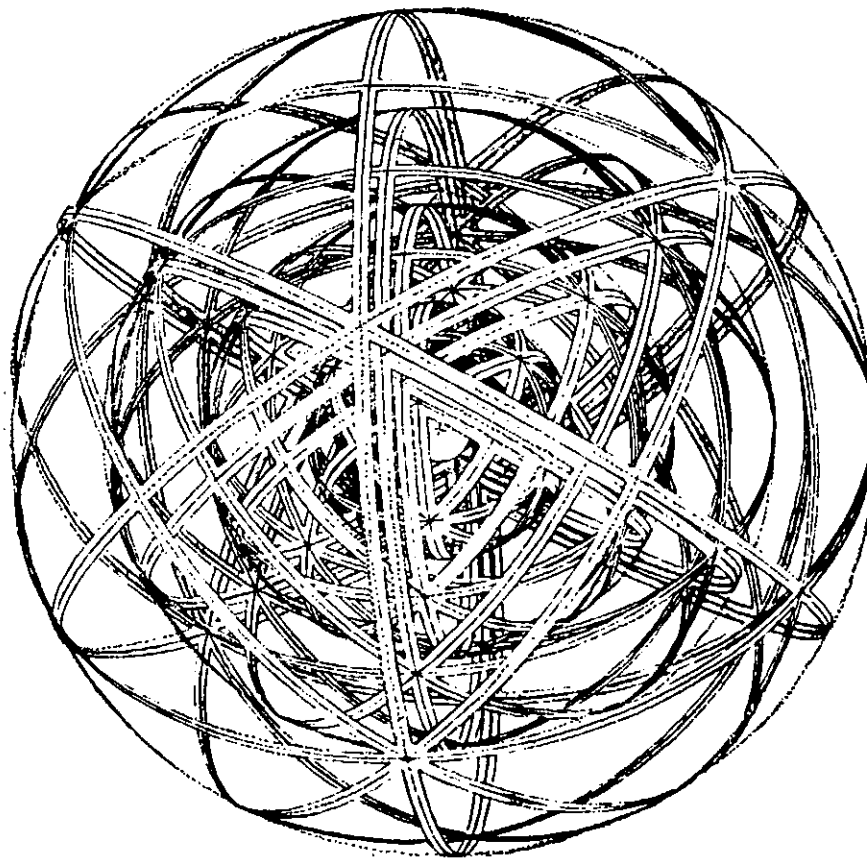


# سهمی



● سید محمد رضا هاشمی موسوی

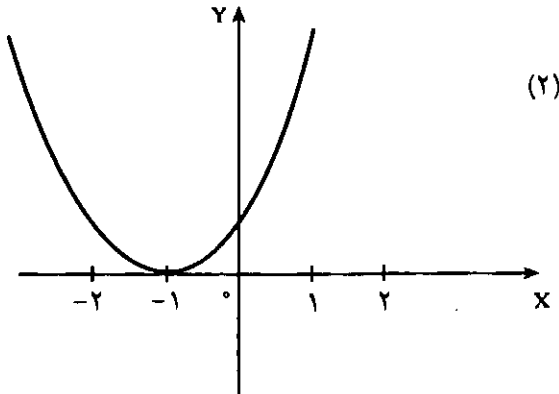
توجه: نمودار  $y = x^2$ ، یک «سهمی» را مشخص می‌کند که نسبت به محور  $y$ ها متقارن است؛ یعنی خط  $x = 0$ ، محور تقارن نمودار است.

مثال (۲): نمودار  $y = (x+1)^2$  را رسم کنید.

حل: برای رسم نمودار، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

$x$	...	-۲	-۱	۰	۱	۲	...
$y = (x+1)^2$	...	۱	۰	۱	۴	۹	...

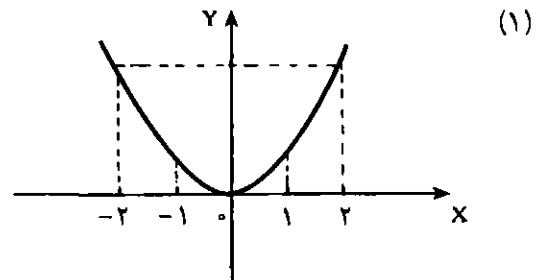
با توجه به جدول و مقادیر مختلف دیگری که به  $x$  بدهیم، نمودار منحنی مطابق شکل زیر رسم خواهد شد.



