قانون قوی اعداد کوچک*

ریچارد گای*
ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل

این مقاله در دو قسمت است. قسمت اول آن شامل عملی است که انجام‌دادنش باشماست. در این قسمت، ۳۵ مثال از الگوهایی را نشان می‌دهم که بانگاه‌کردن به‌چندین مقدار کوچك n، در مسائل مختلفی که‌جوابهایشان به n بستگی‌دارد،درنظرما جلوه‌گر می‌شوند. درهرمورد باید به‌این‌سؤال پاسخ دهید: آیا تصور می‌کنید الگو به‌ازای همهٔ nها ادامه می‌یابد، یا فکر می‌کنیدکه این امر توهمی است‌ناشی‌ازکوچك‌بودن‌مقادیر nی‌که درمثال به‌کار گرفته‌شده‌اند؟

هشدار: به‌مثالهایی از هردونوع برمی‌خورید؛ همهٔ آنها زادهٔ وهم وخیال نیستند!

درقسمت دوم جوابها را، تا آنجاکه می‌دانم، همراه با ذکر مراجع، می‌دهم.

بد نیست برگهٔ نمراتی برای خود داشته باشید: درمورد هر مثال، نظرخود را دراین‌باره که آیا ادامه‌یافتن الگوی مشاهده‌شده معلوم است، ادامه‌نیافتن آن معلوم است، یا اصلا چیزی دربارهٔ آن نمی‌دانیم، درآن واردکنید.

نخستین قسمت مقاله هیچگونه اطلاعاتی در برنـدارد، بلکه مقدار زیادی بی‌اطلاعی‌را شامل می‌شود. این‌قسمت شامل‌یك‌قضیه است:

با نظرکردن نمی‌توان چیزی گفت

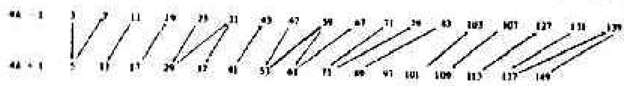
این قضیه کاربردگسترده‌ای دربرون و درون ریاضیات دارد و آن را از راه‌ترساندن شما [از عـواقب نپذیرفتنش] ثابت می‌کنیم.

و حال چندمثال مشهور برای شروع بحث.

مثال ۱. اعداد $3 = 2^{2^0}+1$، $5 = 2^{2^1}+1$، $17 = 2^{2^2}+1$، $257 = 2^{2^3}+1$، $65537 = 2^{2^4}+1$، اول‌اند.

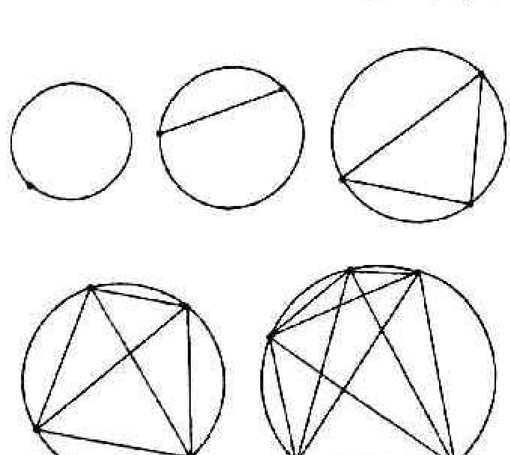
مثال ۲. اعداد $2^n - 1$ نمی‌توانند اول باشند مگر اینکه n اول باشد، اما $3 = 2^2-1$، $7 = 2^3-1$، $31 = 2^5-1$، **$127 = 2^7-1$، اول‌اند.**

مثال ۳. صرف‌نظر از ۲،که غریبترین‌عدد اول است،کلیهٔ‌عددهای **اول یا به‌شکل $4k-1$اند یا به‌شکل $4k+1$. تعدادعددهای اول به‌شکل $4k-1$ درهر بازهٔ $[1, n]$ دست‌کم به‌قدر عددهای اول به‌صورت $4k+1$ است ($4k-1$ «در مسابقهٔ اعداد اول» برنده می‌شود):**



مثال ۴. چند عدد به‌تصادف انتخاب‌کنید (کافی‌است تنهاعددهای فرد را درنظر بگیرید). احتمال آن‌راکه تعداد مقسوم‌علیه‌های به شکل $4k-1$ یك عدد از تعداد مقسوم‌علیه‌های به شکل $4k+1$ آن بیشتر باشد، براوردکنید. مثلا عدد ۲۱ دومقسوم‌علیه (۳ و ۷) ازنوع اول و دومقسوم‌علیه (۱ و ۲۱) ازنوع دوم دارد، درحالی که‌کلیهٔ مقسوم‌علیه‌های ۲۵ (۱، ۵، ۲۵) ازنوع دوم است.

مثال ۵. پنج دایرهٔشکل ۱، $n = 1, 2, 3, 4, 5$ نقطه برخوددارند. این نقطه‌ها در وضعیت‌کلی قرار دارند به‌این‌معنی‌که هیچ سه وتر از $\binom{n}{2}$ وتری‌که آنهارا به‌هم وصل‌می‌کنند، ازیك‌نقطه‌نمی‌گذرند. تعداد ناحیه‌هایی کـه از افراز هردایره به‌توسط وترها به وجـود می‌آیند، چقدر است؟



شکل ۱. هریك از این دایره‌ها چند ناحیه دارند؟

سالهاست که درصدد تدوین **قانون قوی اعداد کوچك** هستم [۹]. بهترین نتیجه‌ای که توانسته‌ام تاکنون به‌دست آوردم، این است:

> تعداد اعداد
> کوچك برای برآوردن انتظارات
> فراوانی که از آنها داریم کافی نیست

این دشمن اکتشاف ریاضی است. وقتی متوجه الگویی ریاضی می‌شوید، چگونه به‌واقعی‌بودن آن پی می‌برید؟

> شباهتهای سطحی
> مسبب احکام نادرست‌اند

> نظمهای ناپایدار
> باعث حدسهای نادقیق‌اند

از سوی دیگر، قانون قوی اغلب در جهت عکس کار می‌کند:

> استثناهای اولیه
> اصول کلی احتمالی‌را درمحاق فرو می‌برند

> بی‌قاعدگیهای آغازین
> جلوی شهود مؤثر را می‌گیرند

حال چند واقعیت گمراه‌کننده دربارهٔ اعداد کوچك:

ده درصد از صدعدد نخستین مربع کامل‌اند.

یك‌چهارم اعداد کوچکتر از ۱۰۰ عددهای اول‌اند.

کلیهٔ اعداد کوچکتر از ۱۰، بجز ۶، توانهای اعداد اول‌اند.

نصف اعداد کوچکتر از ۱۰ اعداد فیبوناتچی‌اند:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

و اعداد فیبوناتچی یك در میان، هم اعداد بل و هم اعداد کاتالان هستند.

مثال ۶. اعداد ۳۱، ۳۳۱، ۳۳۳۱، ۳۳۳۳۱، ۳۳۳۳۳۱، ۳۳۳۳۳۳۱، اول‌اند.

مثال ۷. مجموعهای متناوب فاکتوریلها،

$$3! - 2! + 1! = 5$$
$$4! - 3! + 2! - 1! = 19$$
$$5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 101$$
$$6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 619$$
$$7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 4421$$
$$8! - 7! + 6! - 5! + 4! - 3! + 2! - 1! = 35899$$

عددهای اول‌اند.

