پیشرفتهای اخیر در ترکیبیات جبری•

ریچارد استنلی*

ترجمهٔ رشید زارع نهندی

در این متن نظری می‌افکنیم به سه کار بزرگ اخیر در ترکیبیات جبری. اولین آنها اثبات حدسیهٔ [انگارهٔ] اشباع‌سازی[1] ضرایب لیتلوود‌ـ‌ریچاردسن است که نخست ناتسن و تائو و سپس درکسن و وایمن برهانهایی برای آن عرضه کرده‌اند. دستاورد دوم، اثبات هیمن از حدسیه‌های $n!$ و $(n+۱)^{n-۱}$ است. آخرین دستاورد، تعیین رفتار حدی طول بلندترین زیردنبالهٔ صعودی یك جایگشت تصادفی است که بیك، دایفت و یوهانسن انجام داده‌اند.

۱. مقدمه

ترکیبیات جبری در آغاز هزارهٔ جدید مبحثی سرزنده و پویاست. این مبحث را مشکل بتوان به‌طور دقیق تعریف کرد؛ اما تقریباً می‌توان گفت ترکیبیات جبری شامل مفاهیمی است که هم تعبیر جبری و هم تعبیر ترکیبیاتی دارند، مانند عدد اصلی یک مجموعه که تعریف ترکیبیاتی دارد و بعد یک فضای برداری که تعریف جبری دارد. گاهی از تعبیر ترکیبیاتی برای به‌دست آوردن نتایج جبری استفاده می‌شود و گاهی برعکس. ریاضیدانان حداقل از زمان اویلر با ترکیبیات جبری سروکار داشته‌اند (به‌ویژه از کارهای اویلر روی افرازها می‌توان نام برد)، ولی کار منظم و اصولی برای پایه‌ریزی مبانی ترکیبیات جبری از دههٔ ۱۹۶۰ و عمدتاً تحت تأثیر جیان‌ـکارلو روتا آغاز شده و آن را به یکی از جریانهای اصلی ریاضیات تبدیل کرده است. امروزه ترکیبیات جبری علمی تکامل‌یافته و شکوفاست.

ما سه دستاورد بزرگ اصلی را انتخاب کرده‌ایم تا با تشریح آنها وضعیت ترکیبیات جبری را در سالهای اخیر روشن سازیم. هر سه دستاورد راههای زیادی برای تحقیقات جدید گشوده و مسائل تحقیقاتی فراوانی در پیش نهاده‌اند که در قرن جدید نیز مشغلهٔ عده‌ای از دست‌اندرکاران ترکیبیات جبری خواهد بود. انتخاب این سه مورد تا حدی به این دلیل است که تشریح آنها برای افراد غیرمتخصص نسبتاً آسان است. کارهای مهم دیگری نیز در ترکیبیات جبری انجام شده که در اینجا ذکری از آنها به میان نمی‌آید.

1. saturation conjecture

۲. حدسیهٔ اشباع‌سازی

حدسیهٔ اشباع‌سازی با اعداد صحیحی سروکار دارد که به نام ضرایب لیتلوود‌ـ‌ریچاردسن شناخته شده‌اند. با توجه به موضوع مقاله تعجب‌آور نیست که که این اشیا هم تعریف جبری و هم تعریف ترکیبیاتی داشته باشند. نخست تعریف جبری را مطرح می‌کنیم که از تعریف ترکیبیاتی طبیعی‌تر است.

فرض کنید $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ گروه همهٔ تبدیلات خطی وارون‌پذیر از فضای برداری nبعدی مختلط V به خودش باشد. با انتخاب یک پایهٔ مرتب برای V، می‌توان $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ را با گروه ماتریسهای وارون‌پذیر $n \times n$ روی اعداد مختلط (با عمل ضرب ماتریسی) یکی گرفت. فرض کنید نگاشت $\varphi : \mathrm{GL}(۲,\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(۳,\mathbb{C})$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد

$$\varphi \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^۲ & ۲ab & b^۲ \\ ac & ad+bc & bd \\ c^۲ & ۲cd & d^۲ \end{bmatrix}$$

می‌توان نشان داد که φ یک همریختی گروهی (و بنابراین یک نمایش از $\mathrm{GL}(۲,\mathbb{C})$ از درجهٔ ۳) است. به‌علاوه درایه‌های $\varphi(A)$ توابع چندجمله‌ای از درایه‌های A هستند. پس φ یک نمایش چندجمله‌ای از $\mathrm{GL}(۲,\mathbb{C})$ است. اگر $A \in \mathrm{GL}(۲,\mathbb{C})$ دارای ویژه‌مقدارهای x و y باشد، آنگاه می‌توان نشان داد که $\varphi(A)$ دارای ویژه‌مقدارهای $x^۲$ و xy و $y^۲$ است. مشخصهٔ [سرشت] φ را با $\mathrm{char}\,\varphi$ نشان می‌دهیم و برابر اثر $\varphi(A)$ به عنوان تابعی از ویژه‌مقدارهای x و y از A تعریف می‌کنیم. بنابراین

$$\mathrm{char}\,\varphi = x^۲ + xy + y^۲$$

برای اولین بار شور نشان داد که نمایشهای چندجمله‌ای $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ کاملاً تحویل‌پذیرند، یعنی به‌صورت مجموع مستقیم نمایشهای تحویل‌ناپذیر هستند. نمایشهای چندجمله‌ای تحول‌ناپذیر متمایز $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ توسط افرازهای

$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ با حداکثر طول n که $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ و $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq 0$، اندیس‌گذاری می‌شوند. به‌علاوه $\mathrm{char}\,\varphi_\lambda$ تابع متقارن $s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ است که نخست کوشی و ژاکوبی آن را تعریف کردند و اکنون به نام تابع شور شناخته می‌شود. یک خاصیت معروف توابع شور پایدار بودن آنهاست:

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_n, 0) = s_\lambda(x_1, \ldots, x_n)$$

به همین دلیل می‌توانیم فرض کنیم $n \to \infty$ و تابع شور s_λ را با تعداد نامتناهی متغیر x_1، x_2، ... در نظر بگیریم، و وقتی با $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ سروکار داریم متغیرها را به x_1، ...، x_n محدود کنیم. برای اطلاعات بیشتر از توابع متقارن و نظریهٔ نمایش $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$، مراجع [۸]، [۳۰]، [۳۷] را ببینید.

اگر $A : V \to V$ و $B : W \to W$ تبدیلاتی خطی روی فضاهای برداریِ متناهی‌بعد باشند، آنگاه

$$\mathrm{tr}(A \otimes B) = \mathrm{tr}(A) \cdot \mathrm{tr}(B)$$

که در آن $A \otimes B$ نشان‌دهندهٔ حاصلضرب تانسوری (یا حاصلضرب کرونکر) A و B است که روی $V \otimes W$ عمل می‌کند. پس اگر λ، μ و ν افرازهایی باشند و

$$c^\lambda_{\mu\nu} = \mathrm{mult}\,(\varphi_\lambda, \varphi_\mu \otimes \varphi_\nu)$$

چندگانگی φ_λ در حاصلضرب تانسوری $\varphi_\mu \otimes \varphi_\nu$ (که به‌صورت مجموع مستقیم نمایشهای تحویل‌ناپذیر نوشته شده) باشد، آنگاه

$$s_\mu s_\nu = \sum_\lambda c^\lambda_{\mu\nu} s_\lambda \, .$$

اعداد صحیح نامنفی $c^\lambda_{\mu\nu}$ به نام ضرایب لیتلوود-ریچاردسن شناخته می‌شوند و دستور لیتلوود-ریچاردسن [۸][1]، [۳۰][2]، [۳۷][3] بیانی ترکیبیاتی از آنهاست (که ما در اینجا به آن نمی‌پردازیم). اگر m عددی صحیح مثبت و $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ یک افراز باشد، می‌نویسیم

$$m\lambda = (m\lambda_1, m\lambda_2, \ldots).$$

حدسیهٔ اشباع‌سازی. اگر $c^{m\lambda}_{m\mu, m\nu} \neq 0$، آنگاه $c^\lambda_{\mu\nu} \neq 0$.

