



سلسله درس‌هایی از
ریاضیات گسسته
(نظریه اعداد)

✪ سید محمد رضا هاشمی موسوی



مبناها

چهار عمل اصلی در مبناهای متفاوت

اشاره: در شماره قبل در باره‌ی بسط یک عدد در مبناهای مختلف بحث کردیم، اینک چهار عمل اصلی در مبناهای مختلف را در پی می‌آوریم.

۱. جمع اعداد در مبناهای متفاوت

اعمال مربوط به جمع، تفریق، ضرب و تقسیم در مبنای غیر از ۱۰، همانند عملیات در مبنای ۱۰ صورت می‌گیرد؛ با این تفاوت که جای مبنای ۱۰ با اعداد دیگری مثل ۲، ۳، ۴، ... و ۹ عوض خواهد شد.

پیش از توضیح عمل جمع در مبنایی غیر از ۱۰ بهتر است، عمل جمع در مبنای ۱۰ را بررسی کنیم تا قواعد جمع که در مبناهای دیگر انجام می‌گیرد، ملموس‌تر شود؛ زیرا قواعد جمع در مبناهای غیر از ۱۰ نیز، دقیقاً همانند قواعد جمع در مبنای ۱۰ است. ابتدا با یک مثال، عملیات جمع در مبنای ۱۰ را مرور می‌کنیم.

$$\begin{pmatrix} 342 \\ + 176 \\ \hline 518 \end{pmatrix}_{10}$$

در این جا برای جمع در مبنای ۱۰ چه کرده‌ایم؟ چرا

حاصل جمع دو عدد برابر ۵۱۸ شد؟

می‌خواهیم عدد ۱۷۶ را به عدد ۳۴۲ بیفزاییم. برای این منظور، یکان عدد ۱۷۶ را با یکان عدد ۳۴۲، دهگان ۱۷۶ را با دهگان ۳۴۲ و به همین ترتیب، صدگان ۱۷۶ را با صدگان ۳۴۲ جمع می‌کنیم؛ چون مبنای ۱۰ مورد نظر است. بنابراین، در صورتی که مجموع هر دو عدد، از عدد ۱۰ تجاوز کرد (۱۱ = ۷ + ۴)، باید ۱۰ واحد از عدد فوق را حذف و به صورت ۱ واحد، به ستون بعدی (در این جا صدگان) اضافه کنیم.

در ادامه، پس از جمع کردن صدگان‌های دو عدد، باید ۱ واحدی را که از جمع ستون دهگان دو عدد حاصل شده است نیز به آن اضافه کنیم. واضح است که مجموع دو عدد ۳۴۲ و ۱۷۶ برابر ۵۱۸ در مبنای ۱۰ خواهد شد.

اکنون اگر عملیات جمع، تفریق، ضرب و تقسیم، در



مبنای m صورت بگیرد، همیشه به جای هر m در یک ستون، یک واحد به ستون سمت چپ آن می افزاییم.

مثال ۱. حاصل جمع زیر را بیابید:

$$\begin{pmatrix} 234 \\ +347 \\ \dots \end{pmatrix}_8$$

حل: چون مبنای عمل برابر ۸ است، کافی است که هر جا حاصل جمع ستونی از ۸ تجاوز کرد، به اندازه ۸ واحد (مبنا) از حاصل جمع ستون مورد نظر کم کنیم و به صورت ۱ واحد به ستون بعدی (سمت چپ) اضافه کنیم. کار جمع کردن ستون ها را به ترتیب از سمت راست به چپ انجام می دهیم.

(رقم یکان حاصل جمع) $\boxed{3} = 11 - 8$ و $7 + 4 = 11$ (ستون اول)

(به ستون بعد، یک واحد اضافه شود)

(رقم دهگان حاصل جمع) $\boxed{6} = 8 - 8$ و $7 + 1 = 8$ و $4 + 3 = 7$ (ستون دوم)

(به ستون بعد ۱ واحد اضافه شود)

(رقم صدگان حاصل جمع) $\boxed{6} = 5 + 1$ و $3 + 2 = 5$ (ستون سوم)

بنابراین جواب نهایی چنین است:

$$\begin{pmatrix} 234 \\ +347 \\ \hline 603 \end{pmatrix}_8$$

مثال ۲. حاصل جمع زیر را بیابید:

$$\begin{pmatrix} 202 \\ +341 \\ 513 \\ \hline 434 \end{pmatrix}_6$$

حل: عملیات جمع در مبنای ۶ را به صورت زیر انجام

می دهیم:

