ریاضیات گسسته

RALPH P. GRIMALDI

قسمت ششم

● ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

مثال بعد نشان می‌دهد که ممکن است که گزاره‌های منطقاً هم‌ارز به وضعیات متفاوتی در کاربرد دانش کامپیوتری منجر شوند.

مثال ۲. ۱۴

جدول ۲. ۱۲ آشکار می‌کند که گزاره‌های مرکب $(p \wedge q) \rightarrow r$ و $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ منطقاً هم‌ارزند.

در قطعه برنامه‌های پاسکال نشان داده شده در شکل ۲. ۱، x، y، z، و i متغیرهایی صحیح‌اند. قسمت (a)ی شکل از ساختاری تصمیم‌گیری **مقایسه‌پذیر** با گزاره‌ای به صورت $(p \wedge q) \rightarrow r$ استفاده می‌کنند. در این جا نیز در قسمت (b) داریم p:x > ۰، q:y > ۰، که چون به متغیرهای x، y مقادیر i − ۴ (در مورد x) و i*۳ + ۴ (در مورد y) را نسبت دهیم، به گزاره تبدیل می‌شوند. اما باید مواظب بود! حرف r حکم **Writeln** را نمایش می‌دهد، «حکم اجراپذیر»ی که در واقع به مفهوم متعارف جمله‌ای خبری، که بتواند برچسب راست یا دروغ بخورد، گزاره **نیست**.

در قطعهٔ نشان داده شده در قسمت (a)، تعداد کل مقایساتی، (x > ۰) و (y > ۰)، که طی اجرای برنامه‌مان انجام گرفته‌اند:

۲۰ = (برای y > ۰) ۱۰ + (برای x > ۰) ۱۰

است. از طرف دیگر، قطعهٔ نشان داده شده در قسمت (b) صورتی گزاره‌ای **مقایسه‌پذیر** با استلزامهای تودرتو ی $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ است. در این حالت مقایسهٔ (y > ۰)، جز این که مقایسهٔ (x > ۰) اجرا و به عنوان راست محاسبه شود، اجرا نمی‌شود، نتیجتاً، در این مورد، تعداد کل مقایسه‌ها:

p	q	r	p ∧ q	(p ∧ q) → r	q → r	p → (q → r)
۰	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۰	۰	۱	۰	۱	۱	۱
۰	۱	۰	۰	۱	۰	۱
۰	۱	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۱	۰	۱	۱	۱
۱	۱	۰	۱	۰	۰	۰
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

جدول ۲. ۱۲

چون به i، ۱ و ۲ و ۳ را تخصیص دهیم) ۳+ (برای x > ۰) ۱۰ + ۱۳ = (برای y > ۰،

است. درنتیجه، برحسب تعداد کل مقایسه‌های انجام گرفته در هر یک از دو حالت فوق، قطعه برنامهٔ نشان داده شده در قسمت (b) به کفایت‌تر از قطعه برنامه‌ای است که در قسمت (a) نشان داده‌ایم. □

```
z := 4;
For i := 1 to 10 do
  Begin
    x := z - i;
    y := z + 3*i;
    If (x > 0) and (y > 0) then
      Writeln ('The value of the sum x + y is ', x + y)
  End;
```
(a)

```
z := 4;
For i := 1 to 10 do
  Begin
    x := z - i;
    y := z + 3*i;
    If x > 0 then
      If y > 0 then
        Writeln ('The value of the sum x + y is ', x + y)
  End;
```
(b)

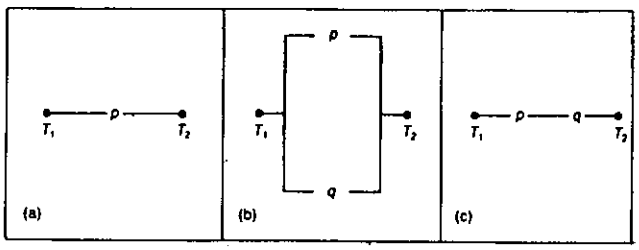
شکل ۱.۲

این بخش را با کاربردی در ساده‌کردن مدارهای سوییچی به پایان می‌بریم. در این مرحله قوانین منطق بسیار کارگشایند.