حدسیهٔ اشباع‌سازی را اخیراً آلن ناتسن و ترنس تائو [۲۶]، [۲۷] با استفاده از یک مدل جدید کندوی زنبور عسل برای بیان ضرایب لیتلوود-ریچاردسن اثبات کرده‌اند. توصیف زیبایی از این اثبات توسط اندرس بوخ [۵] ارائه شده است و ویلیام فولتن [۹] نیز بررسی مبسوطی از همهٔ مطالب این بخش و (و مطالبی فراتر از آن) عرضه کرده است. اثبات دیگری از حدسیهٔ اشباع‌سازی بر اساس نمایشهای ارتعاشات بعداً توسط هارم درکسن و جرزی وایمن ارائه شد [۷].

چرا اثبات حدسیهٔ اشباع‌سازی دستاورد مهمی است؟ جواب این است که این حدسیه به طرز شگفت‌انگیزی با چند موضوع دیگر در ارتباط است. اولین موضوع، ویژه‌مقدارهای ماتریسهای ارمیتی است. فرض کنید A، B، و C ماتریسهای $n \times n$ ارمیتی باشند. پس ویژه‌مقدارهای این ماتریسها حقیقی هستند. ویژه‌مقدارهای A را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\alpha : \alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$$

1. [8, Ch.5] 2. [30, §I.9] 3. [37, Appendix A1.3]

و به‌طور مشابه، β و γ را برای B و C تعریف می‌کنیم. در این مورد، مسألهٔ زیر توجه زیادی را به خود جلب کرده است.

مسأله. همهٔ سه‌تاییهای (α, β, γ) را مشخص کنید به‌طوری که ماتریسهای ارمیتی A، B و C با ضابطهٔ $A + B = C$ وجود داشته باشند که ویژه‌مقدارهای آنها به‌ترتیب α، β و γ باشند.

با اِعمال تابع اثر دیده می‌شود که

$$\sum \gamma_i = \sum \alpha_i + \sum \beta_i \tag{1}$$

پس از تحقیقات زیادِ عده‌ای از محققان، هورن[1] حدسیه‌ای دربارهٔ مشخص‌سازی کامل سه‌تاییهای (α, β, γ) مطرح کرد، که شامل (۱) و نابرابریهای خطی به‌صورت

$$\sum_{k \in K} \gamma_k \leq \sum_{i \in I} \alpha_i + \sum_{j \in J} \beta_j \tag{2}$$

به‌ازای مجموعه‌های خاص

$$I, J, K \subset \{1, \cdots, n\}, \qquad |I| = |J| = |K|$$

است. مثلاً به‌ازای $n = 2$ نابرابری هورن (که به‌سادگی می‌توان نشان داد که به همراه (۱) همهٔ سه‌تاییهای (α, β, γ) را در این حالت مشخص می‌کند) به‌صورت زیر در می‌آید

$$\gamma_1 \leq \alpha_1 + \beta_1$$
$$\gamma_2 \leq \alpha_2 + \beta_1$$
$$\gamma_2 \leq \alpha_1 + \beta_2$$

به‌ازای $n = 3$ دوازده نابرابری به‌صورت زیر وجود دارد

$$\gamma_1 \leq \alpha_1 + \beta_1$$
$$\gamma_2 \leq \min(\alpha_1 + \beta_2, \alpha_2 + \beta_1)$$
$$\gamma_3 \leq \min(\alpha_1 + \beta_3, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_1)$$
$$\gamma_1 + \gamma_2 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2$$
$$\gamma_1 + \gamma_3 \leq \min(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_3, \alpha_1 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2)$$
$$\gamma_2 + \gamma_3 \leq \min(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \beta_3, \alpha_1 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_3, \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2)$$

ارتباط بین حدسیهٔ اشباع‌سازی و حدسیهٔ هورن را الکساندر کلیاچکو نشان داده است [۲۴].

قضیه. حدسیهٔ اشباع‌سازی حدسیهٔ هورن را نتیجه می‌دهد.

ارتباط دقیق‌تری بین ضرایب لیتلوود-ریچاردسن و ویژه‌مقدارهای ماتریسهای ارمیتی که در قضیهٔ زیر ارائه می‌شود به‌طور ضمنی در کارهای

1. A. Horn

هکمن [۲۲] و به‌صورت صریح‌تر در کارهای کلیاچکو [۲۴] مطرح شده است.

قضیه. فرض کنید α، β و γ افرازهایی با طولِ حداکثر n باشند، حدسیهٔ اشباع‌سازی نتیجه می‌دهد که دو شرط زیر معادل‌اند

- $c^{\gamma}_{\alpha\beta} \neq 0$
- ماتریسهای $n \times n$ ارمیتی $A + B = C$ با ویژه‌مقدارهای α، β و γ وجود دارند.

چون رابطهٔ (۲) مرکب از نابرابریهای خطی است، دو قضیهٔ بالا نشان می‌دهند که ناصفر بودن $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$ وابسته به نابرابریهای (صریح) خطی بین مختصات α، β و γ است. بنابراین به‌ازای n ثابت، نقطه‌های $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^{3n}$ که برای آنها $c^{\gamma}_{\alpha\beta} \neq 0$، نقاط با مختصات صحیح در یک مخروط محدب هستند. پس موضوع ترکیبیات چندوجهی ارتباط نزدیکی با نظریهٔ ضرایب لیتلوودـریچاردسن پیدا می‌کند. برای اطلاعات بیشتر از این دیدگاه، مرجع [۴۱] را ببینید.

قضایایی که در بالا ذکر شدند با ماتریسهای ارمیتی سروکار دارند. می‌دانیم که دقیقاً همین قضایا برای ردهٔ ماتریسهای حقیقی متقارن برقرارند [۹][1].

وضعیتهای دیگری نیز هستند که ضرایب لیتلوودـریچاردسن در آنها نقش جالب‌توجهی ایفا می‌کند. این وضعیتها در [۹] به‌طور کامل بررسی شده‌اند. ما در اینجا به یکی از آنها اشاره می‌کنیم. برای افراز داده‌شدهٔ $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ و عدد اول p، فرض کنید G یک pـگروه (متناهی) آبلی از نوع λ باشد، یعنی

$$G \cong (\mathbb{Z}/p^{\lambda_1}\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/p^{\lambda_2}\mathbb{Z}) \times \cdots$$

برای افرازهای داده‌شدهٔ دیگر μ و ν، فرض کنید $g^{\lambda}_{\mu\nu}(p)$ نشان‌دهندهٔ تعداد زیرگروههای H از G از نوع μ باشد به‌طوری که گروه خارج‌قسمتی G/H از نوع ν است.

قضیه. (الف) $g^{\lambda}_{\mu\nu}(p)$ یك تابع چندجمله‌ای از p با ضرایب صحیح است،

(ب) به‌ازای هر عدد اول p، $g^{\lambda}_{\mu\nu}(p) \neq 0$ اگر و تنها اگر $c^{\lambda}_{\mu\nu} \neq 0$.

چندجمله‌ای $g^{\lambda}_{\mu\nu}(t)$ به خاطر کارهای پیشگامانهٔ فیلیپ هال [۲۰] چندجمله‌ای هال نامیده می‌شود. هال قضیهٔ بالا را به‌دست آورده بود، جز اینکه در قسمت (ب) فقط نشان داده بود $g^{\lambda}_{\mu\nu}(t)$ به عنوان یک چندجمله‌ای از t صفر است اگر و تنها اگر $c^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$. متعاقباً میلر میلی [۳۱] نشان داد که چندجمله‌ای $g^{\lambda}_{\mu\nu}(t+1)$ دارای ضرایب نامنفی است و (ب) را از این نتیجه گرفت. برای ملاحظهٔ توصیفی از ویژگیهای بنیادی چندجمله‌ایهای هال مرجع [۳۰][2] را ملاحظه کنید. نظریهٔ چندجمله‌ایهای هال در حالت کلی‌تر برای حلقهٔ اعداد صحیح (یعنی ترتیب ماکسیمال یکتا) از یک جبر تقسیم با رتبهٔ متناهی روی یک میدان $\mathfrak{p}$ـادیک [۳۰][3] یا حتی کلی‌تر از آن، برای مشبکه‌های qـاولیه [۳۸][4] برقرار است.

