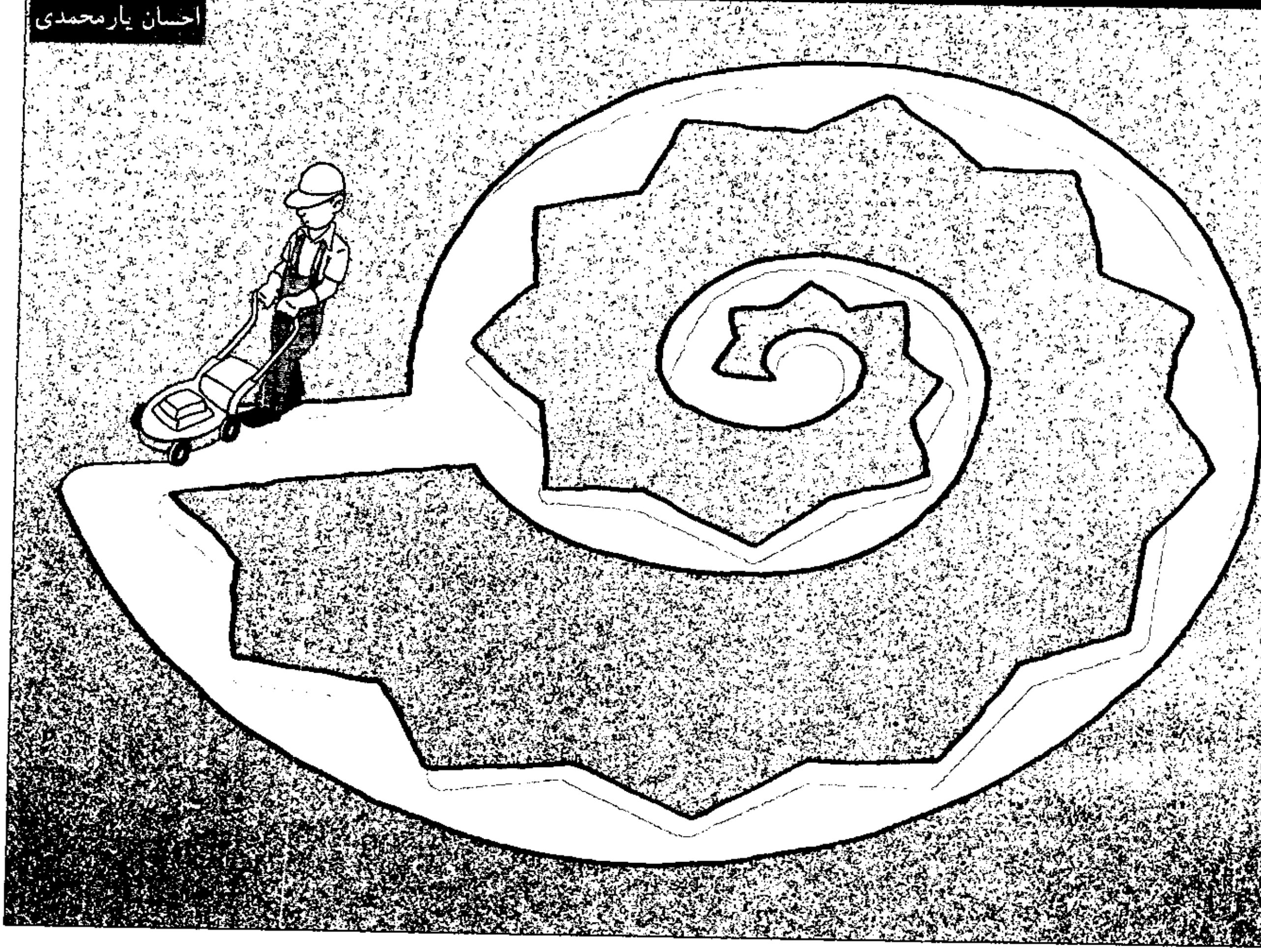
سری هندسی مثلثاتی

احسان یارمحمدی



روزی با عده‌ای از دانشجویان و دانش‌پژوهان ریاضی بحثی پیرامون وضعیت همگرایی و واگرایی سری‌هایی که جمله‌ی عمومی آن‌ها شامل عبارت‌های مثلثاتی مانند $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+\cos(n)}{n^2}$، $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\sin(n)+\frac{1}{2}}{n(\ln(n))^2}$ و ... است داشتیم که در این بین من سری‌هایی به فرم $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})\cos(\frac{n\pi}{2})}{4^n}$، $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{4})\cos(\frac{n\pi}{4})}{2^n}$، $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos(\frac{n\pi}{4})}{5^n}$ و ... را مطرح کردم و نظر ایشان را جویا شدم. نظرات متفاوت و گوناگونی ارائه شد، اما جالب این بود که هیچ نظری راجع به این‌که می‌توان مقدار این سری‌ها را محاسبه کرد، بیان نشد. این موضوع باعث شد تا به نگارش این مقاله و به بیان بهتر، معرفی گروه متفاوتی از سری‌های هندسی، با آن‌چه از سری‌های هندسی متعارف وجود دارد، بپردازم.

نخست به ارائه‌ی تعریف و شرایط همگرایی و واگرایی سری هندسی و سپس به معرفی چندین دنباله‌ی مثلثاتی می‌پردازم که هر یک از آن‌ها کمک ارزنده و شایان توجهی را در درک بهتر این مقاله ایفا می‌کنند.

اگر $a \neq 0$، هر سری به فرم زیر:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$$

یک سری هندسی با جمله‌ی اول a و قدر نسبت r می‌نامیم و مجموع جزئی آن را به صورت زیر بیان می‌کنیم.

$$a+ar+ar^2+ar^3+\dots+ar^{n-1}$$
$$=a(1+r+r^2+r^3+\dots+r^{n-1})$$
$$=\begin{cases} a\times\frac{1-r^n}{1-r}, & r\neq 1\\ a(n+1), & r=1\end{cases}$$