مثال ۸. در جدول

```
سطر ۱                          1 1                              2
سطر ۲                       1   2   1                           3
سطر ۳                    1   3   2   3   1                      5
سطر ۴                 1   4   3   2   3   4   1                 7
سطر ۵              1   5   4   3   5 2 5   3   4   5   1        11
سطر ۶           1  6  5   4   3   5   2   5   3   4   5 6  1    13
سطر ۷        1  76  5  4 7 3  5  7 2  75  3 7  4  5 67  1       19
سطر ۸     1  8 7 6 5  47 3 85 7  2  75 8 3 7  4  5 67 8 1       23
سطر ۹  1 9 8 76 5 9 47 3 85 7 929 75 8 3 7 4 9 5 67 89         129
```

سطر nام از سطر $(n-1)$ام با درج کردن n بین هر جفت از اعداد متوالی که جمعشان n است، به‌دست می‌آید. تعداد عددهای هر سطر درطرف راست نشان داده شده است. هریك از آنها یك عدد اول است.

مثال ۹. آیا عدد اولی به‌شکل $۱ + {}^n۲ \times ۷۰۱۳$ موجود است؟

مثال ۱۰. آیا کلیهٔ اعداد به‌صورت $۱ + {}^n۲ \times ۷۸۵۵۷$ مرکب‌اند؟

مثال ۱۱. وقتی از روش اقلیدس استفاده می‌کنید تا نشان دهید که بینهایت عدد اول وجود دارد:

$$2 + 1 = 3$$
$$(2 \times 3) + 1 = 7$$
$$(2 \times 3 \times 5) + 1 = 31$$
$$(2 \times 3 \times 5 \times 7) + 1 = 211$$
$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11) + 1 = 2311$$

همواره به‌عدد اول نمی‌رسید:

$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) + 1 = 30031 = 59 \times 509$$
$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17) + 1 = 510511 = 19 \times 97 \times 277$$
$$(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19) + 1 = 9699691 = 347 \times 27953$$

اما اگر به‌سراغ عدد اول بعدی بروید، تفاضل آن از حاصلضرب همواره یك عدد اول است:

$$5 - 2 = 3$$
$$11 - (2 \times 3) = 5$$
$$37 - (2 \times 3 \times 5) = 7$$
$$223 - (2 \times 3 \times 5 \times 7) = 13$$
$$2333 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11) = 23$$
$$30047 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13) = 17$$
$$510529 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17) = 19$$
$$9699713 - (2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 \times 17 \times 19) = 23$$

مثال ۱۲. از دنبالهٔ عددهای اول، اولین تفاضلها، سپس قدرمطلق تفاضلهای دوم، سوم، چهارم، و... را تشکیل دهید:

```
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67
 1 2 2 4 2 4 2 4 6 2 6 4 2 4 6 6 2 6
  1 0 2 2 2 2 2 2 4 4 2 2 2 2 0 4 4 2
   1 2 0 0 0 0 0 2 0 2 0 0 0 2 4 0 2
    1 2 0 0 0 0 2 2 2 2 0 0 2 2 4 2 2
     1 2 0 0 0 2 0 0 0 2 0 2 0 2 2 0
      1 2 0 0 2 2 0 0 2 2 2 2 2 0 2 0
       1 2 0 2 0 2 0 2 0 0 0 0 2 2 2
        1 2 2 2 2 2 2 2 0 0 0 2 0 0 0
         1 0 0 0 0 0 0 2 0 0 2 2 0 0
          1 0 0 0 0 0 2 2 0 2 0 2 0 0
           1 0 0 0 0 2 0 2 2 2 2 2 0
```

آیا اولین جمله درهردنبالهٔ تفاضلها همواره ۱ است؟

مثال ۱۳. 2^n بــه‌ازای $n>1$ هرگــز همنهشت ۱ (به‌پیمانهٔ n) نیست. 2^n هروقت که n اول باشد، و به‌ندرت وقتی n اول نیست ($n=$۳۴۱،۵۶۱،...)، همنهشت ۲ (به‌پیمانهٔ n) است. آیا 2^n به ازای $n>1$ هرگز همنهشت ۳ (به‌پیمانهٔ n) است؟

مثال ۱۴. تقریبهای خوب $5^{1/5}$، یعنی، مجموعهای همگرای

$$1+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\cdots$$

عبارت‌اند از ۱/۱، ۲/۱، ۳/۲، ۴/۳، ۷/۵، ۱۱/۸، ۲۹/۲۱، ... که مخرجهای آنها اعــداد فیبوناتچی و صورتهای آنها اعــداد لوکاس‌اند.

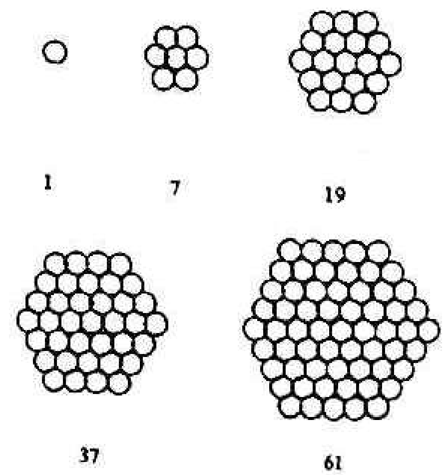
مثال ۱۵.

$$(x+y)^3 = x^3+y^3+3xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^0$$

$$(x+y)^5 = x^5+y^5+5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^1$$

$$(x+y)^7 = x^7+y^7+7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$$

مثال ۱۶. دنبالهٔ **اعداد هگز**[1] (که نامگذاری آنها به این گــونه، بــرای متمایــز ساختن آنهــا از اعــداد مسدسی [**هگزاگونال**] $n(2n-1)$، است) در شکل ۲ نشان داده شده‌اند.
مجموعهای جزئی این دنباله، ۱، ۸، ۲۷، ۶۴، ۱۲۵، ظاهراً مکعب کامل‌اند.



شکل ۲. اعداد هگز

مثال ۱۷. اعداد صحیح مثبت را بنویسید، آنها را یــك در میان حذف کنید، ومجموعهای جزئی عددهای باقی‌ماندهرا تشکیل‌دهید:

1	~~2~~	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~	11
1		4		9		16		25		36

1. hex

مثال ۱۸. مانند قبل عمل کنید، امــا اعداد را دو در میان حذف کنید، سپس مجموعهای جزئی‌را یك‌درمیان حذف‌کنید:

1	2	~~3~~	4	5	~~6~~	7	8	~~9~~	10	11	~~12~~	13	14	~~15~~	16
1	~~3~~		7	~~12~~		19	~~27~~		37	~~48~~		61	~~75~~		91
1			8			27			64			125			216

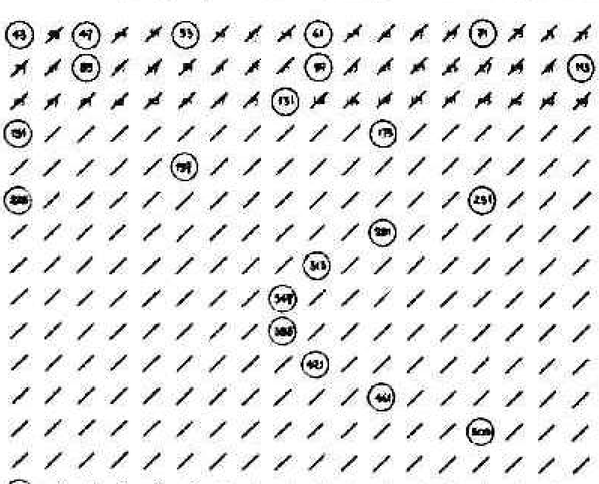
مثال ۱۹. بازهم مانند قبل، اما این‌بار اعداد را سه‌درمیان حذف کنید، سپس مجموعهای جــزئی را دو درمیان حذف کنید، سپس مجموعهای جزئی آنهارا یك‌درمیان حذف‌کنید:

