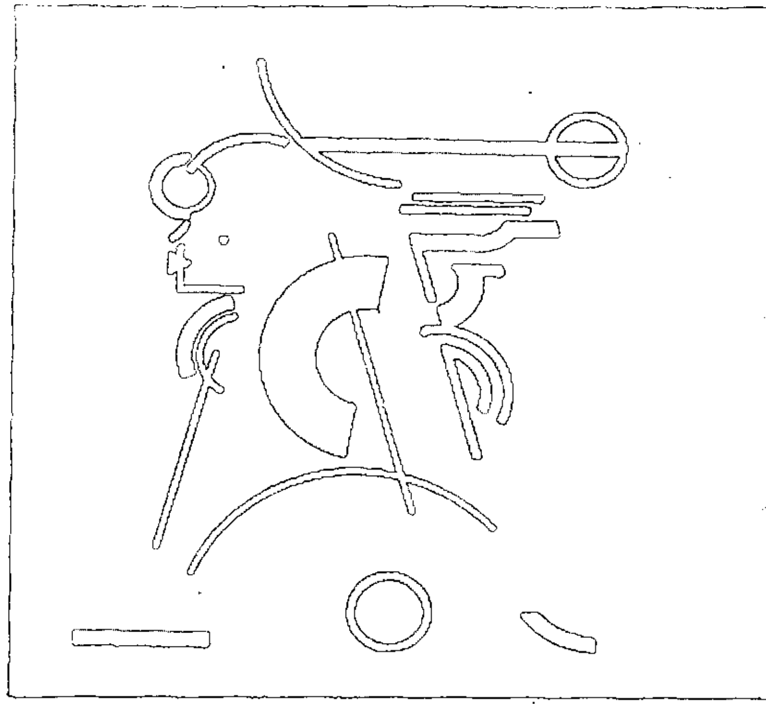

# ریاضیات گسسته

(قسمت چهارم)

# اصول منطق

(سوّم ریاضی و پیش‌دانشگاهی)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

در فصل اول و در مثال ۱ ــ ۳۵ (بخش ۴.۱) فرمولی مجموع‌یابی استخراج کردیم. فرمول مزبور را، با شمارش یک گردایه ازاشیاء (تعداد دفعاتی را که یک گزاره در قطعه برنامهٔ معینی به کار می‌رود) به دو طریق متفاوت و سپس مساوی قرار دادن نتایج حاصل، به دست آوردیم، در نتیجه چنین می‌گوییم که نتیجهٔ مزبور را با استفاده از اثباتی ترکیباتی[1] محقق کردیم. این روش یکی از روشهای متفاوت بسیاری است که برای رسیدن به اثبات در سراسر این کتاب با آنها سر و کار خواهیم داشت.

در این فصل نگاه دقیق‌تری به آنچه که اثبات قراردادی‌تر یا استدلال درست را تشکیل می‌دهد می‌اندازیم. زمانی که ریاضیدانی مایل به اقامهٔ اثبات وضعیتی مفروض است، باید از دستگاه منطق استفاده کند. این موضوع زمانی که یک دانشمند کامپیوتر الگوریتمهای لازم برای برنامه یا دستگاهی از برنامه‌ها را طرح می‌کند، نیز صادق است. منطق ریاضیات برای مشخص کردن این که گزاره‌ای از یک یا بیش از یک گزاره نتیجه می‌شود، یا نتیجهٔ منطقی آنهاست، به کار می‌رود.

بعضی از قواعد حاکم بر این فرآیند را در این فصل مشخص کرده‌ایم. سپس، در سراسر فصول آتی، از قواعد مزبور دراثباتها(ی آمده در متن) استفاده خواهیم برد. اما، در هیچ زمانی نمی‌توان امیدوار بود که به مرحله‌ای برسیم که در آن بتوانیم قواعد مورد بحث را به گونه‌ای خودکار به کار بریم. و باید، چون در کاربرد مفاهیم شمارش مورد بحث فصل ۱، همواره برای درک وضعیت مفروض تحلیل و جستجو کنیم. و این کار غالباً به صفاتی، چون بصیرت و خلاقیت، که نمی‌توان آنها را در کتابها آموخت، نیازمند است، و صرف کوشش در به کاربردن فرمولها یا کمک گرفتن از قواعد فایدهٔ چندانی در اثبات نتایج(ی چون قضایا) یا حل مسایل شمارش ندارد.