با رسم نمودار  $y = a(x - x_0)^2 + y_0$  به روش نقطه‌یابی آشنا هستید. در این جا برای یادآوری این مطلب، چند مثال می‌آوریم.  
مثال (۱): نمودار  $y = x^2$  را رسم کنید.  
حل: برای رسم نمودار، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم:

$x$	...	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	...
$y = x^2$	...	۴	۱	۰	۱	۴	۹	...

همان طور که ملاحظه می‌کنید، به  $x$  مقادیر مختلفی داده شده و برای  $y$  (یا  $x^2$ ) به ترتیب، مقادیری به دست آمده است که هر نقطه مانند:  $(x_1, y_1)$ ، مشخص‌کننده یک نقطه از منحنی  $y = x^2$  است. در صورتی که نقاط بیشتری را مشخص کنیم، از وصل این نقاط، نمودار منحنی مطابق شکل زیر رسم می‌شود.



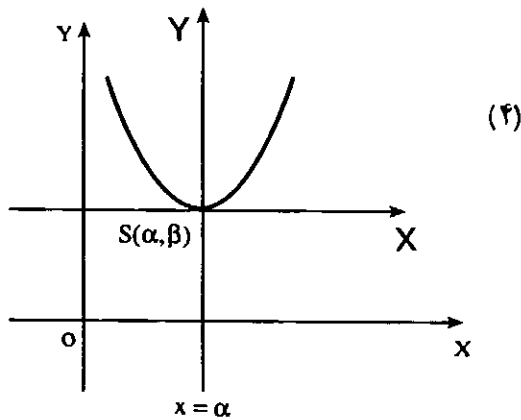
برای رسم نمودار منحنی به معادله (۱) یا  $y - \beta = (x - \alpha)^2$  فرض می‌کنیم:

$$X = x - \alpha, \quad Y = y - \beta \quad (2)$$

بنابراین، معادله (۱) را می‌توان به صورت ساده‌تر نوشت:

$$Y = X^2 \quad (3)$$

در نتیجه اگر مبدأ دستگاه  $xoy$  را به نقطه  $S(\alpha, \beta)$  منتقل کنیم، در دستگاه جدید، کافی است منحنی به معادله (۳) را که نمودار آن مشخص است، رسم کنیم.



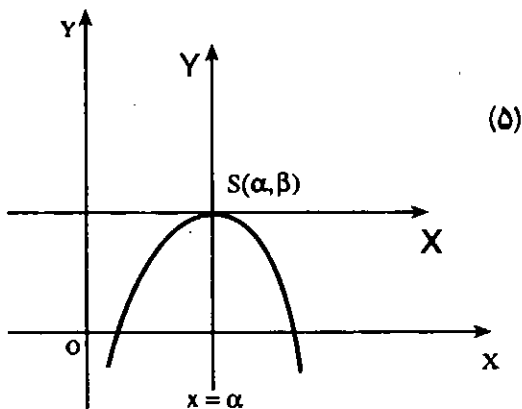
با توجه به نمودار (۴)، رأس سهمی و محور تقارن آن به سادگی تعیین می‌شود:

$x = \alpha$  (محور تقارن)،  $S(\alpha, \beta)$  (رأس سهمی)

لازم به ذکر است که رأس سهمی  $S$  در نمودار (۴)، از نظر عرض، کمترین مقدار را دارد. نقطه  $S$  مینیمم سهمی است. به همین ترتیب، رسم نمودار سهمی به معادله عمومی:

$$y = -(x - \alpha)^2 + \beta$$

به صورت زیر است:



همان‌طور که مشاهده می‌شود، این نمودار، نظیر نمودار  $y = x^2$  است. این نوع نمودارها را «سهمی» می‌نامند.

در نمودار (۱) نقطه  $(0, 0)$  و در نمودار (۲) نقطه  $(-1, 0)$  را رأس سهمی می‌نامند. با توجه به نمودارها، ملاحظه می‌شود که این نمودارها به ترتیب در  $(0, 0)$  و  $(-1, 0)$  بر محور  $x$  هم‌مسندند. واضح است که خط  $x = -1$ ، محور تقارن نمودار  $y = (x + 1)^2$  است. بدیهی است که با تعیین محور تقارن سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  و دو نقطه متقارن دیگر (نسبت به محور تقارن) می‌توان نمودار را مشخص کرد.

