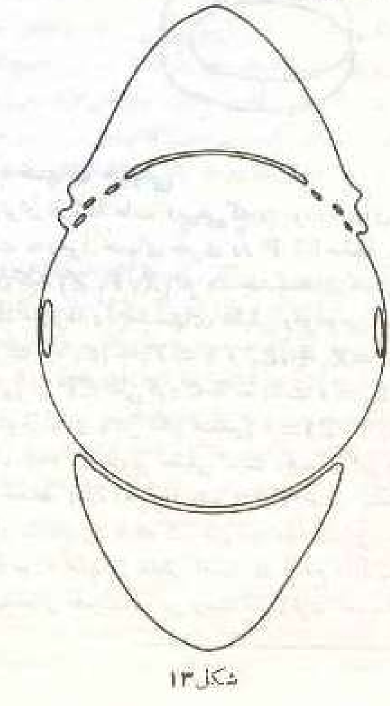
بازگشت به‌خمهای حقیقی

چگونه می‌توان از اطلاعات وسیعی که درموردخمهای‌جبری در **CP** موجود است به رموز خمهای جبری در **P** (یا صفحهٔ دکارتی) دست یافت؟ فرض کنید $p^*(X, Y, Z)$ یك چندجمله‌ای همگون با ضرایب حقیقی باشد. متغیرها را به‌قسمتهای حقیقی وموهومی تفکیك می‌کنیم، $X = X_1 + iX_2$، $Y = Y_1 + iY_2$ و $Z = Z_1 + iZ_2$. می‌توان **P** را زیرفضایی از **CP** تلقی کردکه با معادلات $X_2 = Y_2 = Z_2 = 0$ تعریف می‌شود. برای یافتن مکان هندسی $p^*(X, Y, Z) = 0$ در **P**، باید به X، Y، و Z مقادیر حقیقی نسبت دهیم که این به‌منزلهٔ یافتن تقاطع خم مختلط (یك رویهٔ دوبعدی) با **P** است. متأسفانه بیان این مطلب بسیار ساده‌تر از به‌کارگرفتن آن در دستیابی به احکام کلی غیر بدیهی درمورد خمهای حقیقی است. در واقع شاید بتوان ادعا کرد که تنها قضیهٔ حائز اهمیت دراین زمینه قبل‌ازقرن اخیر، قضیهٔ هارناك[1]

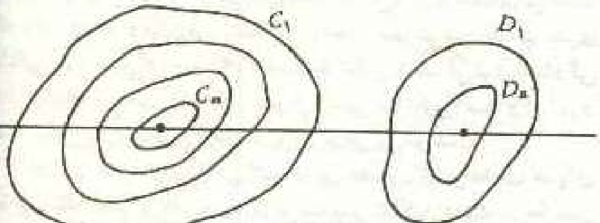
1. Harnack

(۱۸۷۶) است: تعداد مؤلفه‌های یك خم جبری درجهٔ d در $\mathbf{P}$ حداکثر برابر $(d-1)(d-2)/2+1$ است. (هریك از قطعات همبند یك خم حقیقی، یك «مؤلفه» آن خوانده می‌شود.) هارناك در واقع نشان داد که برای هر d، یك خم جبری تحویل‌ناپذیر ناتکین از درجهٔ d با این تعداد مؤلفه وجود دارد. به‌عنوان نمونه، یك خم درجهٔ ۶ با ۱۱ مؤلفه در شکل ۱۳ نمایش داده شده است. برای کسب اطلاع بیشتر از این خم که توسط هیلبرت ارائه شده است و امثال آن به مرجع [۱] که شکل ۱۳ از آن برداشته شده است مراجعه کنید. همچنان که با توجه به‌شکل می‌توان حدس زد، روش ساختن این منحنی بدین‌صورت است: اگر $p(x, y)=0$ معادلهٔ یك دایره و $q(x, y)=0$ معادلهٔ یك بیضی متقاطع با آن باشد، معادلهٔ شکل داده شده به‌صورت $p^2q+r=0$ است که در آن r یك چندجمله‌ای درجهٔ ۶ با ضرایب کوچك حقیقی است.

