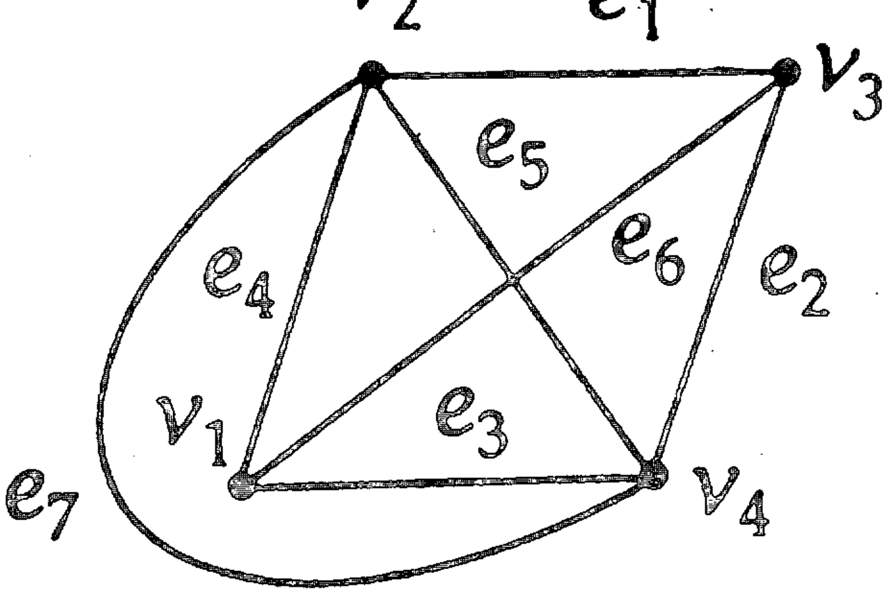
ریاضیات گسسته

قسمت هشتم

RALPH P. GRIMALDI
● ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور



قبل از پیشروی بیشتر، به ذکر قاعدهٔ استنتاجی نسبتاً ساده اما مهم می‌پردازیم.

مثال ۲.۲۲

قاعدهٔ استنتاج زیر از ملاحظهٔ این موضوع حاصل می‌شود که اگر p، q گزاره‌هایی چنان باشند که $p \Leftrightarrow t_0$ و $q \Leftrightarrow t_0$، آن‌گاه $p \wedge q \Leftrightarrow t_0$.

اکنون فرض می‌کنیم گزاره‌های p، q در طرح اثباتی روی دهند. این گزاره‌ها می‌توانند فرضهای داده شده یا نتایج مستخرج از فرضها و / یا از نتایج قبلاً مطرح شده در اثبات باشند. در این صورت دو گزارهٔ p و q را می‌توان، با عنایت به این شرایط، به ترکیب عطفی‌شان، $p \wedge q$، ترکیب کرد و گزارهٔ جدید حاصل را می‌توان در مراحل بعدی ادامهٔ اثبات به‌کار برد.

قاعدهٔ فوق را قاعدهٔ ترکیب عطفی[۱] می‌نامیم و آن را به‌صورت جدول شکل زیر چنین می‌نویسیم:

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{q} \\ \therefore p \wedge q \end{array}$$

کاربرد این قاعده را در مثال ۲.۲۳ توضیح داده‌ایم.

قاعدهٔ استنتاج بعدی ما گاهی با روش عکس نقیض اثبات به‌کار رفته در انفصال نقیض اشتباه می‌شود، زیرا هر دوی آنها از نقیض گزاره‌ای بهره می‌برند. اما، این دو، دو قاعدهٔ متمایزند.

مثال ۲.۲۳

ابتدا به خاطر می‌آوریم که اگر S یک گزاره و $\overline{S} \Rightarrow F_0$ آنگاه گزارهٔ $\overline{S} \Rightarrow F_0$ همواره راست است. بنابراین $\overline{S}$ دروغ و، در نتیجه S راست است.