1	2	3	~~4~~	5	6	7	~~8~~	9	10	11	~~12~~	13	14	15	~~16~~	17
1	3	~~6~~		11	17	~~24~~		33	43	~~54~~		67	81	~~96~~		113
1	~~4~~			15	~~32~~			65	~~108~~			175	~~256~~			369
1				16				81				256				625

مثال ۲۰. باز هم مانند قبل، امــا این‌بار دور اولین عــدد دنباله دایره‌ای بکشید، دومین عدد بعداز آن را حذف‌کنید، سومین عدد بعدازاین‌عددرا حذف‌کنید، و به‌همین‌ترتیب ادامه‌دهید.مجموعهای جزئی‌را تشکیل دهید، وکار را به‌همین‌ترتیب ادامه دهید:

1	2	~~3~~	4	5	~~6~~	7	8	9	~~10~~	11	12	13	14	~~15~~	16	17	18	19	20	~~21~~
	2		6	~~11~~		18	26	~~35~~		46	58	71	~~85~~		101	118	136	155	~~175~~	
			6			24	~~50~~			96	154	~~225~~			326	444	580	~~755~~		
						24				120	~~274~~				600	1044	~~1624~~			
										120					720	~~1764~~				
															720					

مثال ۲۱. اعدادفرد را از ۴۳ به‌بعدبنویسید. ۴۳ را در دایره‌ای محصور کنید، یك‌عدد را حذف‌کنید، ۴۷ را در دایره‌ای محصور کنید، دوعدد را حذف‌کنید، ۵۳ را در دایــره محصور کنید، سه عدد را حذف کنید، دور ۶۱ دایره‌ای بکشید، و به‌همین تــرتیب ادامه دهید. اعداد داخل دایره‌ها اول‌اند (شکل ۳).



شکل ۳. سهمیهایی ازاعداد اول باقی می‌مانند

مثال ۲۲. در جدول ۱ مقادیر فرد اول n^4+1 و $17\times 2^n-1$ با حروف سیاه چاپ شده‌اند. به‌ازای $n = 2,4,6,16,20$ مقادیر فرد اول آنها همزمان ظاهر می‌شوند.

n	n^4+1	$17 \times 2^n - 1$
0	1	$16 = 2^4$
1	2	$33 = 3 \times 11$
2	**17**	**67**
3	$82 = 2 \times 41$	$135 = 3^3 \times$
4	**257**	**271**
5	$626 = 2 \times$	$543 = 3 \times$
6	**1297**	**1087**
7	$2402 = 2 \times$	$2175 = 3 \times$
8	$4097 = 17 \times$	$4351 = 19 \times$
9	$6562 = 2 \times$	$8703 = 3^2 \times$
10	$10001 = 73 \times$	$17407 = 13^2 \times$
11	$14642 = 2 \times$	$34815 = 3 \times$
12	$20737 = 89 \times$	$69631 = 179 \times$
13	$28562 = 2 \times$	$139263 = 3 \times$
14	$38417 = 41 \times$	$278527 = 223 \times$
15	$50626 = 2 \times$	$557055 = 3^2 \times$
16	**65537**	**1114111**
17	$83522 = 2 \times$	$2228223 = 3 \times$
18	$104977 = 113 \times$	$4456447 = 59 \times$
19	$130322 = 2 \times$	$8912895 = 3 \times$
20	**160001**	**17825791**
21	$194482 = 2 \times$	$35651583 = 3^4 \times$
22	$234257 = 73 \times$	$71303167 = 13 \times$
23	$279842 = 2 \times$	$142606335 = 3 \times$

جدول ۱

مثال ۲۳. درجدول ۲ مقادیر اول $21\times 2^n-1$ و $7\times 4^n+1$ با حروف سیاه چاپ شده‌اند. این مقدارها به ازای $n = 1,2,3,7,10,13$ همزمان ظاهر می‌شوند.

n	$21 \times 2^n - 1$	$7 \times 4^n + 1$
0	$20 = 2^2 \times 5$	$8 = 2^3$
1	**41**	**29**
2	**83**	**113**
3	**167**	**449**
4	$335 = 5 \times$	$1793 = 11 \times$
5	$671 = 11 \times$	$7169 = 67 \times$
6	$1343 = 17 \times$	$28673 = 53 \times$
7	**2687**	**114689**
8	$5375 = 5^3 \times$	$458753 = 79 \times$
9	$10751 = 13 \times$	$1835009 = 11 \times$
10	**21503**	**7340033**
11	$43007 = 29 \times$	$29360129 = 37 \times$
12	$86015 = 5 \times$	$117440513 = 3907 \times$
13	**172031**	**469762049**
14	$344063 = 17 \times$	$1879048193 = 11 \times$
15	$688127 = 11^4 \times$	$7516192769 = 29^2 \times$
16	$1376255 = 5 \times$	$30064771073 = 113 \times$
17	$2752511 = 19 \times$	$120259084289 = 379 \times$

جدول ۲

مثال ۲۴. دنبالهٔ زیر را درنظر گیرید

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = (1 + x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2)/(n+1) \quad (n \geq 0).$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
x_n	1	2	3	5	10	28	154	3520	1551880	267593772160	...

آیا x_n همواره یک عدد صحیح است؟

مثال ۲۵. همان مثال قبل، ولی به جای مربعها، مکعب بگذارید: $y_{n+1} = (1 + y_0^3 + y_1^3 + \dots + y_n^3)/(n+1)$، $y_0 = 1$ $(n \geq 0)$. همان سؤال.

n	0	1	2	3	4	5	...
y_n	1	2	5	45	22815	2375152056927	...

مثال ۲۶. ایضاً برای توانهای چهارم،

$$z_{n+1} = (1 + z_0^4 + z_1^4 + \dots + z_n^4)/(n+1).$$

n	0	1	2	3	4	...
z_n	1	2	9	2193	5782218987645	...

همچنین، برای توانهای پنجم و قس‌علی‌هذا.