(رقم یکان) $\boxed{4} = 10 - 6$ و $4 + 3 + 1 + 2 = 10$ (ستون اول)

(به ستون سمت چپ ۱ واحد اضافه شود)

(رقم دهگان) $\boxed{3} = 9 - 6$ و $8 + 1 = 9$ و $3 + 1 + 4 + 0 = 8$ (ستون دوم)

(به ستون سمت چپ ۱ واحد اضافه شود)

(رقم صدگان) $\boxed{3} = 15 - 12$ و $15 = 10 + 5$ و $14 + 1 = 15$ و $4 + 5 + 3 + 2 = 14$ (ستون سوم)

(به ستون سمت چپ ۲ واحد اضافه شود)

توجه: در واقع ستون چهارم ستونی است که همی ارقام آن صفر هستند.

پس حاصل جمع در مبنای ۶ برابر $(2334)_6$ است:

$$\begin{pmatrix} 202 \\ +341 \\ 513 \\ \hline 434 \end{pmatrix}_6$$

$(202)_6 + (341)_6 + (513)_6 + (434)_6 = (2334)_6$

مثال ۳. حاصل جمع زیر را بیابید:

$$\begin{pmatrix} 7831 \\ +4032 \\ 5178 \\ 21018 \\ \hline 18340 \end{pmatrix}_9$$

حل: عملیات در مبنای ۹ را به صورت زیر انجام

می دهیم:

(+۲) (رقم یکان) $\boxed{1} = 19 - 18$ و $0 + 8 + 8 + 2 + 1 = 19$ (ستون اول)

(+۲) (رقم دهگان) $\boxed{2} = 20 - 18$ و $18 + 2 = 20$ و $4 + 1 + 7 + 3 + 3 = 18$ (ستون دوم)

(+۱) (رقم صدگان) $\boxed{5} = 14 - 9$ و $14 = 9 + 5$ و $12 + 2 = 14$ و $3 + 0 + 1 + 0 + 8 = 12$ (ستون سوم)

(+۲) (رقم هزارگان) $\boxed{8} = 18 - 10$ و $26 = 18 + 8$ و $25 + 1 = 26$ و $8 + 1 + 5 + 4 + 7 = 25$ (ستون چهارم)

(رقم ده هزارگان) $\boxed{5} = 3 + 2$ و $1 + 2 + 0 + 0 + 0 = 3$ (ستون پنجم)

پس حاصل جمع در مبنای ۹ برابر $(58521)_9$ است.

توجه داشته باشید که در واقع در عملیات جمع در هر



$$(5)_4 = (5)_1$$

بنابراین، در ستون پنجم خود ۵ (رقم یکان ۵) نوشته می شود.

پس، حاصل جمع نهایی به صورت زیر است:

$$(58521)_4 = (18340)_4 + (21018)_4 + (5178)_4 + (4032)_4 + (7831)_4$$

نکته ی ۱. واضح است که وقتی دو یا چند عدد را جمع می کنیم، مبنای آن ها باید برابر باشند. بنابراین اگر هدف جمع کردن چند عدد در مبنای متفاوت باشد، ابتدا باید همه ی آن ها را در یک مبنای بنویسیم و سپس آن ها را با هم جمع کنیم.

نکته ی ۲. اشاره شد که اگر در یک جمع، مجموع ارقام یک ستون در یک پایه، عدد سه و یا چند رقمی باشد، فقط رقم یکان آن را در ستون اول حاصل جمع می نویسیم و بقیه ی ارقام آن را به ستون سمت چپ اضافه می کنیم. برای مثال، اگر مبنای عددنویسی در یک جمع ۵ و مجموع ارقام ستون اول ۳۴۴ باشد، رقم ۴ را در ستون اول حاصل جمع می نویسیم و ۳۴ را به ستون دوم اضافه می کنیم.

مثال ۴. حاصل جمع $(12)_5 + (233)_4$ را بیابید.

حل: برای یافتن حاصل این جمع، چندین روش را می توان به کار برد.