مثال (۳): نمودار سهمی  $y = x^2 - 4x + 5$  را رسم کنید. حل: برای رسم نمودار سهمی، ابتدا محور تقارن منحنی را تعیین می‌کنیم:

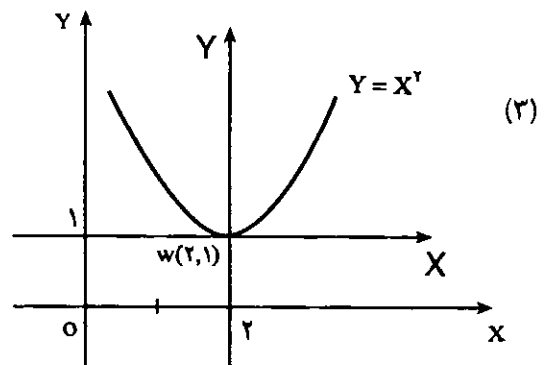
$$y = x^2 - 4x + 5 = (x^2 - 4x + 4) + 1 = (x - 2)^2 + 1;$$

$$y - 1 = (x - 2)^2 \quad (1)$$

در این جا، با فرض  $X = x - 2$ ،  $Y = y - 1$ :

$$Y = X^2 \quad (2)$$

بنابراین، اگر مبدأ دستگاه  $xoy$  را به نقطه  $w(2, 1)$  منتقل کنیم، در دستگاه جدید، کافی است منحنی  $Y = X^2$  را رسم کنیم، که بسیار ساده و مشخص است.



با توجه به نمودار (۳)، رأس سهمی و محور تقارن آن به سادگی تعیین می‌شود:

$x = 2$  (محور تقارن)،  $S(2, 1)$  (رأس سهمی)

در این جا با توجه به مثال (۳)، رسم نمودار سهمی به معادله عمومی زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

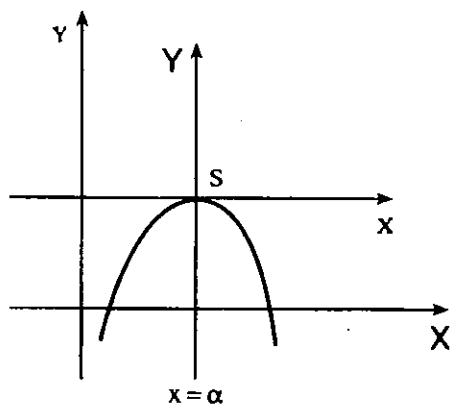
$$y = (x - \alpha)^2 + \beta \quad (1)$$

در این جا ضریب  $a$  فقط دو شاخه سهمی را به هم نزدیک یا از هم دور می کند.

حالت ۲)  $a < 0$  :

چون  $a < 0$  فرض شده است، بنابراین نقطه  $S(\alpha, \beta)$ ، ماکزیم سهمی است.

نکته: برای رسم نمودار (۱) ابتدا رأس سهمی (نقطه  $S$ ) را تعیین می کنیم. سپس محور تقارن ( $x = \alpha$ ) آن را تعیین و حداقل دو نقطه متقارن نسبت به این خط را معین می کنیم.



در این جا با توجه به مطالب اخیر، نمودار سهمی به معادله عمومی زیر را در حالت کلی مورد بررسی قرار می دهیم:

$$y = ax^2 + bx + c \quad (1)$$

برای بررسی سهمی به معادله (۱)، ابتدا معادله آن را به صورت استاندارد:

$$y - \beta = k(x - \alpha)^2 \quad (2)$$

تبدیل می کنیم:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$x = \alpha$  (محور تقارن) ،  $S(\alpha, \beta)$  (رأس سهمی)  
در نمودار (۵)، واضح است که رأس سهمی  $S$  از نظر عرض، بیشترین مقدار را دارد. نقطه  $S$  ماکزیم سهمی است.

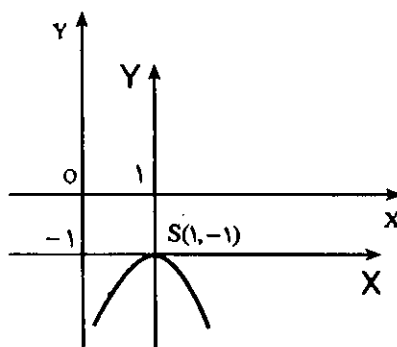
مثال (۴): نمودار سهمی  $y = -x^2 + 2x - 2$  را رسم کنید.