## رابطهای مبنایی و جداول ارزش

در گسترش هر نظریهٔ ریاضی، اظهارات را به صورت جمله‌ها مطرح می‌کنیم. اظهارات کتبی یا لفظی‌ای چنین، که به ***گزاره***[2] یا ***قضیه***[3] موسوم‌اند، جمله‌هایی خبری‌اند که یا راست یا دروغ‌اند، برای مثال، موارد زیر گزاره‌اند.

a) p : ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم است.

b) q : من متخصص کامپیوترم.

c) r : دستگاه رسّام امروز خراب است.

قضایا را می‌توان به عنوان ***گزاره‌های ساده***[4] در نظر گرفت، زیرا به واقع راهی برای تجزیهٔ آنها به موردی ساده‌تر وجود ندارد. گزاره‌های ساده همراه با ***رابطهای منطقی***[5] در ساختن ***گزاره‌های مرکب***[6] به کار می‌روند.

به طریق زیر می‌توان گزاره‌ای را نقض یا دو گزاره را ترکیب کرد.

۱. نقیض: *نقیض*[7] گزارهٔ p با p~ نمایش داده و به صورت «نه p» خوانده می‌شود. در مورد p ی فوق، p~ گزارهٔ زیر است «ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم نیست.»

۲. ترکیب عطفی: *ترکیب عطفی*[8] p و q را با $p \wedge q$ نمایش می‌دهیم و «p و q» می‌خوانیم. در مثال‌مان، گزارهٔ $p \wedge q$ به صورت زیر است «ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم است، و من متخصص کامپیوترم».

۳. ترکیب فصلی: عبارت $p \vee q$ *ترکیب فصلی*[9] p ، q را نمایش می‌دهد، و «p یا q» خوانده می‌شود، در نتیجه «ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم است، یا من متخصص کامپیوترم» ترجمهٔ لفظی $p \vee q$ است. در این مرحله کلمهٔ «یا» را به معنی «*جامع*[10]» به کار می‌بریم. در نتیجه، $p \vee q$ راست است اگر یکی از دو گزارهٔ p ، q، یا هر دو آنها راست باشند. در زبان فارسی گاهی برای خاطر نشان کردن این مطلب «و/یا» می‌نویسیم. «یا»ی مانع[11] را با «$p \veebar q$» نمایش می‌دهیم. گزارهٔ مرکب $p \veebar q$ راست است اگر یکی از دو گزارهٔ p ، q ، اما نه هر دو، راست باشد. در مثال فوق، یکی از راههای بیان $p \veebar q$ عبارت از «ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم است، یا من متخصص کامپیوترم، اما نه هردو.»

۴. استلزام: برای مشخص کردن *استلزام*[12] q توسط p، می‌گوییم «p مستلزم q است» و می‌نویسیم $p \rightarrow q$. به طریق دیگر، می‌توان گفت (a) اگر p ، آنگاه q ؛ (b) p کافی برای q است ؛ (c) p تنها اگر q ؛ و (d) q لازم برای p است. در این مثال، یکی از ترجمه‌های لفظی $p \rightarrow q$ عبارت است از «اگر ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم باشد، آنگاه من متخصص کامپیوترم.» گزارهٔ p به *فرض*(مقدم[13]) استلزام، و q به *نتیجهٔ* (تالی[14]) آن موسوم است. هنگامی که گزاره‌ها را به این شیوه ترکیب می‌کنیم، لازم به وجود رابطه‌ای تصادفی بین آنها نیست، و چه p و q به هم بستگی داشته باشند چه نه، به طور ساده و با توجه به تعریف پیشین استلزام، $p \rightarrow q$ را می‌نویسیم.