البته برای سری هندسی $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n$ برحسب مقادیر مختلف r می‌توان درمورد همگرایی یا واگرایی سری مزبور به شرح زیر بحث کرد:

۱. اگر $-1<r<1$ آنگاه سری $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n$ همگراست و مقدار آن هنگامی که $n\to+\infty$ برابر با $\frac{a}{1-r}$ است.

۲. اگر $r>1$ آن‌گاه سری $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n$ واگراست. چون S_n به این علت که r^n آن هنگامی که $n\to+\infty$ برابر است با ∞ است، واگرا خواهد بود.

۳. اگر $r=1$ آن‌گاه سری $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n$ واگراست، چون $S_n=a(n+1)$ آن واگراست.

۴. اگر $r=-1$ آنگاه سری $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n$ واگراست، چون $S_n=\frac{a(1-(-1)^n)}{2}$ آن واگراست.

۵. اگر $r<1$ آنگاه سری $\sum_{n=0}^{+\infty} ar^n$ واگراست، چون S_n آن به این علت واگراست که r^n آن هنگامی که $n\to+\infty$ برابر با $\pm\infty$ است.

مثال ۱. کدام یک از گزینه‌های زیر درباره‌ی سری $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n+4^n+8^n}{16^n}$ صحیح است؟

۱) همگرا به $-\frac{41}{42}$ ۲) همگرا به $\frac{41}{42}$
۳) همگرا به صفر ۴) واگرا

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. سری مفروض شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+4^n+8^n}{16^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{16}\right)^n+\left(\frac{4}{16}\right)^n+\left(\frac{8}{16}\right)^n\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{7}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{41}{42}$$