از استلزام منطقی $\overline{S} \Rightarrow F_0$ قاعدهٔ استنتاج موسوم به *اثبات با استفاده از کاذب یا تناقض*[۲]، یا برهان *خلف*[۳] را به‌دست می‌آوریم. این قاعده به‌صورت جدول شکل چنین نوشته می‌شود:

$$\begin{array}{l} \underline{\overline{S} \Rightarrow F_0} \\ \therefore S \end{array}$$

کاربرد این قاعده را در اثبات زیر به شرح می‌آوریم. اما ابتدا خاطر نشان می‌کنیم که عدد صحیح n زوج[۴] نامیده می‌شود اگر عدد صحیح kای چنان موجود باشد که $n = 2k$. عدد صحیح m فرد[۵] نامیده می‌شود اگر عدد صحیح kای چنان موجود باشد که $m = 2k+1$. عدد حقیقی x به گویا[۶] موسوم است اگر $x = a/b$، با a و bی صحیح باشد و $b \neq 0$. اگر عدد حقیقی گویا نباشد آن را گنگ[۷] می‌نامیم.

اکنون فرض کنید که مایل به اثبات نتیجهٔ زیریم

S : عدد حقیقی $\sqrt{2}$ عددی گنگ است.

به‌جای سعی در اثبات (مستقیم) این گزاره، (به‌طور غیرمستقیم) مبرهن می‌کنیم که چگونه به‌ازای گزارهٔ rی $\overline{S} \Rightarrow (r \wedge \bar{r})$. (از اینجاست که به اثبات با استفاده از کاذب گاهی به‌عنوان *اثبات غیرمستقیم*[۸] اشاره می‌شود.)

اکنون فرض می‌کنیم $\sqrt{2}$ گویا باشد (یعنی، فرض می‌کنیم $\overline{S}$ راست است). در این‌صورت $\sqrt{2} = a/b$، که a و bی آن اعدادی صحیح‌اند و $b \neq 0$، باز فرض می‌کنیم a/b به کوچکترین جملات نوشته شده باشد. بنابراین گزارهٔ زیر را داریم:

r : تنها عدد صحیح و مثبتی که هم a هم b را می‌شمارد ۱ است.

به علت اینکه $۲ = (\sqrt{۲})^۲$، نتیجه می‌شود که $۲ = (a/b)^۲$، یا $a^۲ = ۲b^۲$. با $a^۲ = ۲b^۲$ درمی‌یابیم که $a^۲$ زوج است؛ اگر $a^۲$ زوج باشد، نتیجه می‌شود که a نیز زوج است. بنابراین، به‌ازای عدد صحیح cای، $a = ۲c$. اما با $b^۲$ی زوج، b نیز باید زوج باشد. درنتیجه، اعداد صحیح a، b، ۲ را به‌عنوان دومین مقسوم‌علیه مثبت دارند. بنابراین ۱ تنها عدد صحیح و مثبتی که a و b، هر دو، را می‌شمارد، نیست؛ و این گزارهٔ $\bar{r}$ را به‌دست می‌دهد.

اما چه شد که هم به r هم به $\bar{r}$ (و کاذب $r \wedge \bar{r}$، بنا به قاعدهٔ ترکیب عطفی) منتهی شدیم؟ آنچه که موجب رخ دادن این امر شد این بود که هنگامی که نوشتیم «فرض می‌کنیم که $\sqrt{۲}$ گویاست» بر این فرض بودیم که $\bar{S}$ راست است. درنتیجه، فرض مزبور درواقع دروغ است، و بنابراین، نقیض آن، یعنی S، باید راست باشد.

به این ترتیب، به علت $\bar{S} \Rightarrow (r \wedge \bar{r})$، داریم $\bar{S} \Leftrightarrow F.$. به‌عنوان نتیجه، $S \Leftrightarrow t.$، و این بدان معنی است که $\sqrt{۲}$ گنگ است.

در اینجا ارزش دارد که به حالت خاصی از اثبات با استفاده از کاذب، یعنی،

$$\left[\bar{S} \Rightarrow (r \wedge \bar{r})\right] \Rightarrow (S \Leftrightarrow t.)$$

توجه کنیم.