۵. هم‌ارزی: سرانجام، *هم‌ارزی*[15] دو گزاره p ، q را با $p \leftrightarrow q$ نمایش می‌دهیم و «p هم ارز q است»، «p اگر و تنها اگر q »، یا «p لازم و کافی برای q است» می‌خوانیم. در مثال p ، q مان «ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم است اگر و تنها اگر من متخصص کامپیوتر باشم» معنی $p \leftrightarrow q$ را انتقال می‌دهد. گاهی «p اگر و تنها اگر q » را به صورت «p iff q» مختصر می‌کنیم.

در سراسر بحث مربوط به منطقمان، از گزاره شمردن بعضی از انواع جمله‌های خبری، چون آنهایی که به نظر شخصی نیاز دارند یا به زمان جاری وابسته‌اند، و در نتیجه نه راست نه دروغ‌اند، خودداری می‌کنیم، علاوه بر این، باید دریابیم که جمله‌ای چون عدد x عددی صحیح است.

گزاره *نیست* زیرا *ارزش راستی*[16] (راست یا دروغ)اش را نمی‌توان تا زمانی که مقداری عددی به x نسبت نداده‌ایم مشخص کرد. اگر به x مقدار ۷ را تخصیص دهیم، نتیجهٔ کار گزاره‌ای راست است. در حالی که تخصیص مقادیری چون ۱/۲، $\sqrt{۲}$ ، یا $\pi$ به x گزاره را دروغ می‌سازد.

حضور متغیر یا مقداری مجهول در یک جمله، خود به خود به مفهوم گزاره نبودن جمله نیست. برای مثال، جمله

$$\text{اگر } x = ۳ \text{ ، آنگاه } x^۲ = ۹$$

گزاره‌ای راست است، در حالی که گزارهٔ

$$\text{اگر } x = ۳ \text{ ، آنگاه } x + ۲ = ۶$$

گزاره‌ای دروغ است.

در بحث پیشین، وضعیاتی را ذکر کردیم که طبق آنها گزاره‌های $p \vee q$ ، $p \veebar q$ بر مبنای راستی مؤلفه‌های سادهٔ p ، q راست در نظر گرفته می‌شدند. ارزش دارد که به بررسی بیشتر این مطلب که صدق یا کذب گزاره‌ای مرکب تابعی از ارزشهای راستی مؤلفه‌های ساده آن است، بپردازیم. جداول ۱.۲ و ۲.۲ صدق و کذب نقیض و گزاره‌های مرکب دیگر را بر مبنای ارزشهای راستی مؤلفه‌های اولیه‌شان خلاصه می‌کنند. در تشکیل چنین *جداول ارزشی*[17] به جای دروغ ۰ و به جای راست ۱ می‌نویسیم.

◄ جدول ۱

| $p$ | $\bar{p}$ |
|---|---|
| ۰ | ۱ |
| ۱ | ۰ |

**◄ جدول ۲**

| $p$ | $q$ | $p\wedge q$ | $p\vee q$ | $p\underline{\vee}q$ | $p\rightarrow q$ | $p\leftrightarrow q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۱ | ۱ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۰ | ۱ | ۱ |

چهار تخصیص راستی ممکن p و q را می‌توان در هر ترتیب فهرست کرد. اما برای کارهای بعدی، فهرست ارائه شده در فوق سودمندتر است.

ملاحظه می‌کنیم که ستونهای ارزشهای راستی $\bar{p}$ ،p مقابل یکدیگرند. گزارهٔ $p\wedge q$ تا وقتی که q ،p هر دو راست باشند، راست است، در حالی که $p\vee q$ تنها وقتی که هر دو گزارهٔ سادهٔ آن دروغ باشند، دروغ است. همان گونه که قبلاً توجه کردیم، $p\underline{\vee}q$ زمانی که دقیقاً یکی از موارد q ،p راست باشد، راست است.

نتیجهٔ استلزام $p\rightarrow q$ در جمیع حالات، جز حالتی که p راست و q دروغ باشد، راست است. مایل نیستیم که گزاره‌ای راست به پذیرش مطلبی که دروغ است منجر شود. اما، گزاره‌ای چون «اگر ۶ = ۳ + ۲، آنگاه ۷ = ۴ + ۲» را، با وجود این که هر دو گزارهٔ «۶ = ۳ + ۲» و «۷ = ۴ + ۲» دروغ‌اند، راست می‌پنداریم.