در باقیماندهٔ این بخش خمهای جبری را تحویل‌ناپذیر و ناتکین فرض می‌کنیم. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، هر مؤلفهٔ یك چنین خم جبری در $\mathbf{P}$ یك خم سادهٔ بسته است (ساده یعنی اینکه خود را قطع نمی‌کند)، ولی این مؤلفه‌ها خود بر دو قسم‌اند: برخی $\mathbf{P}$ را به‌دو بخش تجزیه می‌کنند (که از این پس هاگینه خوانده خواهند شد)، و برخی دیگر $\mathbf{P}$ را تجزیه نمی‌کنند. مؤلفه‌های شکل ۱۳ همه هاگینه هستند و مشاهده می‌شود که یك هاگینه ۹ هاگینهٔ دیگر را در برگرفته است. مسألهٔ تعیین وضعیت نسبی هاگینه‌ها در یك خم جبری (مثلاً این‌که چه تعداد هاگینه می‌توانند درداخل یك هاگینهٔ دیگر قرار گیرند) به‌طور غیرمنتظره‌ای دشوار است. در اینجا باید اشاره کرد که در فهرست ۲۳ مسأله‌ای که هیلبرت در سال ۱۹۰۰ به‌ریاضیدانان قرن بیستم عرضه کرد، نیمی از مسألهٔ شانزدهم به‌تعیین توپولوژی توزیع مؤلفه‌های یك خم جبری در $\mathbf{P}$ اختصاص دارد. پیشرفت در حل این مسأله به‌نسبت کند بوده است. برای دست یافتن به‌خصوصیات تقاطع خم جبری مختلط با $\mathbf{P}$، نیازمند به‌استفاده از روشهای پیچیده‌ای در توپولوژی جبری هستیم و نتایج به‌دست آمده تاکنون بیشتر مربوط به خمهای از درجهٔ زوج است. اگر $p^*(X,Y,Z)$ از درجهٔ زوج باشد، علامت $p^*(X,Y,Z)$