فرض می‌کنیم مایل به اثبات قضیهٔ $p \Rightarrow q$ هستیم، با قرار دادن $p \rightarrow q$ به‌جای گزارهٔ S فوق، ملاحظه می‌کنیم که می‌توان $\overline{(p \rightarrow q)} \Rightarrow (r \wedge \bar{r})$ را به‌ازای گزارهٔ rی محقق کرد. در این صورت نتیجه می‌شود که $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow t.$، یا $p \Rightarrow q$.

حالت خاص اثبات با استفاده از کاذب مزبور را، بنا به

$$\overline{(p \rightarrow q)} \Leftrightarrow (\overline{\bar{p} \vee q} \Leftrightarrow p \wedge \bar{q})$$

می‌توان به‌صورت

$$\left[(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow (r \wedge \bar{r})\right] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

نیز بیان کرد.

این حالت در وضعیات بسیاری در سراسر فصول بعدی رخ خواهد داد.

اکنون که پنج قاعدهٔ استنتاج را بررسی کرده‌ایم، آنها را همراه با معرفی چند قاعدهٔ دیگر در جدول ۱۴.۲ به اختصار می‌آوریم.

جدول ۱۴.۲

نام قاعده	استلزام منطقی یا هم‌ارزی منطقی مربوطه	قاعدهٔ استنتاج
قاعدهٔ انفصال (قیاس استثنایی)	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \Rightarrow q$	۱. $\begin{array}{l} p \\ \underline{p \rightarrow q} \\ \therefore q \end{array}$
قانون قیاس	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow (p \rightarrow r)$	۲. $\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{q \rightarrow r} \\ \therefore p \rightarrow r \end{array}$
انفصال نقیض	$[(p \rightarrow q) \wedge \bar{q}] \Rightarrow \bar{p}$	۳. $\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{\bar{q}} \\ \therefore \bar{p} \end{array}$
قانون ترکیب عطفی		۴. $\begin{array}{l} p \\ \underline{q} \\ \therefore p \wedge q \end{array}$
اثبات با استفاده از کاذب (برهان خلف)	$(\bar{S} \Rightarrow F.) \Rightarrow (S \Leftrightarrow t.)$	۵. $\begin{array}{l} \underline{\bar{S} \Rightarrow F.} \\ \therefore S \end{array}$
حالت خاص اثبات با استفاده از کاذب	$[(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow F.] \Rightarrow (p \Rightarrow q)$	$۵'$. $\begin{array}{l} \underline{(p \wedge \bar{q}) \Rightarrow F.} \\ \therefore p \Rightarrow q \end{array}$
قاعدهٔ تسهیل عطفی[۹]	$(p \wedge q) \Rightarrow p$	۶. $\begin{array}{l} \underline{p \wedge q} \\ \therefore p \end{array}$
قاعدهٔ بسط فصلی[۱۰]	$p \Rightarrow p \vee q$	۷. $\begin{array}{l} \underline{p} \\ \therefore p \vee q \end{array}$
قاعدهٔ قیاس فصلی[۱۱]	$[(p \vee q) \wedge \bar{p}] \Rightarrow q$	۸. $\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\bar{p}} \\ \therefore q \end{array}$
قاعدهٔ اثبات شرطی[۱۲]	$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$	۹. $\begin{array}{l} p \wedge q \\ \underline{p \rightarrow (q \rightarrow r)} \\ \therefore r \end{array}$
قاعدهٔ اثبات با استفاده از حالات	$[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$	۱۰. $\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ \underline{q \rightarrow r} \\ \therefore (p \vee q) \rightarrow r \end{array}$
قاعدهٔ برهان ذوالوجهین بانی[۱۳]	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \Rightarrow (q \vee s)$	۱۱. $\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ \underline{p \vee r} \\ \therefore q \vee s \end{array}$
قاعدهٔ برهان ذوالوجهین مخرب[۱۴]	$[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\bar{q} \vee \bar{s})] \Rightarrow (\bar{p} \vee \bar{r})$	۱۲. $\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow s \\ \underline{\bar{q} \vee \bar{s}} \\ \therefore \bar{p} \vee \bar{r} \end{array}$

چهار مثال بعدی مشخص می‌کند که چگونه قواعد فهرست شده در جدول ۱۴.۲ و نتایج دیگری چون قوانین منطق، در تشکیل اثباتها به‌کار می‌روند.