سرانجام، گزارهٔ $p\leftrightarrow q$، زمانی که گزاره‌های سادهٔ آن ارزش راستی یکسان داشته باشند، راست است.

معمولاً اشخاص در برخورد اولشان با جدول ارزش استلزام ($p\rightarrow q$)، چنان‌که در جدول ۲.۲ آمده، مخصوصاً نتایج واقع در دو سطر اول، آن را (که p ارزش راستی ۰ دارد) به سختی می‌پذیرند. مثال زیر به دریافت آسانتر تخصیصات ارزش راستی مزبور مدد می‌رساند.

**◄ مثال ۱.۲:**

سناریوی زیر را در نظر بگیرید. تقریباً یک هفته پیش از کریسمس است و پنی در آن هفته در چند مهمانی شرکت خواهد کرد. او، نگران از اضافه وزنش، قرار می‌گذارد تا روز بعد از کریسمس خود را وزن نکند. با در نظر آوردن این که مهمانیهای مزبور چه بلایی سر قطرشکمش می‌آورند، تصمیم زیر را برای ۲۶ دسامبر می‌گیرد: «اگر وزنم از ۱۲۰ پوند بیشتر شود، در کلاس بدنسازی نام‌نویسی خواهم کرد.»

فرض می‌کنیم p و q گزاره‌های (سادهٔ) زیر را نمایش دهند.

p : وزنم از ۱۲۰ پوند بیشتر است.

q : در کلاس بدنسازی نام‌نویسی خواهم کرد.

در این صورت گزارهٔ (استلزام) پنی با $p\rightarrow q$ داده می‌شود.

ارزشهای راستی مثال خاص $p\rightarrow q$ ی فوق را در سطرهای جدول ۲.۲ بررسی می‌کنیم، و ابتدا حالات ساده‌تر سطرهای ۴ و ۳ را در نظر می‌گیریم.

● سطر ۴ : هم p هم q دارای ارزش راستی اند. در ۲۶ دسامبر پنی درمی‌یابد که وزنش بیش از ۱۲۰ پوند است و بلافاصله همانگونه که عهد کرده، در کلاس بدنسازی نام نویسی می‌کند. در این حالت $p\rightarrow q$ را راست در نظر می‌گیریم و ارزش راستی ۱ را به آن تخصیص می‌دهیم.

● سطر ۳ : p دارای ارزش راستی ۱ و q دارای ارزش راستی ۰ است. ۲۶ دسامبر فرا می‌رسد، پنی وزنش را بیش از ۱۲۰ پوند می‌بیند، اما کوششی در نوشتن نام خود در کلاس بدنسازی به عمل نمی‌آورد. در این حالت احساس می‌کنیم که پنی عهدش را شکسته است ــ به عبارت دیگر، استلزام $p\rightarrow q$ دروغ است (و ارزش راستی ۰ دارد).

امکان دارد که حالات سطرهای ۱ و ۲ بی‌درنگ با شهودمان نخواند، اما مثال فوق می‌تواند قبول این نتایج را آسانتر کند.

● سطر ۱ : هم p، هم q دارای ارزش راستی ۰ اند. در این حالت پنی در ۲۶ دسامبر درمی‌یابد که وزنش ۱۲۰ پوند یا کمتر از آن است و در کلاس بدنسازی نام نمی‌نویسد. در این صورت برخلاف پیمانش عمل نکرده است؛ و بنابراین گزارهٔ $p\rightarrow q$ اش را راست می‌گیریم و ارزش راستی ۱ را به آن تخصیص می‌دهیم.