1. [9, Thm. 3] 2. [30, Chs. II & III. 2]
3. [30, Remark. 3, p. 179] 4. [38, Thm. 4.81]

۳. حدسیه‌های $n!$ و $(n+1)^{n-1}$

حدسیه‌های $n!$ و $(n+1)^{n-1}$ دربارهٔ عمل گروه متقارن $\mathfrak{S}_n$ روی دو مجموعهٔ n متغیرهٔ $(x_1, \dots, x_n)$ و $(y_1, \dots, y_n)$ است. برای فهم بهتر این حدسیه‌ها اطلاعاتی از نحوهٔ عمل این گروه روی یک مجموعهٔ n متغیره مفید است. پس، نخست این حالت را در نظر می‌گیریم (که برای آن، اثباتها بسیار ساده‌ترند). $\mathfrak{S}_n$ روی حلقهٔ چندجمله‌ایهای $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ با عوض کردن جای متغیرها عمل می‌کند. یعنی برای جایگشت w در $\mathfrak{S}_n$ فرض می‌کنیم $w \cdot x_i = x_{w(i)}$ و این عمل را به‌طرز واضحی که انتظار می‌رود به همهٔ متغیرهای چندجمله‌ای تسری می‌دهیم. فرض کنیم

$$A^{\mathfrak{S}_n} = \{f \in A : w \cdot f = f \quad \forall w \in \mathfrak{S}_n\}$$

حلقهٔ ناورداهای عمل $\mathfrak{S}_n$ روی A باشد. چندجمله‌ایهای ناوردای $f \in A^{\mathfrak{S}_n}$ چندجمله‌ایهای متقارن با متغیرهای x_1، ...، x_n هستند (روی $\mathbb{C}$). «قضیهٔ بنیادی توابع متقارن» حاکی است

$$A^{\mathfrak{S}_n} = \mathbb{C}[e_1, \dots, e_n]$$

که همان حلقهٔ چندجمله‌ایها با توابع متقارن مقدماتی است که به‌طور جبری مستقل‌اند. این توابع عبارت‌اند از

$$e_k = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} x_{i_1} \cdots x_{i_k}$$

فرض کنید n داده شده است. حلقهٔ زیر را تعریف می‌کنیم

$$R = A/(e_1, \dots, e_n)$$

حلقهٔ R خاصیت مدرج بودن معمولی را از A به ارث می‌برد، یعنی

$$R = R_0 \oplus R_1 \oplus \cdots$$

که در آن R_i توسط (تصاویر) همهٔ چندجمله‌ایهای همگن درجهٔ i از متغیرهای x_1، ...، x_n تولید می‌شود. چون مولدهای $R^{\mathfrak{S}_n}$ یعنی e_1، ...، e_n از درجات ۱، ۲، ... و n استقلال جبری دارند، به راحتی دیده می‌شود که

$$\dim_{\mathbb{C}} R = n!$$

و در حالت کلی

$$\sum_i \dim_{\mathbb{C}}(R_i) q^i = (1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+\cdots+q^{n-1}) \tag{3}$$

که تعمیمی از $n!$ است. [در حالت خاص $q = 1$ حاصل همان $n!$ است.ـم.].

چون ایده‌آل $(e_1, \dots, e_n)$ از R یک ایده‌آل $\mathfrak{S}_n$ـناورداست، پس $\mathfrak{S}_n$ روی R عمل می‌کند. به‌علاوه، این عمل درجه‌بندی R را حفظ می‌کند یعنی $w \cdot R_i = R_i$ به‌ازای هر $w \in \mathfrak{S}_n$ برقرار است. بنابراین R یک $\mathfrak{S}_n$ـمدول مدرج است. برای پالایش (۳) می‌توان چندگانگی هر نمایش

تحویل‌ناپذیر $\mathfrak{S}_n$ در R_i را بررسی کرد. توصیف عمل روی کل R ساده است (اثبات آن نیز مشکل نیست): R نمایش منظم $\mathfrak{S}_n$ را به‌دست می‌دهد؛ یعنی چندگانگی هر نمایش تحویل‌ناپذیر درجه (یا بعد) آن است.

برای توصیف ساختار $\mathfrak{S}_n$-مدولی R_i، باید اطلاعاتی از نمایشهای تحویل‌ناپذیر (متمایز) $\mathfrak{S}_n$ داشته باشیم. این نمایشها توسط افرازهای λ از n اندیس‌گذاری می‌شوند (که با $\lambda \vdash n$ نشان داده می‌شود) یعنی $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$ که $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_\ell > 0$ و $\sum \lambda_i = n$. بعد $\mathfrak{S}_n$-مدول تحویل‌ناپذیر M_λ که با $\lambda \vdash n$ اندیس‌گذاری شده است، با f^λ نمایش داده می‌شود و برابر تعداد تابلوهای استاندارد یانگ (SYT) با شکل λ است، یعنی تعداد حالتهایی که می‌توان اعداد ۱، ۲، ...، n را (بدون تکرار) در جدولی با شکل λ چید (جدولِ با شکل λ یعنی جدولی که سطر iام آن λ_i درایه دارد و اولیه درایهٔ سمت چپ همهٔ سطرها زیر هم قرار گرفته‌اند) به‌طوری که اعداد سطرها از چپ به راست و ستونها از بالا به پایین صعودی باشند. مثلاً ۵ تابلو استاندارد یانگ با شکل (۳, ۲) وجود دارد. یعنی $f^{(3,2)} = 5$.

۱ ۲ ۳	۱ ۲ ۴	۱ ۲ ۵	۱ ۳ ۴	۱ ۳ ۵
۴ ۵	۳ ۵	۳ ۴	۲ ۵	۲ ۴

یک فرمول دقیق و ساده به نام فرمول طول قلاب برای به‌دست آوردن f^λ وجود دارد (مثلاً به مراجع [۳۰][1] و [۳۷][2] نگاه کنید).

چون R نمایش منظم $\mathfrak{S}_n$ را به‌دست می‌دهد، چندگانگی M_λ در R برابر f^λ است. پس می‌توان انتظار داشت که چندگانگی M_λ در R_i برابر تعداد SYTهای T با شکل λ باشد که خاصیتی اضافی وابسته به i دارند. این خاصیت مقدار اندیس بزرگ T است که با $\mathrm{MAJ}\,(T)$ نشان داده می‌شود. این مقدار را به این‌صورت تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{MAJ}\,(T) = \sum_{\text{است } i \text{ پایین‌تر از } T \text{ در } i+1} i$$

که در آن جمع روی همهٔ iهایی صورت می‌گیرد که عدد $i+1$ در جدول T در سطری پایین‌تر از سطر مربوط به i قرار دارد. به عنوان مثال SYT با شکل (۳, ۲, ۲) که در زیر نشان داده شده دارای $\mathrm{MAJ}\,(T) = 2+3+6 = 11$ است:

$$T = \begin{array}{lll} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & \\ 4 & 7 & \end{array}$$

قضیهٔ زیر را لوستیگ[3] (در اثری چاپ نشده) و استنلی [۳۶][4] مستقلاً به‌دست آورده‌اند.

قضیه. فرض کنید $\lambda \vdash n$. در این‌صورت

$$\mathrm{mult}\,(M_\lambda, R_i) = \#\{\mathrm{SYT}\ T : \mathrm{shape}\,(T) = \lambda, \mathrm{MAJ}\,(T) = i\}$$

(mult و shape به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ چندگانگی و شکل‌اند.)