شکل ۱۳

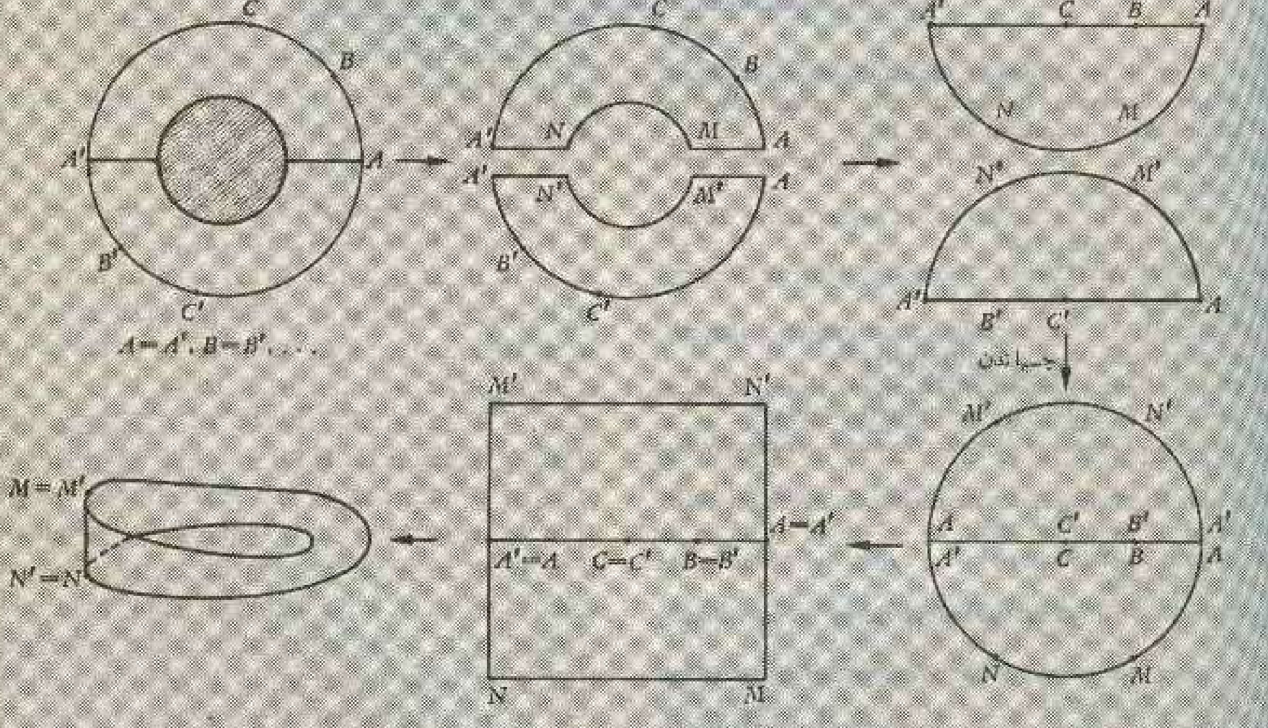


شکل ۱۴

به‌طور ذاتی تعریف شده‌است یعنی با ضرب کردن X، Y، و Z در یك عدد حقیقی $\lambda \neq 0$ عوض نمی‌شود، پس می‌توان دو طرف هرمؤلفه را با توجه به‌علامت $p^*(X, Y, Z)$ ازهم تشخیص‌داد، یعنی‌هرمؤلفه یك هاگینه است. برای تشریح بعضی نتایج به‌دست آمده در مورد خمهای جبری حقیقی، لازم است نخست توجه بیشتری به‌توپولوژی $\mathbf{P}$ مبذول کنیم. هرخم سادهٔ بسته‌که در صفحهٔ دکارتی‌رسم شود، صفحه را به‌دو بخش تقسیم می‌کند که ازنظر توپولوژیك از یکدیگر قابل تمیزند. «داخل خم» یك ناحیهٔ همبند ساده است، یعنی هرخم بسته در آن را می‌توان با تغییرشکل پیوسته در همان ناحیه به‌یك نقطه فشرد. «خارج خم» یك ناحیهٔ حلقه شکل غیرهمبند ساده است. یك خم بسته دراین ناحیه راکه یك‌بار داخل ناحیه را دور بزند نمی‌توان به‌طور پیوسته در داخل حلقهٔ بیرونی به‌یك نقطه فشرد. وضعیت یك خم سادهٔ بسته روی سطح کره از این نظرمتفاوت است که دو بخش به‌دست آمده از تجزیهٔ کره از نظرتوپولوژیك قابل تمیزدادن نیستند. بخصوص اگر یك دایرهٔ عظیمه ازکره حذف شود، دو بخش پدید آمده نسبت به‌یکدیگر تقارن‌کامل هندسی دارند. بدین‌ترتیب نمی‌توان از «داخل» یا «خارج» یك خم سادهٔ بسته روی کره صحبت کرد. صفحهٔ افکنشی، $\mathbf{P}$، مانند کره، یك رویهٔ بسته است: از هرطرف که روی $\mathbf{P}$ حرکت کنیم می‌توانیم بدون بازگشتن درخلاف مسیرحرکت، به‌همان نقطه بازگردیم. یك هاگینه روی $\mathbf{P}$ درنظر بگیرید. آیا دوبخش مکمل هاگینه از نظر توپولوژی قابل تمیز ازیکدیگرند؟ در تابلوی ۲ نشان داده‌ایم که دو بخش $\mathbf{P}$ توپولوژی‌کاملاً متمایز دارند: یکی ازدوبخش همبند ساده است و از این پس داخل هاگینه خوانده خواهد شد، و بخش دیگر از نظر توپولوژی معادل یك نوار موبیوس است (!)، و از آن به عنوان خارج هاگینه صحبت خواهیم کرد. یك دنبالهٔ $C_1, \ldots, C_m$ از هاگینه‌ها تشکیل یك زنجیره می‌دهند اگر هر C_{i-1} درناحیهٔ داخل C_i قرار گیرد. یك مسألهٔ عمده دربررسی خمهای جبری حقیقی، تعیین تعداد زنجیره‌ها و طول هریك است. در این مورد، نکتهٔ مقدماتی زیرمفید واقع می‌شود. یك خم (تحویل‌ناپذیر و ناتکین) از درجهٔ زوج $d=2k$ درنظر بگیرید. ادعا می‌کنیم که تعداد هاگینه‌ها در هر زنجیره یا در هردو زنجیرهٔ متمایز نمی‌تواند از k تجاوز کند. برای مشاهدهٔ این واقعیت، دو زنجیرهٔ متمایز $C_1, \ldots, C_m$ و $D_1, \ldots, D_n$ را درنظر بگیرید و خط راستی ازیك نقطهٔ داخل C_m به‌یك نقطهٔ داخل D_n رسم کنید (شکل ۱۴). این‌خط راست هاگینه‌های دو زنجیره را در $2(m+n)$ نقطه (دو برابر تعداد هاگینه‌ها) قطع می‌کند. ازآنجاکه تعداد نقاط مشترك یك خط راست (خم درجهٔ یك) با یك خم درجهٔ d حداکثر d است، نتیجه می‌گیریم که $m+n$ حداکثر برابر k است. با توجه به‌همین نکته، کلیهٔ اشکال ممکن‌خمهای درجهٔ چهار رده بندی می‌شوند. طبق قضیهٔ هارناك، یك خم درجهٔ چهار حداکثر چهار هاگینه دارد. وقتی تعداد هاگینه‌ها سه یا چهار باشد، طبق مشاهدهٔ بالا، این هاگینه‌ها باید دوبه‌دونسبت به‌یکدیگر متخارج باشند. درحالتی که فقط دوهاگینه وجود داشته باشد، دوامکان