● سطر ۲ : p دارای ارزش راستی ۰ و q دارای ارزش راستی ۱ است. پنی، در این حالت آخر، در ۲۶ دسامبر وزنش را ۱۲۰ پوند یا کمتر از آن می‌بیند و با این همه در کلاس بدنسازی نام‌نویسی می‌کند. شاید وزنش ۱۱۹ یا ۱۲۰ پوند باشد و احساس می‌کند که این مقدار هم چنان زیاد است. یا شاید به

کلاس بدنسازی رفتنش به این علت است که تصور می‌کند که این کار برای تندرستیش سودمند است. در این صورت بدون این که دلیل این کارش مهم باشد، عهد $p \to q$ اش نقض نکرده است. بار دیگر، گزارهٔ مرکب مزبور را راست می‌پذیریم، و ارزش راستی ۱ را به آن تخصیص می‌دهیم. □

مثال بعدیمان به بحث مفهومی مرتبط، یعنی، ساختار **تصمیم‌گیری**[18] یا ***(انتخاب)***[19] در برنامه‌نویسی کامپیوتری، می‌پردازد.

**◀ مثال ۲.۲**

در علوم کامپیوتری ساختارهای تصمیم‌گیری If-Then، If-Then-Else در زبانهایی چون **بیسیک** و **پاسکال** رخ می‌دهند. فرض p غالباً عبارتی رابطه‌ای[20] چون $x > 2$ است. در این صورت عبارت مزبور به گزاره‌ای (منطقی) تبدیل می‌شود که بسته به مقدار متغیر x در آن مرحله در برنامه، ارزش راستی ۰ و ۱ دارد. نتیجهٔ q ممکن است حکمی اجراپذیر هدایت‌کنندهٔ برنامه به سطری دیگر باشد، یا موجب نتیجه‌ای برای چاپ شدن شود. (در نتیجه، q به عنوان «حکمی اجراپذیر» یکی از گزاره‌ها یا قضایایی که در بحثشان بودیم، نیست.) در این زمینه، کامپیوتر، هنگامی که با «اگر p آنگاه q» سروکار داریم، q را تنها با این شرط که p راست باشد اجرا می‌کند. و به ازای p دروغ به سطر (احتمالاً شماره‌دار) بعدی واقع در دنبالهٔ برنامه می‌رود. در ساختار تصمیم‌گیری «اگر p آنگاه q جز این r»، q هنگامی که p راست باشد اجرا می‌شود و r زمانی که p دروغ باشد.

پیش از ادامهٔ مطلب، کلمه‌ای در باب احتیاط می‌آوریم. هنگام به کار بردن نمادهای $\to$ و $\leftrightarrow$ محتاط باشید. استلزام و هم‌ارزی، همانگونه که از دو ستون آخر جدول ۲.۲ آشکار است، یکی نیستند.

اما، در **تعریف**، دو مفهوم فوق همراه یکدیگر می‌آیند. برای مثال در تعریف مثلث متساوی‌الساقین می‌توان نوشت: «اگر دو ضلع مثلثی به طولهای برابر باشند، مثلث را متساوی‌الساقین می‌نامیم.» اما باید این برداشت را نیز داشته باشیم که هرگاه مثلثی را به عنوان متساوی الساقین تعریف کرده باشیم، دارای دو ضلع به طول برابر است. در نتیجه، هنگامی که تعریفی به صورت $p \to q$ داده شده باشد، در می‌یابیم که منظور واقعی آن $p \leftrightarrow q$ است.

اما، آنچه که در حالت تعاریف رخ می‌دهد در گزاره‌های استلزامی در حالت عمومی روی نمی‌نماید. بررسی بیشتر این نکته را برای مثال ۱۳.۲ می‌گذاریم.

نتایج جدولهای ۱.۲ و ۲.۲ گرچه برای گزاره‌های سادهٔ p و q داده شده‌اند، چون به جای نمادهای p و q گزاره‌های مرکبی بنشانیم همچنان در کارند. مثالهای ۳.۲ تا ۵.۲ در توضیح این مطلب‌اند.

**◀ مثال ۳.۲**

به بررسی جدول ارزش گزارهٔ مرکب زیر می‌پردازیم: «من متخصص کامپیوترم، و اگر دستگاه رسام امروز خراب نباشد، ترکیبیات یکی از دوره‌های لازم است.» این گزاره در زبان نمادها عبارت است از $q \wedge (\bar{r} \to p)$، که p، q و r آن قضایای نمایش داده شده در آغاز این بخش‌اند. آخرین ستون جدول ۳.۲ حاوی ارزشهای راستی این مطلب است. ستونهای قبل آن چگونگی تشکیل جدول ارزش را با در نظر گرفتن اجزای کوچکتر گزارهٔ مرکب مورد بحث و استفاده از نتایج جدولهای ۱.۲ و ۲.۲ نشان می‌دهند.