روش اول: هر دو عدد را در مبنای ۱۰ می نویسیم و سپس جمع می کنیم:

$$(233)_4 = 3 + 3 \times 4 + 2 \times 4^2 = (47)_{10}$$

$$(12)_5 = 2 + 1 \times 5 = (7)_{10}$$

$$(233)_4 + (12)_5 = (47)_{10} + (7)_{10} = (54)_{10}$$

روش دوم: عدد $(233)_4$ را در مبنای ۵ می نویسیم و

سپس با عدد $(12)_5$ جمع می کنیم:

$$(233)_4 = 3 + 3 \times 4 + 2 \times 4^2 = (47)_{10}$$

$$(47)_{10} = (142)_5 = (233)_4$$

$$(233)_4 + (12)_5 = (142)_5 + (12)_5 = (204)_5$$

توجه: برای حل مثال ۴ می توان $(12)_5$ را در مبنای ۴

نوشت، سپس آن را با $(233)_4$ جمع کرد.

مبنای مجموع اعداد هر ستون در آن مبنای (و در این جا در مبنای ۹) نوشته می شود. سپس رقم یکان عدد حاصل در ستون خود نوشته و ارقام بعدی به اعداد ستون بعدی در سمت چپ خود افزوده می شود. برای مثال در ستون اول حاصل شد:

$$0 + 8 + 8 + 2 + 1 = 19$$

اگر ۱۹ را در مبنای ۹ بنویسیم، خواهیم داشت:

$$(21)_9 = (19)_9$$

در این عدد یعنی ۲۱، رقم یکان یعنی ۱ در ستون حاصل جمع نوشته شده و رقم دوم آن یعنی ۲، به ستون بعدی (ستون سمت چپ) افزوده شده است.

در ستون دوم به دست آمد:

$$2 + 4 + 1 + 7 + 3 + 3 = 20$$

اگر ۲۰ را در مبنای ۹ بنویسیم، خواهیم داشت:

$$(22)_9 = (20)_9$$

در عدد ۲۲، رقم یکان یعنی ۲ به ستون دوم مربوط است و رقم دوم آن یعنی ۲ به ستون بعدی (ستون سمت چپ) افزوده می شود.

در ستون سوم به دست آمد:

$$(2) + 3 + 0 + 1 + 0 + 8 = 14$$

اگر ۱۴ را در مبنای ۹ بنویسیم، خواهیم داشت:

$$(15)_9 = (14)_9$$

در عدد ۱۵، رقم یکان یعنی ۵ به ستون سوم مربوط است و رقم دوم آن یعنی ۱ به ستون بعدی (ستون سمت چپ) افزوده می شود.

در ستون چهارم به دست آمد:

$$(1) + 8 + 1 + 5 + 4 + 7 = 26$$

اگر ۲۶ را در مبنای ۹ بنویسیم، خواهیم داشت:

$$(28)_9 = (26)_9$$

در عدد ۲۸، رقم یکان یعنی ۸ به ستون چهارم مربوط است و رقم دوم آن یعنی ۲ به ستون بعدی (ستون سمت چپ) افزوده می شود.

در نهایت برای ستون پنجم نوشته شد:

$$(2) + 1 + 2 + 0 + 0 = 5$$

چون عدد ۵ در مبنای ۹ و ۱۰ برابر است:



۲. تفریق اعداد در مبنای های متفاوت

تفاضل اعداد در مبنای های متفاوت هم مانند جمع آن ها صورت می گیرد. فقط باید به جای عمل جمع، عمل تفریق را انجام دهیم (در صورتی که پایه ها برابر نباشند، ابتدا باید پایه ها را یکسان کرد).

مثال ۱. تفریق در مبنای ۸ را محاسبه کنید:

$$(۷۶۵)_۸ - (۵۶۴)_۸ = ?$$

حل: این دو عدد را در مبنای ۸ زیر یکدیگر می نویسیم:

$$\begin{array}{r} (۷۶۵) \\ - (۵۶۴) \\ \hline (۲۰۱)_۸ \end{array}$$

بنابراین:

$$(۷۶۵)_۸ - (۵۶۴)_۸ = (۲۰۱)_۸$$

مثال ۲. تفریق در مبنای ۷ را محاسبه کنید:

$$(۳۴۵)_۷ - (۲۵۶)_۷ = ?$$

حل: می بینیم که رقم ۶ را نمی توان از ۵ کم کرد.