تابلوی ۴. ناحیهٔ خارج یک هاگینه در صفحهٔ افکنشی، یک نوار موبیوس است

برای ملاحظهٔ این امر نخست متذکر می‌شویم که صفحهٔ دکارتی از نظر توپولوژی معادل ناحیهٔ داخل یک گوی است. مثلاً اگر نقاط صفحه را به $z=(x, y)$ نمایش دهیم، نگاشتی که z را به $z/(|z|+1)$ می‌فرستد همهٔ صفحه را به‌طور یک به یک بر داخل گوی واحد می‌نگارد. حال ناحیهٔ داخل گوی واحد را به‌عنوان صفحهٔ دکارتی در نظر می‌گیریم و به آن نقاط بینهایت دور را می‌افزاییم. دایرهٔ واحد حول این گوی به منزلهٔ خط واقع در بینهایت است با این تفاوت که چون روی هر خط گذرنده از O فقط یک نقطهٔ بینهایت دور وجود دارد، باید هر دو نقطهٔ متقابل به قطر دایره را یک نقطه فرض کرد. یک هاگینه (مثلاً دایرهٔ به‌شعاع ۱/۲ حول O) و ناحیهٔ داخل آن را از این مدل $\mathbf{P}$ حذف می‌کنیم و نشان می‌دهیم آنچه باقی می‌ماند از نظر توپولوژی معادل نوار موبیوس است. اشکال زیر مراحل بریدن و چسباندن لازم را نشان می‌دهند. در شکل ماقبل آخر نواری به‌دست آورده‌ایم که با چسباندن دو انتهای آن در جهت عکس نوار موبیوس به‌دست می‌آید.



موجود است: دو هاگینه یا متخارج هستند یا یکی درداخل دیگری قرار دارد. برای کلیهٔ موارد بالا و نیز حالت تک هاگینه‌ای مثالهایی از خمهای درجهٔ چهار وجود دارد. وضعیت خمهای درجهٔ شش پیچیده‌تر است ولی در این مورد نیز رده‌بندی کاملی به‌دست آمده است. از جمله ثابت شده است که در صورت وجود یازده هاگینه (حداکثر تعداد ممکن)، این یازده هاگینه نمی‌توانند همگی نسبت به یکدیگر متخارج باشند. همچنین در داخل یک هاگینه، تعداد هاگینه‌های بیرونی که همگی نسبت به یکدیگر متخارج باشند، همواره ۰، ۱، ۵ یا ۹ است. دربارهٔ خمهای درجهٔ زوج بالاتر از شش نیز نتایج بسیاری دردست است ولیکن هنوز رده‌بندی کاملی به‌دست نیامده است. گزارشهای مبسوطی از اطلاعات و روشهای موجود در این زمینه را که عمدتاً توسط ریاضیدانان شوروی پتروفسکی[1]، رخلین[2]، خارلامف[3]، گودکف[4]، و آرنولد[5] به‌دست آمده‌اند می‌توان در [۱]، [۵]، و [۱۳] مطالعه کرد.