**◀ جدول ۳**

| $p$ | $q$ | $r$ | $\bar{r}$ | $\bar{r} \to p$ | $q \wedge (\bar{r} \to p)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۰ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۰ | ۱ | ۱ |

**◀ مثال ۴.۲**

در جدول ۴.۲ جداول ارزش گزاره‌های مرکب $p \vee (q \wedge r)$ (ستون ۵) و $(p \vee q) \wedge r$ (ستون ۷) را مطرح کرده‌ایم.

◀ جدول ۴

| $p$ | $q$ | $r$ | $q\wedge r$ | $p\vee(q\wedge r)$ | $p\vee q$ | $[p\vee q]\wedge r$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۰ | ۰ | ۰ | ۱ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۰ | ۱ | ۱ | ۱ |
| ۱ | ۱ | ۰ | ۰ | ۱ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ |

به علت متفاوت بودن ارزشهای راستی ستونهای ۵ و ۷ (در سطرهای ۵ و ۷)، بایدازنوشتن گزارهٔ مرکبی چون $p\vee q\wedge r$ خودداری کنیم، چه بدون پرانتزهایی که مشخص کنند که کدام یک از رابطهای $\wedge$ و $\vee$ را باید ابتدا به کار برد، ایده‌ای دربارهٔ این که با $p\vee(q\wedge r)$ سروکار داریم یا با $(p\vee q)\wedge r$، نخواهیم داشت.

□

آخرین مثال این بخش به توضیح دو نوع خاص از قضایا می‌پردازد.

◀ مثال ۵.۲

نتایج ستونهای ۴ و ۶ جدول ۲.۵ آشکار می‌کنند که گزارهٔ $p\rightarrow(p\vee q)$ همواره راست است، در حالی که گزارهٔ $p\wedge(\overline{p}\wedge q)$ همواره دروغ است.

□

◀ جدول ۵

| $p$ | $q$ | $p\vee q$ | $p\rightarrow(p\vee q)$ | $[\overline{p}\wedge q]$ | $p\wedge[\overline{p}\wedge q]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ۰ | ۰ | ۰ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۰ | ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۰ |
| ۱ | ۰ | ۱ | ۱ | ۰ | ۰ |
| ۱ | ۱ | ۱ | ۱ | ۰ | ۰ |

**تعریف ۱.۲**

گزارهٔ همواره راست را ***صادق*** (راستگو)[۲۱] و گزارهٔ همیشه دروغ را کاذب[۲۲] می‌نامیم.

در سراسر این بخش نماد .T را برای نمایش هر صادق و نماد .F را برای نمایش هر کاذب به کار می‌بریم.

می‌توانیم از مفاهیم صادق و استلزام در توصیف مقصودی که از قضیه داریم استفاده کنیم. در حالت عمومی، **قضیه**[۲۳] گزاره‌ای است ریاضی که می‌توان (به کمک اثبات) راستی آن را نشان داد. خواننده بی‌شک با قضایا و اثباتهای آن در جبر و هندسهٔ دبیرستان برخورد کرده است.

بسیاری از قضایا را می‌توان به صورت زیر داد. اگر گزاره‌های $p_1$، $p_2$، $p_3$، ...، $p_n$ فرضهای یک استلزام را نمایش دهند و $q$ نتیجهٔ آن باشد، آنگاه چنین می‌گوییم که استلزام $(p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\ldots\wedge p_n)^*\rightarrow q$

هنگامی که راستی $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ منجر به راستی $q$ شود، قضیه است. (بنابراین اگر هر یک از $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ دارای ارزش راستی ۱ باشد، $q$ نیز هست.)