$$\begin{array}{r} (۳۴۵) \\ - (۲۵۶) \\ \hline (\dots)_۷ \end{array}$$

بنابراین در عدد ۳۴۵ از رقم سمت چپ ۵ (در بالای ۶ که هر واحد آن ۷ واحد یکان است) ۱ واحد کم می کنیم و در عوض ۷ واحد به رقم یکان ۳۴۵ یعنی ۵ می افزایم. پس:

$$\begin{array}{r} (۳۳ \overset{(۷)}{۵}) \\ - (۲۵ \overset{(۷)}{۶}) \\ \hline (\dots)_۷ \end{array}$$

در ستون دوم باز رقم ۵ را نمی توان از رقم ۳ (در بالای ۶) کم کرد. بنابراین در ستون سوم، از رقم ۳ در عدد ۳۳۵، ۱ واحد کم می کنیم و در عوض ۷ واحد به رقم ۳ در سمت راست آن می افزایم. پس:

$$\begin{array}{r} (۲ \overset{(۷)}{۳} \overset{(۷)}{۵}) \\ - (۲۵ \overset{(۷)}{۶}) \\ \hline (۰ \overset{(۷)}{۵} \overset{(۷)}{۶})_۷ \end{array}$$

حال می توان ارقام پائین را از ارقام نظیر خود در بالا کم کرد. بنابراین:

$$(۳۴۵)_۷ - (۲۵۶)_۷ = (۵۶)_۷$$

امتحان عملیات در مبنای ۱۰:

$$-(۲۵۶)_۷ = -(۵+۴ \times ۷+۳ \times ۷^۲)_{۱۰} - (۶+۵ \times ۷+۲ \times ۷^۲)_{۱۰}$$

$$(۳۴۵)_۷$$

$$= (۱۸۰)_{۱۰} - (۱۳۹)_{۱۰} = (۴۱)_{۱۰}$$

$$(۴۱)_{۱۰} = (۵۶)_۷$$

۳. ضرب اعداد در مبنای های متفاوت

ضرب اعداد در هر مبنای نیز مانند ضرب دو عدد در مبنای ۱۰ صورت می گیرد، با این تفاوت که باید به جای مبنای ۱۰، در مبنای دیگر کار کنیم (در صورتی که مبنای برابر نباشند، ابتدا باید مبنای را برابر کنیم).

مثال ۱. ضرب این دو عدد در مبنای ۴ را محاسبه کنید:

$$(۲۳۳)_۴ \times (۲)_۴ = ?$$

حل: دو عدد را در مبنای ۴ زیر هم می نویسیم:

$$\begin{array}{r} (۲۳۳ \times) \\ \times (۲) \\ \hline (\dots)_۴ \end{array}$$

در ستون اول داریم: $(۶)_{۱۰} = ۲ \times ۳ = ۶$. حال اگر ۶ را در مبنای ۴ بنویسیم، خواهیم داشت:

$$(۶)_{۱۰} = (۱۲)_۴$$

از عدد $(۱۲)_۴$ رقم ۲ را در ستون اول می نویسیم و رقم ۱ را به حاصل ضرب (۲×۳) در ستون دوم اضافه می کنیم. یعنی در ستون دوم حاصل ضرب، $۷ = ۲ \times ۳ + ۱$ را باید در مبنای ۴ بنویسیم:

$$(۷)_{۱۰} = (۱۳)_۴$$

رقم ۳ عدد $(۱۳)_۴$ را در ستون دوم می نویسیم و رقم ۱ را به حاصل ضرب (۲×۲) در ستون سوم اضافه می کنیم:

$$۲ \times ۲ + ۱ = ۵$$

پس رقم سوم حاصل ضرب ۵ است. در نتیجه



حل: از تعریف تقسیم نتیجه می شود:

$$(15)_9 \times (12)_7 = (24)_x$$

هر یک از عددها را در مبنای ۱۰ می نویسیم:

$$(15)_9 = (5+1 \times 9)_{10} = (14)_{10}$$

$$(12)_7 = (2+1 \times 7)_{10} = (9)_{10}$$

بنابراین:

$$(24)_x = (15)_9 \times (12)_7 = (14)_{10} \times (9)_{10} = (126)_{10}$$

پس:

$$(24)_x = (4+2 \times x)_{10} = (126)_{10} \quad ; \quad 4+2x=126$$

$$2x=122 \quad ; \quad x = \frac{122}{2} = 61 \quad ; \quad \boxed{x=61}$$

مثال ۳. از برابری $(15)_{2x} = (31)_x$ مقدار x را بیابید.