مثال ۲۷. عاملهای تحویل‌ناپذیر $x^n - 1$ چندجمله‌ایهای دایره‌بری[1] هستند، یعنی، $x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$، بنابراین $\Phi_1(x) = x - 1$، $\Phi_2(x) = x + 1$، $\Phi_3(x) = x^2 + x + 1$، $\Phi_4(x) = x^2 + 1$. چندجمله‌ای دایره‌بری مرتبهٔ n، $\Phi_n(x)$، از درجهٔ $\varphi(n)$ است که φ همان تابع توتیان[2] اویلر است. نوشتن $\Phi_n(x)$ وقتی n عددی اول، دوبرابر یک عدد اول، یا توانی از یک عدد اول است، و در بسیاری از موارد دیگر کاری است آسان. آیا ضرایب همواره ± 1 یا 0 اند؟

مثال ۲۸. دو نفر بازی زیر را انجام می‌دهند[3]: نفر اول عدد صحیح مثبتی چون n را انتخاب می‌کند. نفر دوم یکی از دو عدد $(3n \pm 1)/2^*$ را انتخاب، و در پاسخ ارائه می‌کند (2^* به‌معنی بزرگترین توان ۲ است که صورت را عاد می‌کند). نفر اول این پاسخ‌را می‌گیرد وطبق همین‌قاعده عمل می‌کند. بازی‌ادامه می‌یابد و برنده کسی‌است که زودتر به ۱ برسد. دراین بازی، مثلاً، عدد ۷ یک‌عدد برنده است یعنی کسی‌که آن را ارائه‌کند، برنده می‌شود زیرا حریف باید یکی‌از پاسخهای

$$(3 \times 7 - 1)/2^2 = 5 \text{ یا } (3 \times 7 + 1)/2 = 11$$

را بدهد و ۵ و ۱۱ نیز به‌نوبهٔ خود به پاسخهای

$$(3 \times 5 + 1)/2^4 = 1 \text{ و } (3 \times 11 - 1)/2^5 = 1$$

می‌انجامند و ارائه‌کنندهٔ ۷ برنده می‌شود. اعدادی نظیر ۵ و ۱۱ که ارائهٔ آنها باعث برنده‌شدن حریف می‌شود، اعداد بازنده‌اند.

اگر τ احتمال بازنده‌بودن یک‌عدد باشد و هیچ حالت خنثی (نه برنده ونه‌بازنده) وجود نداشته باشد، آنگاه احتمال‌برنده‌بودن یک عدد $1 - \tau$ است. این وضع فقط وقتی پیش می‌آید که هردو انتخاب ممکن بازنده باشند لذا $\tau^2 = 1 - \tau$، و τ نسبت طلایی

1. cyclotomic 2. totient

۳. برای کسب اطلاع بیشتر درمورد این بازی، می‌توانید به‌مرجع [۱۳] رجوع کنید [م].

یعنی $0{,}618 \approx (\sqrt{5}-1)/2$ است.

بنابراین تعجب‌آور نیست که ۵ عدد از نخستین ۸ عدد، ۸ عدد از نخستین ۱۳ عدد، ۱۳ تا از نخستین ۲۱ عدد، ۲۱ تا از نخستین ۳۴ عدد، و ۳۴ تا از نخستین ۵۵ عدد، بازنده‌اند، زیرا نسبت اعداد فیبوناتچی متوالی به‌نسبت طلایی میل می‌کند.

مثال ۲۹. آیا هریک از دو معادلهٔ دیوفانتی

$$x(x-1)/2 = 2^n - 1 \quad \text{و} \quad 2x^2(x^2-1) = 3(y^2-1)$$

تنها دارای پنج جواب مثبت $x = 1, 2, 3, 6, 91$ است؟

مثال ۳۰. دنبالهٔ $a_1 = 1$، $a_{n+1} = \lfloor\sqrt{2a_n(a_n+1)}\rfloor$، $(n \geqslant 1)$ را درنظر گیرید

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
a_n	1	2	3	4	6	9	13	19	27	38	54	77	109	154	218	309	437	618	874	1236	1748

1 2 4 8 16 32 64 128 256 512

آیا تفاضل یک در میان عددها، $a_{2k+1} - a_{2k}$، توانهای ۲ یعنی به‌صورت 2^kاند؟

مثال ۳۱. در همین دنباله، آیا اعداد با رتبه‌های زوج، a_{2k+2}، به‌شکل $2a_{2k} + \varepsilon_k$اند که در آن ε_k عبارت از k امین رقم در بسط دودویی $\sqrt{2} = 1{,}011010100000100\ldots$ است؟

مثال ۳۲. آیا این دنباله، همان دنبالهٔ $a_1 = 1$، $a_2 = 2$، $a_3 = 3$، $a_{n+1} = a_n + a_{n-2}$ $(n \geqslant 3)$ است؟

مثال ۳۳. n امین مشتق x^x در $x = 1$، یک عدد صحیح است. آیا این مشتق همواره مضرب n است؟ مقادیر آن به ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$ عبارت‌اند از

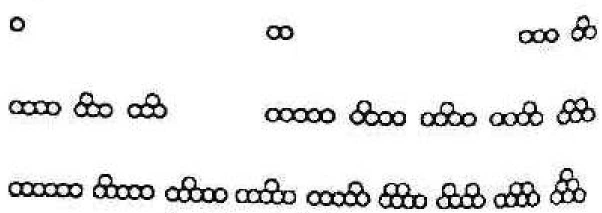
$1 \times 1, 2 \times 1, 3 \times 1, 4 \times 2, 5 \times 2, 6 \times 9, 7 \times (-6), 8 \times 118, 9 \times (-568),$
$10 \times 4716, 11 \times (-38160), 12 \times 358126, 13 \times (-3662088), 14 \times 41073096,$
$15 \times (-500013528), 16 \times 6573808200, 17 \times (-92840971200),$
$18 \times 1402148010528, \ldots$

مثال ۳۴. مطلوب است c_n، تعداد راههایی که می‌توان n سکهٔ ۱ ریالی را به‌صورت ردیفی چید به‌طوری که هرسکه‌ای درهرردیف بالای ردیف اول، بردوسکهٔ مجاور در ردیف زیرین مماس باشد.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
c_n	1	1	1	2	3	5	9	15	26	45	78	135	234	406	704	1222	2120

متخصصین نظریهٔ افرازها برای تشریح بیشترچنین دنباله‌هایی، اغلب تابع مولد آنها، یعنی

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 9x^6 + 15x^7 + \cdots$$



شکل ۴. افرازهای سکهٔ پراپ

را به‌صورت یک‌سری حاصلضرب،

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{-a(n)}$$

بیان می‌کنند. دراین‌حالت، $a(n)$ها اعداد فیبوناتچی متوالی‌هستند:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
$a(n)$	1	0	1	1	2	3	5	8	13	21	…

مثال ۳۵. اگر p_k، k امین عدداول باشد، $p_1 = 2$، $p_2 = 3$، …، آیا رابطهٔ زیر برقرار است؟

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - x^{p_k})^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{p_1 + p_2 + \cdots + p_k}}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)}$$

پاسخها

۱. کسی که گول این‌قانون قوی‌را خورد، شخصیتی جز فرما نبود؛ اویلر تجزیهٔ $2^{32} + 1 = 641 \times 6700417$ را ارائه‌داد. کلیهٔ مثالهای دیگر اعداد فرما مرکب‌اند؛ جف یانگ و دانکن بوئل [۳۲] اخیراً نشان داده‌اند که $2^{2^{20}} + 1$ مرکب است.

۲. اعداد اول مرسن، $2^p - 1$ ها، خیلی معدودند. تاکنون کسی نتوانسته نامتناهی‌بودن تعداد آنها را ثابت کند؛ $2^{11} - 1 = 23 \times 89$ جزو اعداداول مرسن نیست. به‌پیوست ۳ی مرجع [۱۳] و دنبالهٔ ۱۰۸۰ در [۳۸] مراجعه کنید.