مثلاً به‌ازای $n = 5$ سه SYT با ۵ درایه و اندیس بزرگ ۳ وجود دارد:

۱	۲	۳	۵	۱	۲	۳	۱	۴	۵
۴			۴	۵			۲		
							۳		

نتیجه می‌شود که

$$R_3 \cong M_{41} \oplus M_{32} \oplus M_{311}.$$

توصیف دیگری از R ارائه شده که به تعمیم متفاوتی به دو مجموعهٔ n متغیری می‌انجامد. به‌ازای هر چند جمله‌ای دادهٔ‌شدهٔ $P(x_1, \ldots, x_n)$ روی $\mathbb{C}$، فضای ∂P را فضای برداری مختلطی تعریف می‌کنیم که توسط P و تمام مشتقات جزئی آن از همهٔ مرتبه‌ها تولید می‌شود. مثلاً $\partial(x+y)^2$ سه‌بعدی است و یکی از پایه‌های آن $\{(x+y)^2, x+y, 1\}$ است. فرض کنید

$$V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \tag{4}$$

به‌راحتی دیده می‌شود که

$$R \cong \partial V_n\,.$$

اگر دو طرف به عنوان $\mathfrak{S}_n$-مدولهای مدرج در نظر گرفته شوند. به‌ویژه $\dim\,(\partial V_n) = n!$ و ∂V_n نمایش منظم $\mathfrak{S}_n$ را دارد.

آدریانو گارسیا و مارک هیمن ایدهٔ تعمیم ساختارهای فوق را از R و ∂V_n به دو مجموعه با n متغیر $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, \ldots, y_n)$ داشتند. برای تعمیم اول، فرض کنید $\mathfrak{S}_n$ به‌صورت قطری روی $B = \mathbb{C}[x, y]$ عمل می‌کند. یعنی

$$w \cdot x_i = x_{w(i)} \quad ، w \cdot y_i = y_{w(i)}\,.$$

فرض کنید

$$B^{\mathfrak{S}_n} = \{f \in B : w \cdot f = f \quad \forall w \in \mathfrak{S}_n\}$$

حلقهٔ ناورداهای این عمل $\mathfrak{S}_n$ روی B باشد. دیگر چنین نیست که $B^{\mathfrak{S}_n}$ توسط عناصر جبری-مستقل تولید شود (برای کسب اطلاعات عمومی از حلقهٔ ناورداهای گروههای متناهی مثلاً به مراجع [۳۵] و [۳۶] مراجعه کنید). ولی باز می‌توانیم تعریف کنیم

$$R^{(2)} = S/I$$

که در آن I ایده‌آلی از B است که توسط عناصری از $B^{\mathfrak{S}_n}$ که دارای جملهٔ ثابت صفرند تولید می‌شود. حدسیهٔ $(n+1)^{n-1}$ گارسیا و هیمن [۱۲]، [۱۳] اخیراً توسط هیمن [۱۹] اثبات شد. این اثبات مبتنی بود بر روشهایی

1. [30, Exam. I.5.2] 2. [37, Cor. 7.21.6] 3. Lusztig
4. [36, Prop. 4.11]

که او برای اثبات حدسهٔ $n!$ که در زیر مطرح می‌شود، به‌وجود آورده بود و همچنین بر قضیهٔ بریجلند[1]، کینگ و رید[2] برای تناظر مک‌کی[3].

قضیه (حدسهٔ $(n+1)^{n-1}$). $\dim_{\mathbb{C}} R^{(2)} = (n+1)^{n-1}$.

همان‌طور که R دارای ساختار اضافی یک $\mathfrak{S}_n$ـمدول مدرج بود، $R^{(2)}$ نیز یک $\mathfrak{S}_n$ـمدول دو مدرج است. به عبارت دیگر

$$R^{(2)} = \bigoplus_{i,j} R^{(2)}_{ij} \qquad \text{(مجموع مستقیم فضاهای برداری)}$$

که در آن $R^{(2)}_{ij}$ زیرفضایی از $R^{(2)}$ است که توسط (تصاویر) چندجمله‌ایهایی تولید می‌شود که نسبت به متغیر x همگن از درجهٔ i و نسبت به متغیر y همگن از درجهٔ j هستند؛ به‌علاوه $R^{(2)}_{ij}$ تحت عمل $\mathfrak{S}_n$ روی $R^{(2)}$ ناورداست. مثلاً به‌ازای $n = 4$ محاسبه نشان می‌دهد که

$$R^{(2)}_{2,1} \cong 2M_{211} \oplus M_{22} \oplus M_{31}$$

و به‌ویژه

$$\dim_{\mathbb{C}} R^{(2)}_{2,1} = 2f^{211} + f^{22} + f^{31} = (2 \times 3) + 2 + 3 = 11$$

گارسیا و هیمن در [۱۱] (همچنین به [۱۷][4] نگاه کنید) فرمول پیچیده‌ای برای $\operatorname{mult}(M_\lambda, R^{(2)}_{ij})$ حدس زده‌اند. در واقع اثبات هیمن از حدسهٔ $(n+1)^{n-1}$، که در بالا به آن اشاره شد، این حدسهٔ قوی‌تر گارسیا و هیمن را ثابت می‌کند. نتیجه‌ای از کارهای هیمن در اینجا می‌آید [۱۱]، [۱۷، ص. ۲۴۶]. فرض کنید Γ زیرفضای پادناوردای $R^{(2)}$ باشد، یعنی

$$\Gamma = \{f \in R^{(2)} : w \cdot f = \operatorname{sgn}(w) f \quad \forall f \in \mathfrak{S}_n\}$$

که در آن $\operatorname{sgn}(w)$ نشان‌دهندهٔ علامت جایگشت w است. در این صورت

$$\dim_{\mathbb{C}} \Gamma = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

که یک عدد کاتالان است. جیمز هاگلاند [۱۶] صورتی ترکیبیاتی از دو مدرج بودن Γ یعنی بیان ترکیبیاتی اعداد $\dim_{\mathbb{C}} T_{ij}$ را حدس زد و گارسیا و هاگلاند [۱۰] آن را اثبات کردند. برای کسب اطلاعاتی دربارهٔ حضور اعداد کاتالان (و اعداد مرتبط با آن) در بسیاری از قسمتهایی از ریاضیات به مرجع [۳۷][5] و تکملهٔ آن در `WWW-math.mit.edu/~rstan/ec.html` مراجعه کنید.

عدد $\dim_{\mathbb{C}} R^{(2)} = (n+1)^{n-1}$ چند تعبیر ترکیبیاتی دارد، مثلاً تعداد جنگلهای مرکب از درختان ریشه‌دار با n رأس [۳۷][6] یا تعداد تابعهای پارکینگ به طول n [۳۷][7]. طبیعتاً این پرسش مطرح است که آیا می‌توان تعبیری ترکیبیاتی از $\dim_{\mathbb{C}} R^{(2)}_{ij}$ به‌دست داد که تعبیر شناخته‌شده‌ای از $(n+1)^{(n-1)}$ را دقیق‌تر کند یا نه. این پرسش هنوز پاسخی نیافته است.

برمی‌گردیم به دومین تعمیم از R که گارسیا و هیمن آن را ارائه کرده‌اند. نخست لازم است تعمیمی از ضرب واندرموند (۴) به دو مجموعه از متغیرها

1. Bridgeland 2. Reid 3. McKay 4. [17, Conj. 7.5]

5. [37, Exer. 6.19-6.38] 6. [37, Prop. 5.3.2]

7. [37, Exer. 5.49]

را تعریف کنیم. فرض کنید $\mu \vdash n$. خانه‌های جدول μ را با این فرض که $(i-1, j-1)$ مختصات خانهٔ واقع در سطر iام و ستون jام باشد، مختصات‌بندی می‌کنیم. مثلاً مختصات خانه‌های جدول $\mu = (3,2)$ به‌صورت زیر است.

۰,۰	۰,۱	۰,۲
۱,۰	۱,۱	

فرض کنید (i_1, j_1)، ...، (i_n, j_n)، به‌ترتیبی، مختصات خانه‌های جدول μ باشند؛ دترمینان $n \times n$ زیر را تعریف می‌کنیم

$$D_\mu = \left| x_r^{i_s}\, y_r^{j_s} \right|_{r,s=1,\dots,n}$$

برای نمونه

$$D_{32} = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 & x_1 & x_1y_1 \\ 1 & y_2 & y_2^2 & x_2 & x_2y_2 \\ 1 & y_3 & y_3^2 & x_3 & x_3y_3 \\ 1 & y_4 & y_4^2 & x_4 & x_4y_4 \\ 1 & y_5 & y_5^2 & x_5 & x_5y_5 \end{vmatrix}$$

توجه کنید که اگر μ مرکب از یک سطر باشد (یعنی μ فقط دارای یک بخش n باشد) آنگاه $D_\mu = V_n(y)$، و اگر μ مرکب از یک ستون باشد آنگاه $D_\mu = V_n(x)$.