حل: ابتدا هر یک از اعداد را در مبنای ۱۰ می نویسیم:

$$(31)_x = (1+3x)_{10} = 3x+1$$

$$(15)_{2x} = (5+1 \times (2x))_{10} = 2x+5$$

$$3x+1=2x+5 \quad ; \quad \boxed{x=4}$$

مثال ۴. از برابری $(15)_{2x+2} = (31)_{2x}$ مقدار x را بیابید.

حل: $(31)_{2x} = (1+3(2x))_{10} = 6x+1$

$$(15)_{2x+2} = (5+1(2x+2))_{10} = 2x+7$$

$$6x+1=2x+7 \quad ; \quad 4x=6 \quad ; \quad x = \frac{3}{2} = 1.5$$

با جایگزین کردن مقدار x خواهیم داشت:

$$(31)_{2x} = (15)_{2x+2}$$

مقدار $x=1.5$ مورد قبول نیست؛ زیرا در $(31)_{2x}$ رقم ۳ و

در $(15)_{2x+2}$ نیز رقم ۵ موجود است. بنابراین مسأله جواب ندارد.

تمرین: جاهای خالی را با عددهای مناسب پر کنید.

$$1) (345)_7 \times (234)_7 = (\dots)_7$$

$$2) (123)_7 + (312)_7 + (213)_7 + (1234)_7 = (\dots)_7$$

$$3) (1010101)_7 + (11011011)_7 = (\dots)_7 = (\dots)_7$$

$$4) (654)_8 - (543)_8 = (\dots)_8 = (\dots)_8 = (\dots)_8$$

$$5) (234)_8 \times (120201)_7 = (\dots)_8 = (\dots)_7 = (\dots)_7$$

$$6) (84)_9 : (4)_9 = (\dots)_9 = (\dots)_9 = (\dots)_9 = (\dots)_9$$

۷. از برابری $(34)_{x-1} = (14)_{x+1}$ مقدار x را بیابید.

حاصل ضرب نهایی را می توان نوشت:

$$(233)_4 \times (2)_4 = (532)_4$$

مثال ۲. ضرب این دو عدد در مبنای متفاوت را

محاسبه کنید:

$$(134)_8 \times (1011)_7 = ?$$

حل: ابتدا پایه ها را یکسان می کنیم. هر دو عدد را در

مبنای ۱۰ می نویسیم:

$$(134)_8 = (4+3 \times 8+1 \times 8^2)_{10} = (44)_{10}$$

$$(1011)_7 = (1+1 \times 7+0 \times 7^2+1 \times 7^3)_{10} = (11)_{10}$$

$$(134)_8 \times (1011)_7 = (44)_{10} \times (11)_{10} = 44 \times 11 = (484)_{10}$$

تقسیم اعداد در مبنای متفاوت

برای تقسیم دو عدد بر یکدیگر، ابتدا باید مبنای آنها را

یکسان کرد. فرض کنیم تقسیم زیر مورد نظر باشد:

$$(74)_8 : (6)_8$$

برای محاسبه ی این تقسیم، بهترین و ساده ترین روش

این است که هر دو عدد را در مبنای ۱۰ بنویسیم و سپس

عمل تقسیم را انجام دهیم و در آخر، خارج قسمت را به هر

مبنای دلخواهی که مورد نظر است، تبدیل کنیم:

$$(74)_8 = (4+7 \times 8)_{10} = (60)_{10} \quad \text{و} \quad (6)_8 = (6)_{10}$$

$$(74)_8 : (6)_8 = (60)_{10} : (6)_{10} = 60 : 6 = (10)_{10}$$

$$(10)_{10} = (12)_8$$

در این جا می توان حاصل تقسیم را نوشت:

$$(74)_8 : (6)_8 = (12)_8$$

مثال ۱. حاصل تقسیم $(26)_7 : (125)_8$ را در مبنای ۶

بنویسید.

حل: ابتدا هر دو عدد را در مبنای ۱۰ می نویسیم:

$$(125)_8 = (5+2 \times 8+1 \times 8^2)_{10} = (40)_{10}$$

$$(26)_7 = (6+2 \times 7)_{10} = (20)_{10}$$

$$(125)_8 : (26)_7 = (40)_{10} : (20)_{10} = 40 : 20 = (2)_{10} = (2)_6$$

$$(125)_8 : (26)_7 = (2)_6$$

مثال ۲. از برابری داده شده، مقدار x را پیدا کنید:

$$(24)_x : (15)_9 = (12)_7$$