ارتباط با سایر شاخه‌های ریاضی

بحث را از مسائل ریاضیات باستان شروع کردیم، و امیدواریم خواننده را قانع کرده باشیم که علی‌رغم ظاهر ابتدایی و سادهٔ موضوع خمهای جبری، این مبحث هنوز مملو از مسائل حل‌نشده‌ای است که دستیابی به آنها مستلزم آگاهی از تازه‌ترین روشهای ریاضیات است. برای اینکه صحت این ادعا روشنتر شود، لازم است که در این آخرین بخش، بعضی از روابط بررسی خمهای جبری با سایر شاخه‌های ریاضیات را به‌اختصار شرح دهیم.

بررسی خمهای جبری مختلط (یعنی در $\mathbf{CP}$) از دیدگاه آنالیز ریاضی، در واقع بررسی رویه‌های ریمانی فشرده است. در اواخر قرن نوزدهم، ریمان رویه‌هایی را تعریف کرد که جایگاه طبیعی بررسی توابع چند مقداری در آنالیز مختلط هستند. مطالعهٔ این رویه‌ها، که به رویه‌های ریمانی معروف‌اند، از غنی‌ترین مباحث ریاضی است و هم اکنون نیز به‌سبب کاربردهایی که رویه‌های ریمانی در سایر بخشهای

1. Petrovskii 2. Rokhlin 3. Kharlamov
4. Gudkov 5. Arnold

ریاضی و نیز درفیزیك نظری(نظریهٔ ریسمان) دارند این موضوع با حرارت فراوان دنبال می‌شود. قضیهٔ زیبایی درنظریهٔ رویه‌های ریمانی نشان می‌دهدکه رویه‌های ریمانی بسته، کراندار و بی‌لبه، در واقع تکمیلهای افکنشی خمهای جبری مختلط هستند. اثرات متقابلی که این ارتباط، بین روشهای جبری و آنالیزی ایجاد کرده است به‌پربار ساختن هردو رشته کمکهای فراوان کرده است.

تاکنون گفتگوی ما به‌خمهای تعریف شده توسط چندجمله‌ایهایی محدودبوده است که ضرایب آنها اعداد حقیقی یا اعداد مختلط هستند. اگر به‌جای هیأتهای اعداد حقیقی یا اعداد مختلط، ازهیأتهای دیگری مانند هیأتهای متناهی، هیأت اعدادگویا و یا توسیعهای جبری اعداد گویا، استفاده کنیم، به‌قلمرو نظریهٔ اعداد وارد می‌شویم. به‌عنوان‌مثال، خم $x^n+y^n-1=0$، n عدد صحیح مفروض، را در صفحهٔ اعدادگویا مورد بررسی قرار می‌دهیم. مقصود از صفحهٔ اعداد گویا، مجموعهٔ زوجهای مرتب از اعداد گویاست. نقاط روی این خم در صفحهٔ اعدادگویا به‌چه صورتی هستند؟ اگر (x, y) یك نقطهٔ خم باشد، هر یك از x و y نمایشی به‌صورت p/q دارد که در آن p و q اعداد صحیح هستند. حال با یافتن مخرج مشترك، x و y را به‌ترتیب به‌صورت X/Z و Y/Z می‌نویسیم که در آن X، Y، و Z اعدادصحیح هستند. پس X، Y، و Z باید در معادلهٔ $X^n+Y^n=Z^n$ صدق کنند که این معادلهٔ معروف فرماست! بدین‌ترتیب قضیهٔ آخر فرما (که هنوز ثابت نشده است) حکم می‌کندکه برای $n>2$، خم جبری $x^n+y^n-1=0$ در صفحهٔ اعدادگویا تهی است. رابطهٔ نظریهٔ خمهای جبری و نظریهٔ اعداد در واقع از شناخته‌شده‌ترین ارتباطات نظریهٔ خمهای جبری با سایر شاخه‌های ریاضیات است. امروزه مشکل می‌توان مرزی میان نظریهٔ اعداد و نظریهٔ خمهای جبری روی هیأتهای عددی قائل شد. اثبات حدس موردل[1] توسط فالتینگز[2] که ازمهمترین رویدادهای نظریهٔ اعداد دراین قرن است با استفاده‌های عمیقی ازاین روابط صورت گرفت. مرجع [۹] یك بررسی خواندنی ازاین مقوله ارائه می کند. لازم است این نیز اضافه شودکه درسالهای اخیر به‌کمك خمهای درجهٔ ۳ (که به‌سبب ارتباط پیشگفته با توابع بیضوی به‌خمهای بیضوی نیزمعروف‌اند) روی هیأتهای متناهی و حلقه‌ها، الگوریتمهای نیرومندی برای آزمودن اول بودن اعداد صحیح و نیز تجزیهٔ اعداد صحیح به‌اعداد اول به‌دست آمده است [۸] که از نظرسرعت محاسبه و میزان نیاز به‌حافظهٔ کامپیوتر، بر روشهای قبلی ارجحیت دارند. از چنین الگوریتمهایی در نظریهٔ رمزنگاری استفاده می‌شود.