حدسهٔ $n!$ گارسیا و هیمن [۱۲]، [۱۳]، که بعدها توسط هیمن اثبات شده است [۱۸]، به‌صورت زیر است.

قضیه (حدسهٔ $n!$). به‌ازای هر $\mu \vdash n$ داریم

$$\dim_{\mathbb{C}} \partial D_\mu = n!$$

فضای ∂D_μ مانند $R^{(2)}$ یک $\mathfrak{S}_n$ـمدول دو مدرج است. به‌ازای هر $i, j \geq 0$ و $\lambda \vdash n$ می‌توان به دنبال یک «توصیف» از عدد صحیح $\operatorname{mult}(M_\lambda, (D_\mu)_{ij})$ بود. گارسیا و هیمن [۱۲]، [۱۳] چنین توصیفی ارائه کردند و هیمن [۱۷][1] نشان داد که می‌توان آن را از حدسهٔ $n!$ به‌دست آورد. در توصیف گارسیا-هیمن از نظریهٔ توابع متقارن مک‌دانلد استفاده می‌شود که تعمیمی از توابع شور است و توسط مک‌دانلد ارائه‌شده [۲۹]، [۳۰][2] و در حال حاضر در زمینه‌های مختلفی مانند نظریهٔ نمایش گروههای کوانتومی، جبرهای آفین هکه، و مدل کالگرو-سادرلند[3] در فیزیک ذرات اهمیت زیادی دارد (برای دیدن مراجع به [۱۸] مراجعه کنید). در اینجا ما توابع متقارن مک‌دانلد را تعریف نخواهیم کرد. ولی خلاصه‌ای از نتیجهٔ هیمن را می‌آوریم.

فرض کنید λ، $\mu \vdash n$. ضریب $x^\mu = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} \cdots$ در تابع شور s_λ که به عدد کوستکا[4] موسوم است و با $K_{\lambda\mu}$ نشان داده می‌شود، تعبیر ترکیبیاتی ساده‌ای دارد که با استفاده از تابلوهای استاندارد یانگ ارائه می‌شود [۳۰][5]، [۳۷][6]. در نظریهٔ چندجمله‌ایهای مک‌دانلد، تعمیم دوپارامتری $K_{\lambda\mu}(q, t)$

1. [17, Thm. 5.4] 2. [30, Ch.VI] 3. Calegero-Sutherland

4. Kostka 5. [30, (5.13)] 6. [37, §7.10]

از عدد کوستکای $K_{\lambda\mu}=K_{\lambda\mu}(۰,۱)$ به‌طور طبیعی ظاهر می‌شود. از پیش معلوم است که $K_{\lambda\mu}(q,t)$ تابعی گویا از q و t است، ولی مک‌دانلد حدس زد که این تابع یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح نامنفی است. در سالهای ۱۹۹۶ تا ۱۹۹۸ اثباتهای متعددی از این موضوع ارائه شد که $K_{\lambda\mu}(q,t)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح است. ولی نامنفی بودن ضرایب به‌صورت یک مسألهٔ حل نشده باقی ماند تا اینکه هیمن این نکته جالب را نشان داد که $K_{\lambda\mu}(q,t)$ اساساً سری هیلبرت دو مدرج مؤلفهٔ λـایزوتیپیک D_μ است. به‌صورت دقیق‌تر،

$$t^{b(\mu)}K_{\lambda\mu}(q,۱/t)=\sum_{r,s\geq ۰}\mathrm{mult}\,(M_\lambda,(D_\mu)_{r,s})\,t^r q^s$$

که در آن $b(\mu)=\sum(i-۱)\mu_i$. این فرمول نامنفی بودن ضرایب $K_{\lambda\mu}(q,t)$ را مشخص می‌کند، هر چند هنوز تعبیر ترکیبیاتی این ضرایب مسأله‌ای حل نشده است.

اثبات هیمن بر پایهٔ هندسهٔ گرتهٔ[۱] هیلبرت $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^۲)$ روی n نقطه در صفحه است. (کلودیو پروچسی[۲] امکان استفادهٔ ثمربخش از گرتهٔ هیلبرت را به هیمن پیشنهاد کرد.) فرض کنید X و Y دو متغیر باشند. می‌توان $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^۲)$ را به‌صورت مجموعهٔ زیر تعریف کرد

$$\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^۲)=\{I\subseteq\mathbb{C}[X,Y]:\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[X,Y]/I=n\}$$

یعنی همهٔ ایده‌آلهای I از $\mathbb{C}[X,Y]$ به‌طوری که حلقهٔ خارج‌قسمتی $\mathbb{C}[X,Y]/I$ یک فضای برداری nبعدی باشد. فرض کنید $\mathcal{Z}=\{z_۱,\ldots,z_n\}$ مجموعه‌ای از n نقطهٔ متمایز در $\mathbb{C}^۲$ باشد. همچنین فرض کنید

$$I_{\mathcal{Z}}=\{f\in\mathbb{C}[X,Y]:f(z_۱)=\cdots=f(z_n)=۰\}$$

در این صورت $I_{\mathcal{Z}}$ یک ایده‌آل $\mathbb{C}[X,Y]$ است که $\mathbb{C}[X,Y]/I_{\mathcal{Z}}$ می‌تواند با فضای توابع $f:\mathcal{Z}\to\mathbb{C}$ یکی فرض شود. بنابراین $I_{\mathcal{Z}}\in\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^۲)$. از اینجا معلوم می‌شود که چرا $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^۲)$ را گرتهٔ هیلبرت روی n نقطه در صفحه نامیده‌اند(این گرته بستار فضای تمام زیرمجموعه‌های nعضوی $\mathbb{C}^۲$ است). در واقع $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^۲)$ ساختار یک واریتهٔ جبری هموار و تحویل‌ناپذیر از بعد $۲n$ را دارد.

ارتباط جالب $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^۲)$ و حدسیه‌های $n!$ و $(n+۱)^{n-۱}$ آنقدر جنبهٔ فنی دارد که نمی‌توان آن را در اینجا توضیح داد. ولی بگذارید یکی دو راهنمایی غیر دقیق ارائه دهیم. فرض کنید $H^n=\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^۲)$. برای افراز دادهشدهٔ $\mu\vdash n$، U_μ را مجموعهٔ همهٔ ایده‌آلهای I در H^n بگیرید به‌طوری که پایه‌ای از $\mathbb{C}[x,y]/I$ متشکل از (تصاویر) تک‌جمله‌ایهای x^hy^k وجود داشته باشد که در آن (h,k)ها مختصات مربعات نمودار μاند. در این صورت مجموعه‌های U_μ باز و آفین هستند و H^n را می‌پوشانند. این مطلب امکان استفاده از H^n در حدسیهٔ $n!$ را مطرح می‌کند. به‌علاوه، به‌ازای هر $I\in H^n$ روشی طبیعی برای انتساب یک مجموعهٔ چندگانهٔ nعضوی $\pi(I)\subset\mathbb{C}^۲$ وجود دارد. مجموعه‌های چندگانهٔ nعضوی در $\mathbb{C}^۲$ واریتهٔ آفین $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^۲)$ را تشکیل می‌دهند، یعنی

$$\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^۲)=(\mathbb{C}^۲)^n/\mathfrak{S}_n=\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[x_۱,\ldots,x_n,y_۱,\ldots,y_n]^{\mathfrak{S}_n}$$

که این هم امکان استفاده از H^n در حدسیهٔ $(n+۱)^{n-۱}$ را نشان می‌دهد. برای ملاحظهٔ تفصیل بیشتر، مقالات [۱۷] و [۱۸] را ببینید.

یک سؤال طبیعی این است که آیا می‌توان نتایج گارسیا و هیمن را به بیش از دو مجموعه از متغیرها تعمیم داد؟ تاکنون همهٔ حدسهای بدیهی در این مورد غلط بوده‌اند. مشکل در اینجاست که گرتهٔ هیلبرت $\mathrm{Hilb}^n(\mathbb{C}^k)$ به‌ازای $k>۲$ هموار نیست.