۳. در «مسابقهٔ اعداد اول»، $4k - 1$ و $4k + 1$ به‌نوبت بی‌نهایت بار یکدیگر را پشت‌سر می‌گذارند. این‌را لیتلوود در [۱۸] ثابت کرده‌است. دربارهٔ این‌موضوع، مقاله‌های‌زیادی در دیوبوهای نظریهٔ اعداد شمارهٔ ۱۲ آمده است، مثلاً مقالهٔ چن [۴].

۴. بنابر قضیه‌ای ازلژاندر (نگاه کنید، مثلاً، به [۶])، اگر D_+ و D_- تعدادمقسوم‌علیه‌های n به‌شکلهای $4k + 1$ و $4k - 1$ باشد، آنگاه تعداد راههای نمایش n به‌صورت مجموع دو مربع عبارت است از $4(D_+ - D_-)$. بنابراین به ازای هر عدد، $D_+ \geqslant D_-$!

۵. پیش از آنکه همه‌چیز را برملا کنیم، برای شگفتی بیشتر شما دایره‌ای (شکل ۵) را ارائه می‌کنیم که ده‌نقطه روی آن‌است و ۲۵۶ ناحیه دارد.

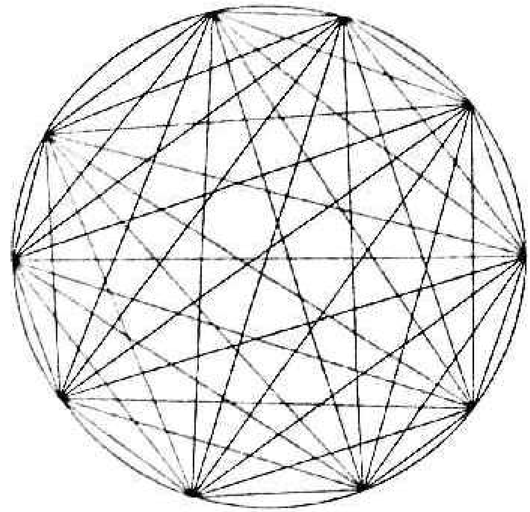
اگر دایره n نقطه داشته باشد، وترها یکدیگررا در $\binom{n}{4}$ نقطه درداخل دایره قطع‌می‌کنند، زیرا ازهر مجموعه‌ای شامل چهار نقطه، تنها یک‌نقطهٔ تلاقی حاصل می‌شود. تعدادرأسهای‌موجود در شکل، $V = n + \binom{n}{4}$ است. برای پیداکردن تعداد ضلعها، انتهاهای آنهارا می‌شماریم. ازهریک از n نقطه، $n + 1$ ضلع و از هریک از $\binom{n}{4}$ نقطهٔ تلاقی، چهار ضلع می‌گذرند، بنابراین $2E = n(n+1) + 4\binom{n}{4}$. بنابرفرمول اویلر، تعداد ناحیه‌های داخل دایره عبارت است از

$$\begin{aligned} E + 1 - V &= 2\binom{n}{4} + \frac{1}{2}n(n+1) + 1 - \binom{n}{4} - n \\ &= \binom{n}{4} + \frac{1}{2}n(n-1) + 1 \\ &= \binom{n-1}{4} + \binom{n-1}{3} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{0} \end{aligned}$$

برهان مستقیمی با نشانه‌گذاری ناحیه‌ها به کمک حداکثر چهار عدد از اعداد $1, 2, \ldots, n-1$ در [۵] داده شده است. جواب، صرفاً پنج جمله از بین n جملهٔ بسط دوجمله‌ای $(1+1)^{n-1}$ است. به ازای $n<6$، جواب شامل همهٔ جمله‌هاست و تعداد ناحیه‌ها توانی از ۲ است. به ازای $n=6$، تنها ۱ حذف شده است. به ازای $n=10$ تنها نصف جمله‌ها حذف شده‌اند، و تعداد ناحیه‌ها برابر است با $256 = 2^9 \times (1/2)$.

# تعداد نقطه‌ها	=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
# تعداد ناحیه‌ها	=	1	2	4	8	16	31	57	99	163	256	386	562	794	1093

چند عدد مشهور دیگر، مثلاً ۱۶۳ و ۱۰۹۳، نیز در این دنباله که دنبالهٔ شمارهٔ ۴۲۷ در [۳۸] است، ظاهر می‌شوند.



شکل ۵. دایره‌ای که به ۲۸ ناحیه افراز شده است.

۶. همان‌گونه که به‌سهولت با آزمونهای رایج تقسیم‌پذیری می‌توان تحقیق کرد، هیچ‌عضوی از اعضای این دنباله بر ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، یا ۳۷ قابل‌قسمت نیست. از طرف دیگر، ۱۷، ۱۹، ۲۳، ۲۹، ۳۱، ... عدد ۳۳ ... ۳۳۱ را تنها در صورتی که تعداد سه‌ها به ترتیب $16k+8$، $18k+11$، $22k+20$، $28k+19$، $15k+1$، ... باشد، عاد می‌کند درحالی که ۴۱، ۴۳، ۵۳، ۶۷، ۷۱، ۷۳، ۷۹، ... هیچ‌عضوی از اعضای دنباله‌را عاد نمی‌کنند. فکر نمی‌کنم که توصیف ساده‌ای از اینکه کدام اعداد اول دنباله‌را عاد می‌کنند و کدام اعداد اول آن‌راعاد نمی‌کنند، موجود باشد. عدد بعدی، ۳۳۳۳۳۳۳۱، نیز اول است ولی $333333331 = 17 \times 19607843$.

۷. باز هم از جای خوبی شروع کرده‌ایم، زیرا $\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}k!$ بر هیچ عددی نابیشتر از n تقسیم‌پذیر نیست. با این‌حال،

$$9! - 8! + 7! - 6! + 5! - 4! + 3! - 2! + 1! = 326981 = 79 \times 4139.$$

۸. این مثال و نیز مثال ۵ را اولین‌بار لئوموزر در ربع قرن پیش به‌من نشان داد. سطر n فهرست مخرجهای سری فیری[1] از مرتبهٔ n، یعنی مجموعهٔ کسرهایی گویا مانند r است، $0 \leqslant r \leqslant 1$، که مخرجهای آنها از n بیشتر نیست. برای به‌دست آوردن سطر n از سطر $n-1$، تنها $\varphi(n)$ عدد درج می‌شوند که در آن $\varphi(n)$ تابع تونیان اویلر، یعنی تعداد عددهای نابیشتر از n است که نسبت به n اول‌اند. اول بودن $1+\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)$ به‌ازای $1 \leqslant n \leqslant 9$ امری اتفاقی است. چون $\varphi(10)=4$، تعداد عددهای سطر ۱۰ ام $33 = 4 + 29$ است و اول نیست.

۹. عبارت $7013 \times 2^n + 1$ به‌ازای $0 \leqslant n \leqslant 24160$ مرکب است [۱۵]. دانکن‌بوئل‌وجف‌یانگ ۳۲۵ مورد دیگر $n < 10^5$ را که ممکن بود عدد اولی به‌دست دهند، الک کرده‌اند. وجود هیچ‌عدد اولی از این‌نوع معلوم نشده است، گرچه محتمل است که یکی موجود باشد.

۱۰. عدد $78557 \times 2^n + 1$ همواره بردست کم یکی از اعداد ۳، ۵، ۷، ۱۳، ۱۹، ۳۷، ۷۳ تقسیم‌پذیر است [۲۶، ۲۷]. توضیح بیشتر دربارهٔ این‌مثال ومثال قبل را در [۱۲] می‌توانید ببینید.