اگر هر یک از $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ دروغ باشد، آنگاه $p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\ldots\wedge p_n$ دروغ می‌شود. و استلزام $(p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\ldots\wedge p_n)\rightarrow q$، بی‌توجه به ارزش راستی $q$، راست است. در نتیجه، استلزام $(p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\ldots\wedge p_n)\rightarrow q$ با توجه به وضعیاتی که در این مرحله به توصیفشان پرداختیم، به شرطی که ارزش راستی $q$، هنگامی که هر $p_i$، $1\leq i\leq n$، دارای ارزش راستی ۱ است، ۱ باشد، قضیه (و صادق) است.

در بخش ۳.۲ مطالب بیشتری دربارهٔ قضایایی از این دست و چگونگی اثباتشان خواهیم آورد.

* تا این مرحله تنها با ترکیب عطفی دو گزاره سر و کار داشته‌ایم، بنابراین باید خاطر نشان کنیم که ترکیب عطفی $n$ گزاره‌ای $p_1\wedge p_2\wedge p_3\wedge\ldots\wedge p_n$ تنها وقتی راست است که هر $p_i$، $1\leq i\leq n$ راست باشد. در مثال ۸.۴ بخش ۱.۴، با تفصیل بیشتری به ترکیب عطفی تعمیم یافتهٔ فوق خواهیم پرداخت.

□ یادداشتها:

1. combinatorial proof
2. statement
3. proposition
4. primitive
5. logical connectives
6. compound
7. negation
8. conjunction
9. disjunction
10. inclusive
11. exclusive
12. implication
13. hypothesis
14. conclusion
15. equivalence
16. truth value
17. truth tables
18. decision
19. solection
20. relational expression
21. Tautology
22. contradiction
23. theorem

## تفریح اندیشهٔ ٦

### تقاطع جاده و راه‌آهن

در حالی که از ویلای دوستمان به دهکدهٔ مجاور اتومبیل می‌راندیم، مجبور شدیم در مقابل تقاطع جاده و راه‌آهن سر راه توقف کنیم. هنگامی که منتظر برداشته شدن میله بعد از گذشتن قطار بودیم، میزبانم به طرف من برگشت و گفت: «چیز عجیبی است.»

پرسیدم: «چه‌چیز؟»

«خوب، به نظر می‌رسد در اغلب مواردی که من در این تقاطع توقف می‌کنم قطار، درست مثل حالا، از غرب به شرق می‌رود.»

پاسخ دادم: «تا آنجا که می‌شود ملاحظه کرد، مطلب غریبی در این موضوع نیست.»

در حالی که می راندیم دوستم گفت: «اما، نگاه کن، این خط تنها یک خط فرعی است و بین دهکده و ترمینال خط اصلی رفت و آمد می‌کند. برنامهٔ حرکت قطارها را نیز چک کرده‌ام. قطار بیست و چهار ساعته حرکت می‌کند و مسافرت در هر طرف نیم‌ساعت طول می‌کشد.»

در حالی که تنها در مورد آن خط از دیگران چیزهایی شنیده بودم، گفتم «در مورد تأخیرها چه؟»

«حرفش را هم نزن، قطار در هیچ یک از دو ترمینال بیش از دیگری نمی‌ایستد.»

با قیافه‌ای از خود راضی گفتم: «در این صورت یا خیالات برت داشته یا اتفاق محض است، چه برداشتم از حرفهایت این است که قطار هر ساعت یک‌بار از این تقاطع از غرب به شرق می‌رود، و یکبار در جهت مخالف، و واضحاً، احتمال توقف کردنت مقابل قطار در جهت غرب درست برابر احتمال آن در جهت شرق است.»

دوستم گفت: «نه، نمی‌تواند اتفاقی باشد. من صدها بار در ساعات شب و روز در دو جهت این جاده رانندگی کرده‌ام و الگویی برای دفعاتی که در این تقاطع ایستاده‌ام موجود نیست.»

دوستم، هنگامی که به مقصدمان رسیدیم، بازیرکی گفت: «خیالات هم برم نداشته است، در این مورد باید توضیحی عقلایی موجود باشد.»

این توضیح چیست؟

جواب در صفحه ۸٦