حدسیه‌های $n!$ و $(n+۱)^{n-۱}$ فقط سرآغاز سلسله حدسیه‌های چشمگیری است که گارسیا، هیمن و همکاران آنان ارائه کرده‌اند. برای این نمونه، ما دترمینان D_λ را تعریف می‌کنیم که λ افرازی از n است و به عنوان زیرمجموعهٔ خاصی از $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}=\{۰,۱,۲,\ldots\}$) در نظرگرفته شده است. دقیقاً به همان روش می‌توان D_X را برای هر زیرمجموعهٔ nعضوی X از $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ تعریف کرد. برگرون، گارسیا و تسلر [۳] حدس می‌زنند (و در برخی حالتهای خاص ثابت می‌کنند)که برای رده‌های متعددی از زیرمجموعه‌های X عدد صحیح مثبت k_X وجود دارد که $\dim_{\mathbb{C}}(\partial D_X)=k_Xn!$؛ و در واقع ∂D_X، به عنوان $\mathfrak{S}_n$ـمدول، k_X نسخه از نمایش منظم را به‌دست می‌دهد.

۴. بلندترین زیردنبالهٔ صعودی

فرض کنید $w=a_۱a_۲\cdots a_n\in\mathfrak{S}_n$. یک زیردنبالهٔ صعودی w زیردنباله‌ای مانند $a_{i_۱}a_{i_۲}\cdots a_{i_k}$ است که $a_{i_۱}<a_{i_۲}<\cdots<a_{i_k}$. فرض کنید $\mathrm{is}_n(w)$ نشان‌دهندهٔ طول بلندترین زیردنبالهٔ صعودی $w\in\mathfrak{S}_n$ باشد. مثلاً اگر $w=۲۷۴۱۶۳۹۵۸\in\mathfrak{S}_۹$ آنگاه $\mathrm{is}_۹(w)=۴$ که نشان‌دهندهٔ طول زیردنباله‌های ۲۴۶۹ و ۱۳۵۸ است. اخیراً توجه زیادی به رفتار تابع $\mathrm{is}_n(w)$ شده است. مقاله‌ای مروری دربارهٔ بیشترکارهای انجام‌شده در این مورد توسط پرسی دایفت ارائه شده است [۶].

نخستین مسألهٔ جالب توجه این است که مقدار مورد انتظار $E(n)$ از $\mathrm{is}_n(w)$ وقتی که w به‌طوریکنواخت روی $\mathfrak{S}_n$ تغییر می‌کند چیست. بنابراین

$$E(n)=\frac{۱}{n!}\sum_{w\in\mathfrak{S}_n}\mathrm{is}_n(w)$$

با یک بررسی مقدماتی نشان داده می‌شود که

$$\frac{۱}{۲}\sqrt{n}\leq E(n)\leq e\sqrt{n}$$

و همرزلی [۲۱][۱] در سال ۱۹۷۲ با استفاده از نظریهٔ ارگودیک زیرجمعی نشان داد که حد زیر وجود دارد

$$c=\lim_{n\to\infty}\frac{E(n)}{\sqrt{n}}$$

ورشیک و کروف [۴۰] در سال ۱۹۷۷ نشان دادند که $c=۲$ (لوگان و شپ [۲۸] نیز مستقلاً جهت مشکل $c\geq ۲$ را ثابت کرده‌اند).

1. scheme 2. Procesi

1. [21, Thm. 4]

اثبات ورشیک‌ـکروف و لوگان‌ـشپ بر پایهٔ اتحاد

$$E(n)=\frac{1}{n!}\sum_{\lambda\vdash n}\lambda_1(f^\lambda)^2 \qquad (۵)$$

است که در آن $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots)$ و f^λ تعداد SYTهای به شکل λ است که در بخش ۳ مورد بحث قرار گرفت. رابطهٔ (۵) از آنِ کریگ شنستد [۳۴] و نتیجهٔ بلافصل الگوریتم رابینسن‌ـشنستد‌ـکنوت است؛ مرجع [۳۷][1] را نیز ملاحظه کنید.

دستاورد ورشیک‌ـکروف و لوگان‌ـشپ تنها رفتار مجانبی امید ریاضی $\mathrm{is}_n(w)$ را مشخص می‌کند. آیا نتیجهٔ قوی‌تری نیز به‌دست آمده است؟ قدم بزرگی توسط جینهو بیک، پرسی دایفت و کورت یوهانسن [۱] برداشته شده که منجر به بسیاری کارهای دیگر نیز شده است. برای توصیف نتایج آنها، فرض می‌کنیم $\mathrm{Ai}(x)$ نشان‌دهنده تابع ایری[2] باشد، یعنی جواب یکتای معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم

$$\mathrm{Ai}''(x)=x\,\mathrm{Ai}(x)$$

مشروط بر اینکه وقتی $x\to\infty$،

$$\mathrm{Ai}(x)\sim\frac{e^{-\frac{2}{3}x^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}x^{1/4}}$$

فرض کنید $u(x)$ جواب یگانهٔ معادلهٔ مرتبهٔ سوم غیرخطی

$$u''(x)=2u(x)^3+xu(x) \qquad (۶)$$

باشد مشروط بر اینکه وقتی $x\to\infty$،

$$u(x)\sim-\mathrm{Ai}(x)$$

معادلهٔ (۶) به نام پل پنلوه[3] (۱۸۶۳ـ۱۹۳۳) معادلهٔ پنلوهٔ II نامیده می‌شود پنلوه آن دسته از معادلات دیفرانسیل (از ردهٔ خاصی از معادلات مرتبهٔ دوم) را که نقاط تکین «بد» (نقاط شاخه‌ای و نقاط تکین اساسی) آنها مستقل از شرایط اولیه‌اند به‌طور کامل رده‌بندی کرد. بیشتر معادلات این رده قبلاً شناخته شده بودند، ولی تعدادی از آنها از جمله معادلهٔ (۶) جدید بودند.

حال توزیع تریسی‌ـویدم[4] را توزیع احتمال روی $\mathbb{R}$ با ضابطهٔ زیر تعریف می‌کنیم

$$F(t)=\exp\left(-\int_t^\infty (x-t)u(x)^2dx\right) \qquad (۷)$$

به‌راحتی دیده می‌شود که $F(t)$ واقعاً یک توزیع احتمال است، یعنی $F(t)\geq 0$ و $\int_{-\infty}^{\infty}F(t)dt=1$. فرض کنید χ متغیری تصادفی با توزیع F، و χ_n متغیری تصادفی روی $\mathfrak{S}_n$ با تعریف

$$\chi_n(w)=\frac{\mathrm{is}_n(w)-2\sqrt{n}}{n^{1/6}}$$

باشد. اکنون می‌توانیم نتایج مهم بیک، دایفت و یوهانسن را بررسی کنیم.

قضیه. وقتی $n\to\infty$، در توزیع داریم

$$\chi_n\to\chi$$

یعنی به‌ازای هر $t\in\mathbb{R}$،

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{Prob}\,(\chi_n\leq t)=F(t)$$

قضیه. به‌ازای هر $m=0,1,2,\dots$

$$\lim_{n\to\infty}E(\chi_n^m)=E(\chi^m)$$

نتیجه. داریم

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{Var}\,(\mathrm{is}_n)}{n^{1/3}}&=\int t^2\,dF(t)-\left(\int t\,dF(t)\right)^2\\&=0{,}8132\cdots\end{aligned}$$

که در آن Var نشان‌دهندهٔ واریانس است و

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{E(\mathrm{is}_n)-2\sqrt{n}}{n^{1/6}}&=\int t\,dF(t)\\&=-1{,}7711\cdots.\end{aligned} \qquad (۸)$$

قضایای بالا نسبت به نتایج ورشیک‌ـکروف و لوگان‌ـشپ دربارهٔ $E(n)$ یعنی امیدریاضی $\mathrm{is}_n(w)$ بسیار دقیق‌تر هستند. قضیهٔ اول توزیع حدی کامل $\mathrm{is}_n(w)$ (وقتی $n\to\infty$) را به‌دست می‌دهد، در حالی‌که قضیهٔ دوم یک فرمول مجانبی برای گشتاور m ام ارائه می‌کند. توجه کنید که معادلهٔ (۸) می‌تواند به این صورت نیز نوشته شود

$$E(n)=2\sqrt{n}+\alpha n^{1/6}+o(n^{1/6})$$

که در آن $\alpha=\int t\,dF(t)$ و لذا جملهٔ دوم در رفتار مجانبی $E(n)$ را مشخص می‌کند.