مثال ۲. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}$ صحیح است؟

۱) همگرا به ۲ ۲) همگرا به ۱
۳) همگرا به صفر ۴) واگرا

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. سری مفروض شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون:

$$\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}=\frac{2^n}{2^{n+1}n(n+1)}+\frac{n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n}$$

بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n+n^2+n}{2^{n+1}n(n+1)}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times 1=1$$

در ادامه، تعدادی از دنباله‌های مثلثاتی را که کاربردی مؤثر در این مقاله دارند، ارائه می‌کنیم.

$$\{\sin(n\pi)\}_{n=1}^{+\infty}=\{\underbrace{0,0,0,0,0,0,0,0,\dots}_{n=1,2,3,4,5,6,7,8}\}$$
$$\{\cos(n\pi)\}_{n=1}^{+\infty}=\{(-1)^n\}_{n=1}^{+\infty}$$
$$=\{\underbrace{-1,1,-1,1,-1,1,-1,1,\dots}_{n=1,2,3,4,5,6,7,8}\}$$
$$\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty}=\{\underbrace{1,0,-1,0,}_{n=1,2,3,4}\underbrace{1,0,-1,0,\dots}_{n=5,6,7,8}\}$$
$$\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty}=\{\underbrace{0,-1,0,1,}_{n=1,2,3,4}\underbrace{0,-1,0,1,\dots}_{n=5,6,7,8}\}$$
$$\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty}=$$
$$\left\{\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2},1,\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2},-1,-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\dots}_{n=1,2,3,4,5,6,7,8}\right\}$$

$$\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} =$$

$$\left\{\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1}_{n=1,2,3,4,5,6,7,8},\dots\right\}$$

اکنون با بهره‌گیری از عمل جبری ضرب می‌توانیم دنباله‌های مثلثاتی جدیدی را از دنباله‌های مثلثاتی بالا به دست آوریم. بنابراین داریم:

$$\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} = \{0,0,0,0,0,0,0,\dots\}$$

$$\left\{\cos(n\pi)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} = \{-1,0,1,0,-1,0,1,0,\dots\}$$

$$\left\{\cos(n\pi)\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} = \{0,-1,0,1,0,-1,0,1,\dots\}$$

$$\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} = \left\{\frac{1}{2},0,\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2},0,\frac{-1}{2},0,\dots\right\}$$

$$\left\{\cos(n\pi)\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} =$$

$$\left\{-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\dots\right\}$$

$$\left\{\cos(n\pi)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} =$$

$$\left\{-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0,\dots\right\}$$

$$\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} = \left\{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\dots\right\}$$

$$\left\{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} = \{0,0,0,0,0,0,0,\dots\}$$

در این قسمت به ارائه‌ی مثال‌هایی درباره‌ی محاسبه‌ی مقدار سری‌های هندسی می‌پردازیم که جمله‌ی عمومی آن‌ها دربرگیرنده‌ی دنباله‌های مثلثاتی است.

مثال ۳. کدام گزینه در مورد سری $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{4^n}$ صحیح است؟

۱) همگرا به $-\frac{4}{15}$ ۲) همگرا به $-\frac{4}{17}$

۳) همگرا به $\frac{1}{3}$ ۴) واگرا

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. سری مفروض شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون می‌دانیم:

$$\left\{(-1)^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} = \left\{\cos(n\pi)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty}$$

$$= \{-1,0,1,0,-1,0,1,0,\dots\}$$

بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{4^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{4^n}$$

$$\left(\frac{-1}{4^1}\right)+\left(\frac{0}{4^2}\right)+\left(\frac{1}{4^3}\right)+\left(\frac{0}{4^4}\right)+\left(\frac{-1}{4^5}\right)+\left(\frac{0}{4^6}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{4^7}\right)+\left(\frac{0}{4^8}\right)+\dots$$

$$=\left(\frac{-1}{4^1}\right)+\left(\frac{1}{4^3}\right)+\left(\frac{-1}{4^5}\right)+\left(\frac{1}{4^7}\right)+\dots$$

$$=\frac{\frac{-1}{4}}{1-\left(-\frac{1}{4^2}\right)} = -\frac{4}{17}$$

مثال ۴. کدام گزینه در مورد سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{\cos(n\pi)\times 5^n}$ صحیح است؟