1. Mordell   2. Faltings

بالاخره باید به‌این اشاره کردکه نظریهٔ خمهای جبری درواقع فصل اول از رشتهٔ هندسهٔ جبری است. در هندسهٔ جبری، به‌جای یك معادلهٔ جبری ۲ یا ۳ متغیری، یك دستگاه معادلات جبری چند متغیری روی هیأتهای مختلف یا حتی حلقه‌ها مورد بررسی قرارمی گیرد. برای اینکه به‌اهمیت جایگاه هندسهٔ جبری در ریاضیات جدید پی‌ببریم، کافی‌است به‌یك مقایسهٔ ساده بپردازیم. اهمیت جبرخطی در ریاضیات و درکاربردهای آن از واقعیتهای بلامنازع است. جبرخطی‌رامی‌توان به‌اعتباری بررسی نظام‌جوابهای یك دستگاه معادلات خطی(درجهٔ اول) تلقی کرد. در هندسهٔ جبری، نظام بسیار پیچیده‌تر مجموعهٔ جوابهای یك دستگاه معادلات از درجات بالاتر بررسی می‌شود.

مراجع

1. Á Campo N., *Sur la Première Partie du Seizième Problème de Hilbert*. Seminaire Bourbaki no 537. Lecture Notes in Mathematics, 770. Springer-Verlag, 1980.
2. Brieskorn E., and Knörr H., *Plane Algebraic Curves*, Birkhäuser, 1986.
3. Clemens C.H., *A Scrapbook of Complex Curve Theory*, Plenum, New York, 1980.
4. Griffiths Ph., and Harris J., *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, New York, 1978.
5. Gudkov D. A., "The topology of real projective algebraic varieties", *Russ. Math. Survs*, **29** (1974) 1-79.
6. Klein F., *Famous Problems of Elementary Geometry*, Chelsea, New York, 1962 (Reprint of the English translation).
7. Kendig K., *Elementary Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.
8. Lenstra H., "Elliptic curves and number-theoretic algorithms", *Proc. Int'l. Cong. Math.* 1986.
9. Mazur B., "Arithmetic on curves", *Bull. Am. Math. Soc*, **14** (1986) 207-259.
10. Shafarevich I.R., *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.
11. Springer H., *Introduction to Riemann Surfaces*, Addison-Wesley, Reading 1957.
12. Walker R.J., *Algebraic Curves*, Springer-Verlag, 1978 (Reprint of 1950 edition).
13. Wilson G., "Hilbert's sixteenth problem" *Topology*, **17** (1978) 53-73.

◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆◆

* سیاوش شهشهانی، دانشگاه صنعتی شریف