تنها چند کلمه در مورد اثبات نتایج بالا می‌گوییم تا چگونگی ورود ترکیبیات به صحنه روشن شود. برای توزیع $\mathrm{is}_n(w)$ نوعی عبارت تحلیلی نیاز است. چنین عبارتی را قضیه زیر از ایرا گسل [۱۴] به‌دست می‌دهد که بعدها توسط افراد مختلفی از راههای دیگر نیز به اثبات رسیده است.

قضیه. فرض کنید

$$u_k(n)=\#\{w\in\mathfrak{S}_n:\mathrm{is}_n(w)\leq k\}$$

$$U_k(x)=\sum_{n\geq0}u_k(n)\frac{x^{2n}}{n!^2}$$

$$B_i(x)=\sum_{n\geq0}\frac{x^{2n+i}}{n!(n+i)!}$$

1. [37, Exer. 7.109 (a)]
2. Airy function
3. Poul Painlevé

پنلوه نه تنها ریاضیدانی ممتاز بود، بلکه در سال ۱۹۰۸ اولین مسافر هواپیمای ویلبر رایت (از مخترعان هواپیما) بود و با آن پروازی به مدت ۷۰ دقیقه انجام داد که در آن زمان رکورد محسوب می‌شد. همچنین در سالهای ۱۹۱۷ و ۱۹۲۵ به نخست‌وزیری فرانسه رسید.

4. Tracy-Widon distribution

در این صورت

$$U_k(x) = \det\left(B_{|i-j|}(x)\right)_{i,j=1}^{k}$$

مثال. داریم

$$U_2(x) = \begin{vmatrix} B_0(x) & B_1(x) \\ B_1(x) & B_0(x) \end{vmatrix} = B_0(x)^2 - B_1(x)^2$$

از اینجا به‌راحتی نتیجه می‌شود که

$$u_2(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

که یک عدد کاتالان است. این نتیجه نخست توسط جان مایکل همرزلی در سال ۱۹۷۲ مطرح شد و نخستین اثبات چاپ شدهٔ آن متعلق به کنوت **[۲۵]**[1] و روتم **[۳۳]** است. گسل **[۱۴]**[2]، **[۳۷]**[3] عبارت پیچیده‌تری برای $u_3(n)$ به‌صورت زیر ارائه کرده است

$$u_3(n) = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}\sum_{j=0}^{n}\binom{2j}{j}\binom{n+1}{j+1}\binom{n+2}{j+2}$$

در حالی که هیچ فرمول «شسته‌رفته‌ای» برای $u_k(n)$ به‌ازای $k > 3$ شناخته نشده است.

قضیهٔ گسل قضایای بیک، دایفت و یوهانسن را فقط به آنالیز محدود می‌کند، یعنی به مسألهٔ ریمان‌ـهیلبرت در نظریهٔ دستگاههای انتگرال‌پذیر که با روش سریع‌ترین نزول برای تحلیل رفتار مجانبی دستگاههای انتگرال‌پذیر دنبال می‌شود. برای کسب اطلاعات بیشتر به مقالهٔ مروری دایفت **[۶]** که در بالا ذکر شد مراجعه کنید.

معلوم می‌شود که رفتار مجانبی $\mathrm{is}_n(w)$ (در مقیاس مناسب) با توزیع تریسی‌ـویدم $F(t)$ در معادلهٔ (۷) یکی است. یک سؤال طبیعی این است که توزیع تریسی‌ـویدم در وهلهٔ اول چگونه به‌وجود آمده است. جالب این است که تابع به ظاهر «غیرطبیعی» $F(t)$ در دو زمینهٔ متفاوت به‌طور مستقل ظاهر شده است. در اصل، توزیع تریسی‌ـویدم در ارتباط با مجمع یکانی گاوسی[4] (GUE) مطرح شد. GUE یک توزیع احتمال طبیعی معین روی فضای تمام ماتریسهای $n \times n$ ارمیتی $M = (M_{ij})$ به‌صورت

$$Z_n^{-1} e^{-\mathrm{tr}(M^2)} dM$$

است که در آن Z_n یک ثابت نرمال‌سازی [بهنجارش] است و

$$dM = \prod_i dM_{ii} \cdot \prod_{i<j} d\left(\mathrm{Re}\, M_{ij}\right) d\left(\mathrm{Im}\, M_{ij}\right).$$

فرض کنید $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n$ ویژه‌مقدارهای M باشند. نتیجهٔ زیر دلیل ظهور و نامگذاری توزیع تریسی‌ـویدم را مشخص می‌کند **[۳۹]**:

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Prob}\left(\left(\alpha_1 - \sqrt{2n}\right)\sqrt{2}\,n^{1/6} \leq t\right) = F(t) \qquad (9)$$

1. [25, §5.1.4] 2. [14, §7] 3. [37, Exer. 7.16 (e)]

4. Gaussian Unitary Ensemble

در نتیجه وقتی $n \to \infty$، $\mathrm{is}_n(w)$ و α_1 توزیع یکسانی دارند (پس از مقیاس‌بندی).

سؤال طبیعی اول این است که آیا نتیجه‌ای مشابه رابطهٔ (۹) برای ویژه‌مقدارهای دیگر α_k از ماتریس M از GUE وجود دارد یا نه، و دوم اینکه آیا ارتباطی بین چنین نتیجه‌ای و رفتار زیردنباله‌های صعودی یک جایگشت تصادفی موجود است یا نه. تعمیمی از (۹) توسط تریسی و ویدم **[۳۹]** ارائه شده (که با استفاده از تابع پنلوهٔ IIای $u(x)$ بیان شده است). ارتباط با زیردنباله‌های صعودی در **[۱]** به‌صورت یک حدسیه بیان شد و سپس مستقلاً توسط بارودین‌ـاکونکف‌ـالشانسکی **[۴]**، یوهانسن **[۲۳]**، و اکونکف **[۳۲]** به اثبات رسید. به‌ازای $w \in \mathfrak{S}_n$ داده شده، اعداد صحیح λ_1، λ_2، ... را طوری تعریف می‌کنیم که $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ برابر تعداد اعضای بزرگترین مجموعهٔ حاصل از اجتماع k زیردنبالهٔ صعودی w باشد. مثلاً برای $w = 247951368$ بلندترین زیردنبالهٔ صعودی 24568 است و در نتیجه $\lambda_1 = 5$. بزرگترین اجتماع دو زیردنبالهٔ صعودی برابر است با 2479 1368 (اجتماع 2479 و 1368)، پس $\lambda_1 + \lambda_2 = 8$. (توجه کنید که یافتن اجتماعی از دو زیردنبالهٔ صعودی با ۸ عضو که یکی از زیردنباله‌ها به طول $\lambda_1 = 5$ باشد، غیرممکن است.) سرانجام، خود w اجتماع سه زیردنبالهٔ صعودی ۲۴۷۹، ۱۳۶۸ و ۵ است و در نتیجه $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 9$. بنابراین $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (5, 3, 1)$ (و به‌ازای هر $i > 3$، $\lambda_i = 0$). خوانندهٔ آشنا با نظریهٔ الگوریتم رابینسن‌ـشنستد‌ـکنوت تشخیص خواهد داد که دنبالهٔ $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ را می‌توان به عنوان شکل دو تابلو استاندارد یانگ در نظر گرفت که با به‌کار بردن این الگوریتم روی w به‌دست آمده است. این مطلب قضیهٔ معروفی از کرتیس گرین **[۳۷]**[1]، **[۱۵]** است. (در حالت خاص $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$، که به هیچ‌وجه واضح نیست.) نتیجهٔ **[۴]**، **[۲۳]**، **[۳۲]** حاکی است که وقتی $n \to \infty$، λ_k و α_k با تقریب مقیاس‌بندی، هم‌توزیع هستند.