۱) همگرا به $-\frac{5}{48}$ ۲) همگرا به $-\frac{5}{52}$

۳) همگرا به $\frac{5}{49}$ ۴) واگرا

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. سری مزبور شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون می‌دانیم:

$$\left\{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right\}_{n=1}^{+\infty} = \left\{\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0,\dots\right\}$$

بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{\cos(n\pi)\times 5^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{(-1)^n\times 5^n}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{(-5)^n}$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{2}}{(-5)^1}\right)+\left(\frac{0}{(-5)^2}\right)+\left(\frac{-\frac{1}{2}}{(-5)^3}\right)+\left(\frac{0}{(-5)^4}\right)$$

$$+\left(\frac{\frac{1}{2}}{(-5)^5}\right)+\left(\frac{0}{(-5)^6}\right)+\left(\frac{-\frac{1}{2}}{(-5)^7}\right)+\left(\frac{0}{(-5)^8}\right)+\dots$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{2}}{(-5)^1}\right)+\left(\frac{-\frac{1}{2}}{(-5)^3}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}}{(-5)^5}\right)+\left(\frac{-\frac{1}{2}}{(-5)^7}\right)+\dots$$

$$=\frac{\frac{\frac{1}{2}}{(-5)^1}}{1-\left(-\frac{1}{(-5)^2}\right)}=-\frac{5}{52}$$

مثال ۵. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{4})\cos(\frac{n\pi}{4})\sin(\frac{n\pi}{2})}{(-1)^n\times 2^n\times 4^n}$ صحیح است؟

۱) همگرا به $-\frac{4}{65}$ ۲) همگرا به $-\frac{8}{127}$

۳) همگرا به $-\frac{4}{63}$ ۴) واگرا

پاسخ: گزینه‌ی ۳ صحیح است. سری بالا شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون می‌دانیم:

$$\left\{\sin(\frac{n\pi}{4})\cos(\frac{n\pi}{4})\sin(\frac{n\pi}{2})\right\}_{n=1}^{+\infty}=\left\{\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\dots\right\}$$

بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{4})\cos(\frac{n\pi}{4})\sin(\frac{n\pi}{2})}{(-1)^n\times 2^n\times 4^n}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{4})\cos(\frac{n\pi}{4})\sin(\frac{n\pi}{2})}{(-8)^n}$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{2}}{(-8)^1}\right)+\left(\frac{0}{(-8)^2}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}}{(-8)^3}\right)+\left(\frac{0}{(-8)^4}\right)+$$

$$\left(\frac{\frac{1}{2}}{(-8)^5}\right)+\left(\frac{0}{(-8)^6}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}}{(-8)^7}\right)+\left(\frac{0}{(-8)^8}\right)+\dots$$

$$=\left(\frac{\frac{1}{2}}{(-8)^1}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}}{(-8)^3}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}}{(-8)^5}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}}{(-8)^7}\right)+\dots$$

$$=\frac{\frac{\frac{1}{2}}{(-8)^1}}{1-\left(\frac{1}{(-8)^2}\right)}=-\frac{4}{63}$$

مثال ۶. کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد سری $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})+\cos(\frac{n\pi}{2})}{2^n\times 3^n}$ صحیح است؟

۱) همگرا به $-\frac{1}{37}$ ۲) همگرا به $\frac{5}{37}$

۳) همگرا به $\frac{6}{37}$ ۴) واگرا

پاسخ: گزینه‌ی ۲ صحیح است. سری بالا شرط لازم همگرایی را دارد (چرا؟) و چون می‌دانیم:

$$\left\{\sin(\frac{n\pi}{2})\right\}_{n=1}^{+\infty}=\{1,0,-1,0,1,0,-1,0,\dots\}$$

$$\left\{\cos(\frac{n\pi}{2})\right\}_{n=1}^{+\infty}=\{0,-1,0,1,0,-1,0,1,\dots\}$$