حل: ابتدا معادله سهمی را به صورت معادله عمومی سهمی می نویسیم:

$$y = -x^2 + 2x - 2 = -(x^2 - 2x + 1) - 1$$

$$= -(x-1)^2 - 1 ;$$

$$y+1 = -(x-1)^2 , S(1, -1)$$



حال نمودار سهمی به معادله عمومی زیر را مورد بررسی قرار

می دهیم:

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad (1)$$

برای بررسی نمودار (۱)، دو حالت در نظر می گیریم:

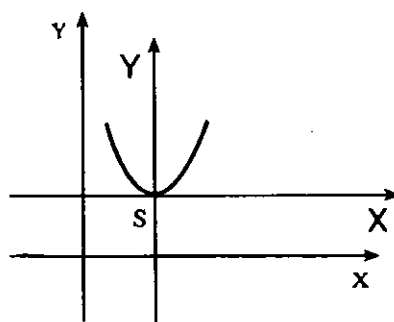
حالت ۱)  $a > 0$  :

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta ; y - \beta = a(x - \alpha)^2 \quad (2)$$

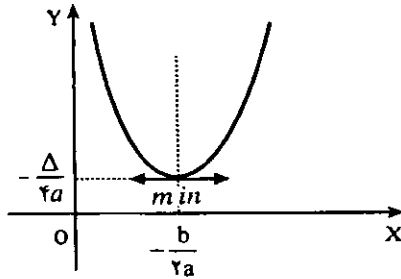
چون  $a > 0$  فرض شده است، بنابراین نقطه  $S(\alpha, \beta)$ ، مینیم

سهمی است. با فرض  $X = x - \alpha$  و  $Y = y - \beta$

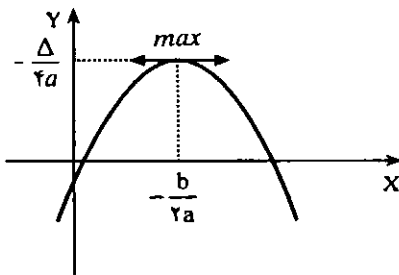
$$Y = aX^2 \quad (3)$$



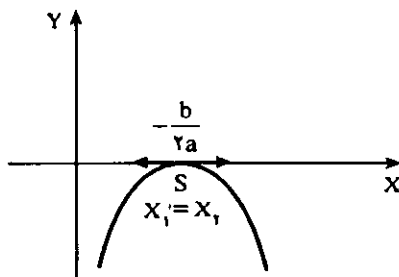
(۳)  $a > 0$  و  $\Delta < 0$ : در این حالت، مینیمم سهمی (S) بالای محور x قرار دارد و معادله  $y = 0$  ریشه حقیقی ندارد، و نمودار آن مانند شکل زیر است:



(۴)  $a < 0$  و  $\Delta > 0$ : در این حالت، سهمی دارای ماکزیمم S است و محور xها را در نقطه  $x_1$  و  $x_2$  که ریشه معادله  $y = 0$  است، قطع می‌کند، و نمودار آن مانند شکل زیر است:



(۵)  $a < 0$  و  $\Delta = 0$ : در این حالت، ماکزیمم سهمی (S) بر محور xها مماس است و طول نقطه تماس از معادله  $y = 0$  به دست می‌آید، و نمودار آن مانند شکل زیر است:



(۶)  $a < 0$  و  $\Delta < 0$ : در این حالت، ماکزیمم سهمی (S) پایین محور xها قرار دارد و معادله  $y = 0$  ریشه حقیقی ندارد، و

بنابراین:

$$y + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \quad (۳)$$

در این جا، به کمک معادله (۳)، رأس و محور تقارن سهمی به معادله (۱) را می‌نویسیم:

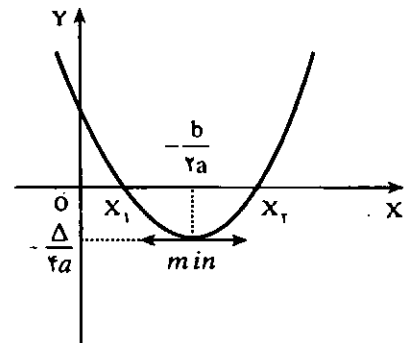
$$S(\text{رأس سهمی}) \left( -\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right) \quad (\text{محور تقارن}) \quad x = -\frac{b}{2a}$$

برای سادگی، عبارت  $b^2 - 4ac$  را به  $\Delta$  نشان می‌دهیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