توزیع تریسی‌ـویدم به‌طور کاملاً مستقل در رفتار $\mathrm{is}_n(w)$ و ماتریسهای GUE ظاهر شده است. آیا این ارتباط صرفاً تصادفی است؟ کارهای اکونکف **[۳۲]** ارتباط دیگری را از طریق نظریهٔ توپولوژیهای تصادفی روی رویه‌ها مطرح می‌کند.

مراجع

1. J. Baik, P. Deift, and K. Johansson, On the distribution of the length of the longes increasing subsequence of random permutations, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1119), 1119-1178 math.CO/9810105. MR **2000 e:**05006

2. A. Berenstein and A. Zelevinsky, Triple multiplicities for $sl(r+1)$ and the spectrum of the exterior algebra of the adjoint representation, *J. Algebraic Combinatorics* **1** (1992), 7-22. MR **93h:**17012

3. F. Bergeron, A. Garsia, and G. Tesler, Multiple left regular representations generate by alternants, *J. Combinatorial Theory (A)* **91** (2000), 49-83. MR **2002c:**05158

1. [37, Thm. A1.1.1]

draft, www/math.berkeley.edu/~mhaiman; abbreviated version in *Physics and Combinatorics* (A. N. Kirillov and N. Liskova, eds.), World Scientific, London, 2001, pp. 1-21.

20. P. Hall, The algebra of partitions, in *Proc. 4th Canadian Math. Congress (Banff)*, 1050, pp. 147-159.

21. J. M. Hammersley, A few seedings of research. in *Proc. Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. vol. 1, University of California Press, Berkeley/Los Angeles. 1972, pp. 345-394. MR **53:**9457

22. G. J. Heckman, Projections of orbits and asymptotic behavior of multiplicities for compact connected Lie groups, *Invent. Math.* **67** (1982), 333-356. MR **84d:**22019

23. K. Johansson, Discrete othogonal polynomial ensembles and the Plancherel measure, *Ann. Math.* **153** (2001), 259-296, math.CO/9906120. MR **2002g:**05188

24. A. A. Klyachko, Stable bundles, representation theory and Hermitian operators, *Selecta Math.* **4** (1998), 419-445. MR **2000b:**14054

25. D. E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, vol. 3, *Sorting and Searching*, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1973; second edition, 1998. MR **56:**4281

26. A. Knutson and T. Tao, The honeycomb model of $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tensor products I: Proof ot the saturation conjecture, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999), 1055-1090, math.RT/9807160. MR **2000c:**20066

27. A. Knutson and T. Tao, Honeycombs and sums of Hermitian matrices, *Notices Amer. Math. Soc.* **48** (2001), 175-186, math.RT/0009048. MR **2002g:**15020

28. B. F. Logan and L. A. Shepp, A variationa problem for random Young tableaux, *Advances in Math.* **26** (1977), 206-222. MR **98e:**05108 [sic]

29. I. G. Macdonald, A new class of symmetric functions, *Actes 20e Séminaire Lotharingien*, Publ. I.R.M.A., Strasbourg, 1992, pp. 5-39.

30. I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, second ed., Oxford University Press, Oxford, 1995. MR **96h:**05207

31. F. M. Maley, The Hall polynomial revisited, *J. Algebra* **184** (1996), 363-371. MR **97j:**20054

32. A. Okounkov, Random matrices and random permutations, *Internat. Res. Notices* **2000**, 1043-1095, math.CO/9903176. MR **2002c:**15045

33. D. Rotem, On a correspondence between binary trees and a certain type of permutation, *Inf. Proc. Letters* **4** (1975/76), 58-61. MR **52:**9675

4. A. Borodin, A. Okounkov, and G. Olshanski, Asymptotics of Plancherel measures for symmetric groups, *J. Amer. Math. Soc.* **13** (2000), 481-515, math.CO/9905032. MR **2001 g:**05103

5. A. Buch, The saturation conjecture (after A. Knutson and T. Tao), *Enseign. Math.* **46** (2000) 43-60, math.CO/9810180. MR **2001g:**05105

6. P. Deift, Integrable systems and combinatorial theory, *Notices Amer. Math. Soc.* **47** (2000) 631-640. ¡R **2001g:**05012

7. H. Derksen and J. Weyman, Semi-invariants of quivers and saturation for Littlewood Richardson coefficients, *J. Amer. Math. Soc.* **13** (2000), 467-479. MR **2001g:**16031

8. W. Fulton, *Young Tableaux*, London Mathematical Society Student Texts **35**, Cambridge University Press. Cambridge, 1997. MR **99f:**05119

9. W. Fulton, Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus, *Bull. Amer. Math. Soc. 37* (2000), 209-249, math.AG/9908012. MR **2001g:**15023

10. A. M. Garsia and J. Haglund, A proof of the q, t-Catalan positivity conjecture, *Discrete Math.*, to appear. www.math.upenn.edu/~jhaglund.

11. A. M. Garsia and M. Haiman, A remarkable q,t-Catalan sequence and q-Lagrange inversion *J. Algebraic Combin.* **5** (1996), 191-244. MR **97k:**05208

12. A. M. Garsia and M. Haiman, A graded representation model for Macdonald's polynomials, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **90** (1993), 3607-3610. MR **94b:**05206

13. A. M. Garsia and M. Haiman, Some natural bigraded S_n-modules and q,t-Kostka coefficients *Electron. J. Combin.* **3** (1996), RP24. MR **97k:**05206

14. I. Gessel, Symmetric functions and P-recursiveness, *J. Combinatorial Theory (A)* **53** (1990), 257-285. MR **91c:**05190

15. C. Greene, An extension of Schensted's theorem, *Advances in Math.* **14** (1874), 254-265?. MR **50:**6874

16. J. Haglund, Conjectured statistics for the q,t-Catalan numbers, *Advances in Math.*, to appear www.math.upenn.edu/~jhaglund

17. M. Haiman. Macdonald polynomials and geometry, in *New perspectives in algebraic combinatorics (Berkeley, CA, 1996-97)* (L. J. Billera, *et al.*, eds.), MSRI Publ. **38**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, pp. 207-254. MR **2001k:**05203

18. M. Haiman, Hilbert schemes, polygraphs, and the Macdonald positivity conjecture, *J. Amer. Math. Soc.* **14** (2001), 941-1006, www/math.berkeley.edu/~mhaiman. MR **2002c:**14008

19. M. Haiman, Vanishing theorems and character formulas for the Hilbert scheme of points in the plane, preliminary

34. C. E. Schensted, Longest increasing and decreasing subsequences, *Canad. J. Math.* **13** (1961). 179-191. MR **22**:12047

35. L. Smith, *Polynomial Invariants of Finite Groups*, A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 1995. MR **96f**:13008

36. R. Stanley, Invariants of finite groups and their applications to combinatorics, *Bull. Amer Math. Soc.* (new series) **1** (1979), 475-511. MR **81a**:20015

37. R. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, vol. 2, Cambridge University Press. Cambridge, 1999. MR **2000k**:05026

38. G. Tesler, Semi-primary lattices and tableaux algorithms, Ph.D. thesis, M.I.T., 1995.

39. C. A. Tracy and H. Widom, Level-spacing distributions and the Airy kernel, *Comm. Math. Phys.* **159** (1994), 151-174, hep-th/9211141. MR **95e**:82003

40. A. M. Vershik and S. V. Kerov, Asymptotic behavior of the Plancherel measure of the symmetric group and the limit form of Young tableaux, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **233** (1977), 1024-1027. English translation in *Soviet Math. Dokl.* **18** (1977), 527-531. MR **58**:562

41. A. Zelevinsky, Littlewood-Richardson semigroups, in *New perspectives in algebraic combinatorics (Berkeley, CA, 1996-97)* (L. J. Billera, *et al.*, eds.), MSRI Publ. **38**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999, pp. 337-345, math.CO/9704228. MR **2000j**:05126

* * * * * *

• Richard P. Stanley, "Recent progress in algebraic combinatorics", *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, (1) **40** (2002) 55-68.

* ریچارد استنلی، دانشگاه ام. آی. تی.، آمریکا