۱۱. فورچن[2] حدس زد که این تفاضلها همواره اول‌اند: نگاه کنید به [۸]، [۹]، و [۱۲]. چند تفاضل بعدی عبارت‌اند از ۳۷، ۶۱، ۶۷، ۶۱، ۷۱، ۴۷، ۱۰۷، ۵۹، ۶۱، ۱۰۹، ۸۹، ۱۰۳، ۷۹. احتمال زیادی دارد که حدس درست باشد، زیرا تفاضل نمی‌تواند برهیچ یک از k عدد اول قابل‌قسمت باشد، بنابراین کوچکترین مورد ممکن مرکب برای $P=\prod p_k$ عبارت است از p_{k+1}^2، که بزرگی آن تقریباً $(k \ln k)^2$ است. حاصلضرب نخستین k عدد درحدود e^k است: برای پیدا کردن یک مثال ناقض به‌رخنه‌ای به‌اندازه $(\ln N \ln\ln N)^2$ در درون اعداد اول حول N نیاز داریم. تصور می‌شود که چنین رخنه‌هایی موجود نباشند، اما اثبات آن فراتر از حد توان کنونی ماست.

۱۲. این همان حدس گیلبریت[3] است که صحت آن به ازای $k < 63419$ تحقیق شده است [۱۶]. هلرد کرافت[4] این فکر را مطرح کرده است که این حدس چندان ربطی به‌اعداد اول ندارد، بلکه درمورد هردنباله‌ای مرکب از ۲ و اعداد فرد که باسرعت زیادی افزایش نیابد، یا رخنه‌های خیلی بزرگی نداشته‌باشد صادق‌است: نگاه کنید به [۱۲]. در نامه‌ای به‌تاریخ ۸۷/۸/۳، اندی ادلیزکو گزارش داد که صحت حدس را به‌ازای $k < 10^{10}$ تحقیق کرده است.

۱۳. د.ه. و اما لمر[5] کشف کرده‌اند که به‌ازای

$$n = 4700063497$$

داریم: $2^n \equiv 3$ (به پیمانهٔ n)، اما به ازای هیچ $n > 1$ کوچکتری این همنهشتی برقرار نیست.

---

1. Farey
2. R.F.Fortune
3. N.L.Gilbreath
4. Hallard Croft
5. D.H. & Emma Lehmer

۱۴. kامین عدد لوکاس و $(k+۱)$امین عدد فیبوناتچی عبارت اند از

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k,\quad \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right\}.$$

نسبت آنها، با بزرگ‌شدن k، به

$$(5-\sqrt{5})/2 \approx 1\cdot 381966011$$

میل می‌کند، درحالی‌که $۵^{۱/۵} \approx ۱٫۳۷۹۷۲۹۶۶۱$. چندعدد بعدی که به $۵^{۱/۵}$ میل می‌کنند، یعنی اعداد

$$\frac{40}{29},\ \frac{109}{79},\ \frac{912}{661},\ \frac{1021}{740},\ \frac{26437}{19161},\ \frac{27458}{19901},$$

اعداد فیبوناتچی یا لوکاس *نیستند*. دنباله‌های شمارهٔ ۲۵۶ و ۲۶۰، و، ۹۲۴ و ۹۲۵ در [۳۸]را باهم مقایسه کنید. سابقهٔ این‌مثال به‌سال ۱۸۶۶ بازمی‌گردد [۲۵].

۱۵. این امر کاملاً اتفاقی است [۳۰]. قرار دهید $x=y=۱$، که از آن $۲^{۲n+۱}-۲=(۲n+۱)\times ۲\times ۳^{n-۱}$ به دست می‌آید. درست است که

$$2^2-1=3\times 3^0,\quad 2^4-1=5\times 3^1,\quad 2^6-1=7\times 3^2$$

اما روشن است که این الگو نمی‌تواند ادامه پیداکند.

۱۶. وقتی $(n+۱)$امین عدد هگز،

$$1+6+12+\cdots+6n=3n^2+3n+1$$

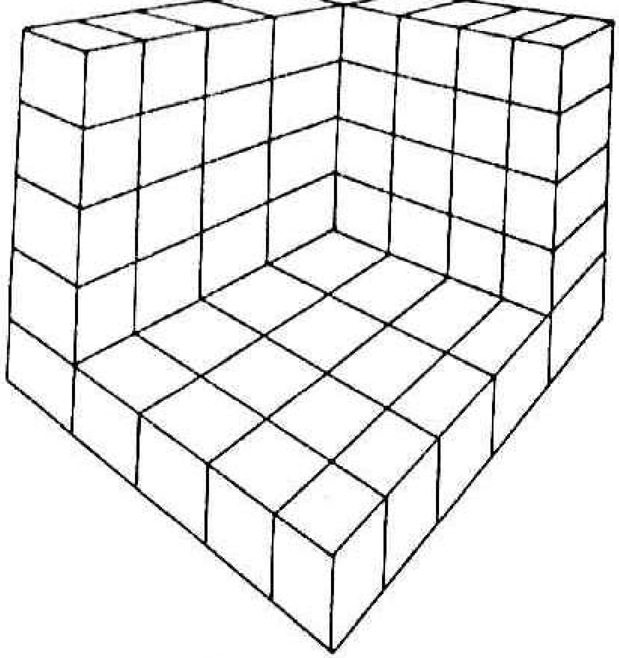
را به $n^۳$ اضافه کنیم، عدد $(n+۱)^۳$ به‌دست‌می‌آید، بنا براین این الگو، یک الگوی واقعی است. ازلحاظ آموزشی خوب است که nامین عدد هگز را به‌عنوان سه‌وجهی تلقی کنیم که یک گوشهٔ مکعبی متشکل از $n^۳$ مکعب واحد را می‌سازند (شکل ۶).

۱۷، ۱۸، ۱۹، و۲۰، مثالهایی از فرایند موسنر هستند که به‌واقع مربعات، مکعبات، توانهای چهارم، و فاکتوریلها را تولید می‌کنند. بعداز انتشار مقالهٔ موسنر [۲۰] برهانی‌از پرون[1] منتشر شده‌است. تعمیمهای بعدی کارپاشه [۲۲] است. همچنین برای ملاحظهٔ توصیف جدیدتری به [۱۹] مراجعه کنید.

۲۱. این مثال، همان فرمول اویلر $(n^۲+n+۴۱)$ با اندکی تغییرشکل است که به‌ازای $۳۹ \leqslant n \leqslant ۴۰-$ اعداد اول را می‌دهد. برای ملاحظهٔ ارتباطهای جالب‌توجه آن با هیأتهای درجهٔ دو، کسرهای‌مسلسل، تابعهای‌پیمانه‌ای‌وعددهای رده‌ای، نگاه‌کنید به [۳۹].

۲۲. الگوی اولیه‌را می‌توان باتوجه به‌این واقعیتها توضیح‌داد که اگر n فرد باشد، $n^۴+۱$ زوج‌است و $۱۷\times ۲^n-۱$ مضرب ۳ است. به‌ازای nهای زوج، تا $n=۲۴$ وقوع همزمان مقادیر فرد و اول نتیجهٔ تصادف است، در $n=۲۴$، $n^۴+۱=۳۳۱۷۷۷$ عدد اول است درحالی که $۱۷\times ۲^n-۱=۲۸۵۲۱۲۶۷۱=۱۴۹\times ۱۹۱۴۱۷۹$. نگاه‌کنید به [۱۷]، [۳۴] و دنباله‌های شمارهٔ ۳۸۶ و ۳۸۷ در [۳۸].