مثال ۲۴.۲

اولین مثالمان درستی استدلال زیر را مبرهن می‌کند

$$\begin{array}{l} p \to r \\ \bar{p} \to q \\ \underline{q \to s} \\ \therefore \bar{r} \to s \end{array}$$

دلایل	مراحل
فرض	(۱) $p \to r$
فرض	(۲) $q \to s$
فرض	(۳) $\bar{p} \to q$
(۳) و $(\bar{p} \to q) \Leftrightarrow (\bar{\bar{p}} \vee q) \Leftrightarrow (p \vee q)$، که در آن هم‌ارزی منطقی دوم از قانون نقیض دوگانه نتیجه شده است.	(۴) $p \vee q$
(۱)، (۲)، (۴) و قاعدهٔ برهان ذوالوجهین بانی	(۵) $r \vee s$
(۵) و $(r \vee s) \Leftrightarrow (\bar{\bar{r}} \vee s) \Leftrightarrow (\bar{r} \to s)$، که در آن قانون نقیض دوگانه در هم‌ارزی منطقی اول به‌کار رفته است.	(۶) $\therefore \bar{r} \to s$

مثال بعدی تا اندازه‌ای دشوارتر است.

مثال ۲۵.۲

درستی استدلال زیر را تحقیق کنید.

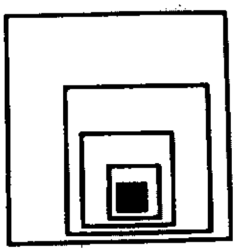
$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to (r \wedge s) \\ \bar{r} \vee (\bar{t} \vee u) \\ \underline{p \wedge t} \\ \therefore u \end{array}$$

دلایل	مراحل
فرض	(۱) $p \to q$
فرض	(۲) $q \to (r \wedge s)$
(۱)، (۲)، و قانون قیاس	(۳) $p \to (r \wedge s)$
فرض	(۴) $p \wedge t$
(۴) و قاعدهٔ تسهیل عطفی	(۵) p
(۵)، (۳)، و قاعدهٔ انفصال	(۶) $r \wedge s$
(۶) و قاعدهٔ تسهیل عطفی	(۷) r
فرض	(۸) $\bar{r} \vee (\bar{t} \vee u)$
(۸)، و قانون شرکت‌پذیری ۷، و قوانین دومورگان	(۹) $(\overline{r \wedge t}) \vee u$
(۴) و قاعدهٔ تسهیل عطفی	(۱۰) t
(۷)، (۱۰)، و قاعدهٔ ترکیب عطفی	(۱۱) $r \wedge t$
(۹)، (۱۱)، و قاعدهٔ قیاسی فصلی	(۱۲) $\therefore u$

یادداشتها :

۱. Rule of Conjunction
۲. Proof by Contradiction
۳. Reductio ad Absurdum
۴. Even
۵. Odd
۶. Rational
۷. Irrational
۸. Indirect proof
۹. Rule of Conjunctive Simplification
۱۰. Rule of Disjunctive Ampilfication
۱۱. Rule of Disjunctive Syllogism
۱۲. Rule of Conditional Proof
۱۳. Rule of the Constructive Dilemma
۱۴. Rule of the Destructive Dilemma

مسائل مسابقه‌ای



۱- ۴ نفر اسامی خود را روی ۴ کارت نوشته و در کیسه‌ای می‌گذارند؛ هر یک به تصادف یک کارت از کیسه برمی‌دارند؛ مطلوب است احتمال آنکه هیچ یک از آنها اسم خود را بیرون نیاورند.

۲- ثابت کنید عمودهایی که از تصویرهای رأسهای یک مثلث بر روی خط راستی، بر ضلعهای روبروی آن رأسها رسم می‌شوند همرسند.