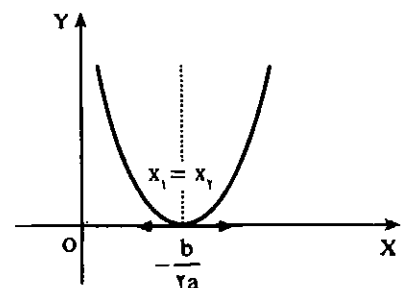
حال برای رسم نمودار (۱) یا (۲)، باید شش حالت کلی ممکن را در نظر گرفت:

(۱)  $a > 0$  و  $\Delta > 0$ : در این حالت، سهمی دارای مینیمم S است و محور xها را در دو نقطه  $x_1$  و  $x_2$  که ریشه معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  (  $y = 0$  ) است، قطع می‌کند، و نمودار آن مانند شکل زیر است:



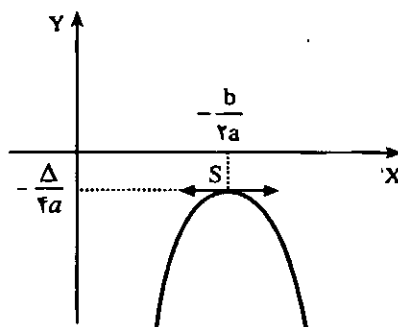
(۲)  $a > 0$  و  $\Delta = 0$ : در این حالت، مینیمم سهمی (S) بر

محور xها مماس است و طول نقطه تماس از معادله  $y = 0$  به دست می‌آید و نمودار آن مانند شکل زیر است:



نمودار آن مانند شکل زیر است :

مثال (۶): نمودار سهمی  $y = -4x^2 + 8x - 4$  را رسم کنید.  
 حل: چون  $a = -4 < 0$  و  $\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 64 = 0$ ،  
 بنابراین سهمی دارای ماکزیمم  $S$  است و نقطه  $S$  بر محور  $x$ ها  
 مماس است؛ یعنی معادله  $y = 0$  دارای ریشه مضاعف است:

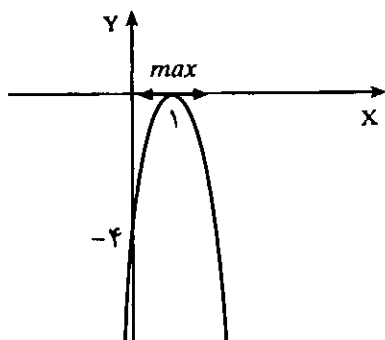


$x = 1$  (محور تقارن) و  $S(1, 0)$  (رأس سهمی)  
 $S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

نقطه برخورد سهمی با محور  $y$ ها :

$x = 0 : y = -4(0)^2 + 8(0) - 4 = -4 ; A(0, -4)$   
 $y = 0 : -4x^2 + 8x - 4 = 0 ; -4(x-1)^2 = 0 ;$   
 $x_1 = x_2 = 1$

حال با معلومات به دست آمده، نمودار سهمی را رسم می کنیم :



مثال (۷): رأس یک سهمی نقطه  $S(-1, 1)$  و مختصات یک  
 نقطه آن  $A(1, 2)$  است. معادله سهمی را مشخص کنید.

حل: معادله سهمی در حالت عمومی به صورت  
 $y = ax^2 + bx + c$  است.  
 بنابراین :

$$S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right), S(-1, 1) : \begin{cases} -\frac{b}{2a} = -1 \\ -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = 1 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} b = 2a \\ c - \frac{b^2}{4a} = 1 \end{cases} ; \begin{cases} b^2 = 4a^2 \\ c = \frac{b^2}{4a} + 1 \end{cases} \Rightarrow b = 2a(1), c = a + 1(2)$$

مثال (۵): نمودار سهمی  $y = x^2 - 3x + 2$  را رسم کنید.  
 حل: چون  $a = 1 > 0$  و  $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1 > 0$ ،  
 بنابراین سهمی دارای مینیمم  $S$  است :

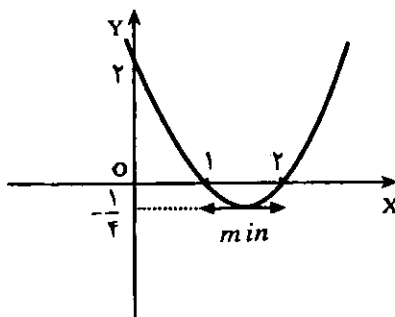
$x = \frac{3}{2}$  (محور تقارن) و  $S\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$  (رأس سهمی)  
 $S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