1. Perron



شکل ۶. پنجمین عدد هگز

۲۳. این نیز نتیجهٔ‌تصادف‌است. وقتی به $n=۱۸$ برسیم، به‌ازای آن، $۲۱\times ۲^n-۱=۵۵۰۵۰۲۳$ عدداول است درحالی که

$$7\times 4^n+1=481036337153=166609\times 2887217.$$

نگاه‌کنیدبه[۳۱]، [۳۳] و دنباله‌های‌شمارهٔ ۳۱۴ و ۳۱۵ در [۳۸].

۲۴. این دنباله‌ای است که فریتس گوبل آن را معرفی کرده است. فرمول بازگشتی مناسبتری برای محاسبه عبارت است از $(n+۱)x_{n+۱}=x_n(x_n+n)$، $(n\geqslant ۱)$. اگر به‌پیمانهٔ ۴۳ عمل کنید، تا $n=۴۲$ مقادیرزیررا برای x_n به‌دست‌می‌آورید:

n =	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
x_n =	1	2	3	5	10	28	25	37	10	20	15	38	19	42	36	34	2	35	39	31	13	2

n =	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
x_n =	6	26	28	29	4	14	42	5	20	17	4	20	16	29	42	13	42	20	8	23	33

ونیز $x_{۴۲}(x_{۴۲}+۴۲)\equiv -۱۰(-۱۰+۴۲)=-۳۲۰$، که بر ۴۳ تقسیم‌پذیر نیست، بنا براین $x_{۴۳}$ عدد صحیحی نیست، گرچه x_n به‌ازای $۴۲ \leqslant n \leqslant ۰$ عددی است صحیح.

۲۵. محاسبات مشابهی، به پیمانهٔ ۸۹، با استفاده از رابطهٔ $(n+۱)y_{n+۱}=y_n(y_n^۲+n)$ نشان می‌دهند که $y_{۸۹}$ عدد صحیحی نیست. این‌مثال ومثال قبل‌را در [۱۳] ببینید.

۲۶. پس از مطرح شدن این سؤال، هنری ایبزتت[1] محاسبات مفصلی انجام داده و دریافته است که اولین جملهٔ غیرصحیح، x_n، در دنباله که متضمن توان kام است، عبارت است از

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
n	43	89	97	214	19	239	37	79	83	239

وی همچنین نتایج متناظری را با مقادیر آغازین متفاوت پیدا کرد. طولانی‌ترین مجموع که نتیجه به‌ازای آن برقرار است ($n=۶۱۰$) مکعبها هستند ($k=۳$، مثال ۲۵) با ضوابط $x_0=۱$، $x_1=۱۱$.

۲۷. اولین چندجمله‌ای دایره‌بری که ضریبی بجز ±۱ و ۰ در آن ظاهر می‌شود، عبارت است از

$$\begin{aligned}\Phi_{105}(x) = {} & x^{48} + x^{47} + x^{46} - x^{43} - x^{42} - 2x^{41} - x^{40} - x^{39} + x^{36} + x^{35} + x^{34} \\ & + x^{33} + x^{32} + x^{31} - x^{28} - x^{24} - x^{22} - x^{20} + x^{17} + x^{16} + x^{15} + x^{14} \\ & + x^{13} + x^{12} - x^{9} - x^{8} - 2x^{7} - x^{6} - x^{5} + x^{2} + x + 1\end{aligned}$$

ضرایب می‌توانند به طور نامحدودی بزرگ شوند، اما این امر مستلزم آن است که n شامل تعداد زیادی عامل اول فرد متمایز باشد؛ نگاه کنید به [۸]. در همین اواخر، مونتمگری و ووگان [۳۳] نشان داده‌اند که اگر $\Phi_n=\sum a(m,n)x^m$ و $L(n)=\ln\max_n|a(m,n)|$ آنگاه، به‌ازای m بزرگ،

$$\frac{m^{1/2}}{(\ln 2m)^{1/4}} \ll L(n) \ll \frac{m^{1/2}}{(\ln m)^{1/4}}$$

۲۸. این بازی، تحریف بازی Beanstalk جان ایزبل [۱۳] به‌وسیلهٔ جان کانوی است. الگوی فیبوناتچی برقرار نیست: تنها ۵۲ عدد از نخستین ۸۹ عدد، ۸۱ عدد از نخستین ۱۴۴ عدد، ۱۲۶ عدد از نخستین ۲۳۳ عدد، و ۲۰۱ عدد از نخستین ۳۷۷ عدد بازنده‌اند. برهان احتمالاتی مغالطه‌آمیز است: احتمالهای دوامکان مستقل نیستند.

۲۹. بله، ولی تطابق جوابها از چیست؟

۳۰ و ۳۱. الگوهای توانهای ۲ و ارقام $\sqrt{2}$ در پایهٔ دودویی هردو ادامه دارند؛ نگاه کنید به [۱۱]، [۱۴] و دنبالهٔ شمارهٔ ۲۰۶ در [۲۸].

۳۲. دنبالهٔ متفاوتی است، دنبالهٔ شمارهٔ ۲۰۷ در [۲۸]، که به‌ازای $n<۹$ با این دنباله تطبیق می‌کند، ولی بعداً به صورت ۲۸، ۴۱، ۶۰، ۸۸، ۱۲۹، ۱۸۹، ۲۷۷، ۴۰۶، ۵۹۵، ۸۷۲، ۱۲۷۸، ...، ادامه می‌یابد.

۳۳. اگر $y=x^x$ و $y_n(1)$ مقدار d^ny/dx^n را در $x=1$ نشان دهد، آنگاه

$$\begin{aligned}y_{n+1}(1) = {} & y_n(1) + \binom{n}{1}y_{n-1}(1) - \binom{n}{2}y_{n-2}(1) + 2!\binom{n}{3}y_{n-3}(1) - 3!\binom{n}{4}y_{n-4}(1) \\ & + - + \cdots + (-1)^n(n-1)!.\end{aligned}$$

1. Henry Ibstedt

وقتی این مسأله به‌وسیلهٔ ریچارد پترسن[1] و گوراد سوری[2] به بخش «مسایل حل نشده» مجلهٔ مانتلی تسلیم شد، مضرب $n+1$ بودن آن معلوم نبود. اما هربرت ویلف درنامه‌ای به تاریخ ۸۷/۵/۲۸، برهانی، با استفاده از تابع مولدعددهای استرلینگ نوع اول، ارائه داد. این برهان در واقع نشان می‌دهد که $n(n-1)$، $y_n(1)$ را عادمی‌کند تنها به‌شرطاینکه $n-1$، $(n-2)!$ را عاد کند، که وقتی $n\geqslant ۷$، چنین می‌کند مشروط براینکه $n-1$ اول نباشد.