بنابراین:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})+\cos(\frac{n\pi}{2})}{2^n\times 3^n}$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})}{6^n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(\frac{n\pi}{2})}{6^n}$$

$$=\left[\left(\frac{1}{6^1}\right)+\left(\frac{0}{6^2}\right)+\left(\frac{-1}{6^3}\right)+\left(\frac{0}{6^4}\right)+\dots\right]$$

$$+\left[\left(\frac{0}{6^1}\right)+\left(\frac{-1}{6^2}\right)+\left(\frac{0}{6^3}\right)+\left(\frac{1}{6^4}\right)+\dots\right]$$

$$=\left[\left(\frac{1}{6^1}\right)+\left(\frac{-1}{6^3}\right)+\dots\right]+\left[\left(\frac{-1}{6^2}\right)+\left(\frac{1}{6^4}\right)+\dots\right]$$

$$\frac{\frac{1}{6}}{1-(-\frac{1}{6^2})}+\frac{\frac{-1}{6^2}}{1-(-\frac{1}{6^2})}=\frac{6}{37}-\frac{1}{37}=\frac{5}{37}$$

تمرین

۱. در این مورد که با بهره‌گیری از اعمال جبری جمع، تفریق و تقسیم برای دنباله‌های مثلثاتی ارائه شده در متن، نمونه‌هایی را تعیین کنید که جملات آن‌ها مشابه با آنچه به دست آورده‌ایم، از نظم و ترتیب مشخصی پیروی کنند، تحقیق و بررسی کنید.

۲. در این مورد تحقیق و بررسی کنید که دنباله‌های مثلثاتی دیگری مطابق با آن‌چه در متن ارائه شده‌اند، تعیین کنید که به واسطه‌ی آن‌ها بتوان با استفاده از عمل جبری ضرب دنباله‌های مثلثاتی دیگری به وجود آورد که جملات آن‌ها مشابه با آن‌چه در متن به دست آورده‌ایم، از نظم و ترتیب مشخصی پیروی کنند.

۳. همگرایی یا واگرایی سری زیر را با محاسبه‌ی حد مجموع جزئی آن تعیین کنید.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{3}+4^{n}-n}{n4^{n-1}(n^{2}-1)}$$

۴. همگرایی یا واگرایی سری زیر را با محاسبه‌ی حد مجموع جزئی آن به دست آورید.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n}\sin(\frac{n\pi}{2})-(-1)^{n}\cos(\frac{n\pi}{2})}{3^{n}\times 4^{n}}$$

۵. همگرایی یا واگرایی سری زیر را با محاسبه‌ی حد مجموع جزئی آن مشخص کنید.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{\sin(\frac{n\pi}{4})\cos(\frac{n\pi}{4})}{2^{n}\times 4^{n}}$$

۶. همگرایی یا واگرایی سری زیر را با محاسبه‌ی حد مجموع جزئی آن تعیین کنید.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\cos(n\pi)\frac{2^{n}+3^{n}+4^{n}}{12^{n}}$$

۷. همگرایی یا واگرایی سری زیر را با محاسبه‌ی حد مجموع جزئی آن بررسی کنید.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{\sin(\frac{n\pi}{2})\cos(\frac{n\pi}{4})\sin(\frac{n\pi}{4})}{5^{n}\times 6^{n}}$$

منابع

۱. حساب دیفرانسیل و انتگرال دوره‌ی پیش‌دانشگاهی رشته‌ی علوم ریاضی، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۹.

۲. حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه‌ی تحلیلی، جورج توماس و راس فینی، ترجمه‌ی مهدی بهزاد، سیامک کاظمی و علی کافی، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۵.