با در دست داشتن رأس سهمی و محور تقارن آن، به سادگی  
 می توان نمودار سهمی مورد نظر را رسم کرد. برای دقت بیشتر  
 در رسم نمودار، نقاط برخورد سهمی با متوخرهای مختصات را  
 تعیین می کنیم :

نقطه برخورد سهمی با محور  $y$ ها :

$x = 0 : y = (0)^2 - 3(0) + 2 = 2 ; A(0, 2)$   
 $y = 0 : x^2 - 3x + 2 = 0 ; (x-1)(x-2) = 0$   
 $\Rightarrow x = 1 ; x = 2$

نقاط برخورد سهمی با محور  $x$ ها :  $B(1, 0), C(2, 0)$   
 در این جا با معلومات به دست آمده، به سادگی می توان نمودار  
 سهمی را رسم کرد :



بحث و بررسی روی سهمی افقی نیز به طور کامل مطابق سهمی قائم است، که آن را به عنوان تمرین می گذاریم.

مختصات نقطه A در معادله سهمی صدق می کند:

$$A(1,2): 2 = a(1)^2 + b(1) + c; a + b + c = 2 \quad (3)$$

با توجه به رابطه های (۱)، (۲) و (۳):

$$b = 2a, c = a + 1 : a + b + c = a + 2a + a + 1 = 2 ;$$

$$4a + 1 = 2 ; 4a = 1 ; a = \frac{1}{4}$$

پس:

$$a = \frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{5}{4} : y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$$

(معادله مطلوب)

مثال (۸): در سهمی  $y = 2x^2 - k^2x + k$ ، عدد k را چنان تعیین کنید که خط  $x = 2$  محور تقارن آن باشد.

حل: محور تقارن سهمی  $y = ax^2 + bx + c$ ، به صورت زیر است:

$$x = -\frac{b}{2a}$$

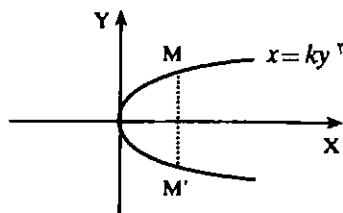
بنابراین، محور تقارن سهمی مورد نظر چنین است:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-k^2}{2(2)} = 2 ; k^2 = 8 ; \boxed{k = 2}$$

$$k = 2 : y = 2x^2 - 8x + 2 \quad (\text{معادله مطلوب})$$

تبصره (۱): به هر سهمی که محور تقارن آن موازی محور yها باشد: «سهمی قائم» و هر سهمی که محور تقارن آن موازی محور xها باشد: «سهمی افقی» گویند.

تبصره (۲): منحنی ها به معادله های  $x = y^2$ ،  $x - \alpha = -(y - \beta)^2$ ،  $x - \alpha = (y - \beta)^2$ ،  $x = ky^2$ ،  $x - \alpha = k(y - \beta)^2$  و در حالت عمومی  $x = ay^2 + by + c$  همگی یک سهمی افقی را مشخص می کنند، که به طور مثال منحنی به معادله  $x = ky^2$ ، چنین است:



تمرین

۱- نمودار هر یک از سهمی های زیر را رسم کنید.

۱)  $y = -x^2$                       ۲)  $y = x^2 - 1$

۳)  $y = -x^2 + 4$                 ۴)  $y = (x-1)^2 - 1$

۵)  $y = -(x+1)^2 + 1$         ۶)  $y = x^2 + x$

۷)  $y = 4(x-1)^2$                 ۸)  $y = 3(x+4)^2 - 2$

۹)  $y = x^2 - 4x + 3$             ۱۰)  $y = -x^2 + x - 1$

۲- رأس یک سهمی نقطه  $S(1, -2)$  و مختصات یک نقطه آن  $A(-2, 7)$  است. سهمی را مشخص کنید.

(جواب:  $y = x^2 - 2x - 1$ )

۳- در سهمی  $y = -x^2 + mx - m^2$ ، عدد m را چنان تعیین کنید که خط  $x = -2$ ، محور تقارن آن باشد.

(جواب:  $m = -4$ )

۴- رأس و محور تقارن سهمی افقی  $x = ay^2 + by + c$  را تعیین کنید و به ازای مقادیر مختلف a و  $\Delta = b^2 - 4ac$ ، نمودار سهمی را رسم کنید.