۳۴. این دنباله به‌وسیلهٔ جیم پراپ مورد بررسی قرار گرفت. بجز اینکه $a(۱۲)=۵۵$، الگوی اعداد فیبوناتچی ادامه پیدا نمی‌کند:

$n =$ 11	12	13	14	15	16	17	18
$a(n) =$ 35	55	93	149	248	403	670	1082

بعد از نوشته‌شدن این مقاله، ویلف [۴۱] تابع مولد را با کسر مسلسل رامانوجان مربوط کرده، متذکر می‌شود که تعداد افرازهای پراپ با k سکه درپایینترین‌سطرتجلی دیگری از اعدادکاتالان، ۱، ۲، ۵، ۱۴، ۴۲، ...، است[۷]. این‌افرازها شکل دیگری از افرازهایی هستندکه مورد توجه اولوك [۱] قرار گرفتند. در افرازهای اولوك سکه‌ها در هر سطر، ونه‌تنها درپایینترین‌سطر، مجاورند. تعداد آنها، ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ...، مثال خوب دیگری ازقانون قوی است.

۳۵. بسط حاصلضرب به‌صورت یك‌سری توانی، چنین است،

$$\begin{aligned}& 1 + x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 4x^9 + 5x^{10} + 6x^{11} + 7x^{12} + 9x^{13} \\ & 10x^{14} + 12x^{15} + 14x^{16} + 17x^{17} + 19x^{18} + 23x^{19} + 26x^{20} + 30x^{21} + 35x^{22} \\ & + 40x^{23} + 46x^{24} + 52x^{25} + 60x^{26} + 67x^{27} + 77x^{28} + 87x^{29} + \cdots .\end{aligned}$$

این سری با مجموع طرف دوم یکی است تا

$$+31x^{21} + 35x^{22} + 41x^{23} + 46x^{24} + 54x^{25} + 60x^{26} + 69x^{27} + 78x^{28} + 89x^{29} + \cdots$$

این، مدخل ۲۹ درفصل ۵ دومین کتابچهٔ یادداشت رامانوجان [۲]، [۳] است: اما او آن‌را خط زده بود!

اگر مثالهای موردعلاقهٔ شما را از قلم انداخته‌ام، خبرم کنید!

مراجع

1. F. C. Auluck, On some new types of partitions associated with generalized Ferrers graphs, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 47 (1951) 679-686; MR 13, 536.
2. Bruce C. Berndt, Ramanujan's Notebooks, Part 1, Springer-Verlag, 1985, p.130.
3. Bruce C. Berndt and B. M. Wilson, Chapter 5 of Ramanujan's second notebook, in M.I. Knopp (ed.) Analytic Number Theory, Lecture Notes in Math. 899, Springer, 1981, pp. 49-78; MR 83i:10011.

1. Richard Patterson 2. Gaurar Suri

4. W. W. L. Chen, On the error term of the prime number theorem and the difference between the number of primes in the residue classes modulo 4, *J. London Math. Soc.*, (2) 23(1981) 24-40; MR 82g:10058.
5. John Conway and Richard Guy, The Book of Numbers, Scientific American Library, W.H. Freeman, 1988.
6. H. Davenport, The Higher Arithmetic, Hutchinson's University Library, 1952, p.128.
7. Roger B. Eggleton and Richard K. Guy, Catalan Strikes again! How likely is a function to be convex?, *Math. Mag.* 61(1988) 211-218.
8. P. Erdős and R. C. Vaughan, Bounds for the r-th coefficients of cyclotomic polynomials, *J. London Math. Soc.*, (2) 8(1974) 393-400; MR 50 # 9835.
9. Martin Gardner, Mathematical games: patterns in primes are a clue to the strong law of small numbers, *Sci. Amer.*, 243 # 6(Dec. 1980) 18, 20, 24, 26, 28.
10. Solomon W. Golomb, The evidence for Fortune's conjecture, *Math. Mag.* 54(1981) 209-210.
11. R. L. Graham and H. O. Pollak, Note on a linear recurrence related to $\sqrt{2}$, *Math. Mag.*, 43(1970) 143-145; MR 42 # 180.
12. Richard K. Guy, Unsolved Problems in Number Theory, Springer, 1981.
13. Richard K. Guy, John Isbell's game of Beanstalk and John Conway's game of Beans-Don't-Talk, *Math. Mag.*, 59(1986) 259-269.
14. F. K. Huang and S. Lin, An analysis of Ford & Johnson's sorting algorithm, *Proc. 3rd Annual Princeton Conf. on Info. Systems and Sci.*
15. Wilfrid Keller, Factors of Fermat numbers and large primes of the form $k.2^{n+1}$, *Math. Comput.*, 41(1983) 661-673.
16. R. B. Killgrove and K. E. Ralston, On a conjecture concerning the primes, *Math. Tables Aids Comput.*, 13(1959) 121-122; MR 21 # 4943.
17. M. Lal, Primes of the form n^4+1, *Math. Comput.*, 21(1967) 245-247.
18. J. E. Littlewood, Sur le distribution des nombres premiers, *C. R. hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris*, 158(1914) 1868-1872.
19. Calvin T. Long, Strike it out-add it up, *Math. Mag.*, 66(1982) 273-277. See also this Monthly 73(1966) 846-851.
20. Alfred Moessner, Eine Bemerkung über die Potenzen der natürlichen Zahlen, *S.-B. Math.-Nat. Kl. Bayer. Akad. Wiss.*, 1951, 29(1952); MR 14-353b.
21. Andrew M. Odlyzko and Herbert S. Wilf, n coins in a fountain (to appear in *Amer. Math. Monthly*, (Nov. 1988)).
22. Ivan Paasche, Eine Verallgemeinerung des Moessnerschen Satzes, *Compositio Math.*, 12(1956) 263-270; MR 17, 836g.
23. Hans Riesel, Lucasian criteria for the primality of $N = h.2^n - 1$, *Math. Comput.*, 23(1969) 869-875.
24. Raphael M. Robinson, A report on primes of the form $k.2^n+1$ and on factors of Fermat numbers, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9(1958) 673-681.
25. P. Seeling, Verwandlung der irrationalen Grösse $\sqrt{}$ in einen Kettenbruch, *Archiv. Math. Phys.*, 46(1866) 80-120 (esp. p. 116).
26. J. L. Selfridge, Solution to problem 4995, this Monthly, 70(1963) 101.
27. W. Sierpiński, Sur un problème concernant les nombres $k.2^n+1$, *Elem. Math.*, 15(1960) 73-74; MR 22 # 7983; corrigendum, *ibid.* 17(1962)85.
28. N. J. A. Sloane, A Handbook of Integer Sequences, Academic Press, 1973.
29. Harold M. Stark, An explanation of some exotic continued fractions found by Brillhart, Computers in Number Theory, Atlas Sympos. No. 2, Oxford, 1969, pp. 21-35, Academic Press, London, 1971.
30. Peter Taylor and Doug Dillon, Problem 3, *Queen's Math. Communicator*, Dept. of Math. and Statist., Queen's University, Kingston, Ont., Oct. 1985, p.16.
31. H. C. Williams and C. R. Zarnke, A report on prime numbers of the forms $M = (6a+1)2^{2m-1}-1$ and $M' = (6a-1)2^{2m}-1$, *Math. Comput.*, 22(1968) 420-422.
32. Jeff Young and Duncan A. Buell, The twentieth Fermat number is composite, *Math. Comput.* 50(1988) 261-263.
33. H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, The order of magnitude of the mth coefficients of cyclotomic polynomials, *Glasgow Math. J.* 27(1985) 143-159; MR 87e: 11026.

• Richard K. Guy, "The strong law of small numbers," *Amer. Math. Monthly*, (8) **95** (1988) 697-712.

* ریچارد گای، دانشگاه کالگری کانادا