مدار سوییچی از سیمها و سوییچهایی تشکیل شده‌اند که دو پایانهٔ T_1 و T_2 را به هم وصل می‌کنند. در هر لحظه هر شبکه‌ای، هر سوییچ یا باز است (یعنی جریان از این سوییچ عبور نمی‌کند) یا بسته است (یعنی جریان از آن عبور می‌کند).

در شکل ۲.۲ در قسمت (a) شبکه‌ای با یک سوییچ داریم. هر یک از قسمتهای (b) و (c) دارای دو سوییچ (مستقل) است.

در شبکهٔ قسمت (b)، جریان از T_1 به T_2 عبور می‌کند اگر یکی از سوییچهای p ، q بسته باشند. این شبکه را شبکهٔ **موازی** می‌نامیم و با $p \vee q$ نمایش می‌دهیم. از شبکه قسمت (c)، برای این که جریان از T_1 به T_2 بگذرد، ضروری است که هر دو سوییچ p، q بسته باشند. در این حالت سوییچها به صورت **سری** اند و شبکه با $p \wedge q$ نمایش داده می‌شود.

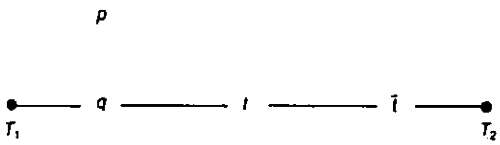


شکل ۲.۲

مثال ۲. ۱۵

سوییچهای شبکه‌ای نیاز به عملکرد مستقل از یکدیگر ندارند. شبکهٔ نشان داده شده در شکل ۳.۲ را در نظر بگیرید. در این مورد سوییچهای با برچسب t و $\bar{t}$ مستقل نیستند. این دو سوییچ را چنان هموند کرده‌ایم که t باز (بسته) است، اگر و تنها اگر $\bar{t}$ به‌طور همزمان بسته (باز) باشد. این مطالب برای سوییچهای q، $\bar{q}$ نیز صادق است. (نیز، مثلاً، سه سوییچ با برچسب p مستقل نیستند.)

این شبکه با



شکل ۳.۲

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee t \vee \bar{q}) \wedge (p \vee \bar{t} \vee r)$$

نمایش داده می‌شود. با استفاده از قوانین منطق، گزارهٔ فوق را، که شبکهٔ مورد بحث را نمایش می‌دهد، به طریق زیر ساده می‌کنیم. در این مورد، به خاطر سادگی کار، کاربردهای قواعد جانشینی را متذکر نمی‌شویم، اما قوانین مهم منطق به کار رفته را فهرست می‌کنیم.)

دلیل

$$(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee t \vee \bar{q}) \wedge (p \vee \bar{t} \vee r)$$
$$\Leftrightarrow p \vee [(q \vee r) \wedge (t \vee \bar{q}) \wedge (\bar{t} \vee r)]$$

قانون توزیع‌پذیری $\vee$ بر $\wedge$

$$\Leftrightarrow p \vee [[(q \vee r) \wedge t] \vee [(q \vee r) \wedge \bar{q}]) \wedge (\bar{t} \vee r)]$$

قانون توزیع‌پذیری ∧ بر ∨

$$\Leftrightarrow p\vee\Big[\big([(q\vee r)\wedge t]\vee[(q\wedge\bar{q})\vee(r\wedge\bar{q})]\big)\wedge(\bar{t}\vee r)\Big]$$

قانون توزیع‌پذیری ∧ بر ∨

$$\Leftrightarrow p\vee\Big[\big([(q\vee r)\wedge t]\vee(r\wedge\bar{q})\big)\wedge(\bar{t}\vee r)\Big] \quad q\wedge\bar{q}\Leftrightarrow F.$$

همانی برای ∨

$$\Leftrightarrow p\vee\Big[\big([(q\vee r)\wedge t]\wedge(\bar{t}\vee r)\big)\vee\big((r\wedge\bar{q})\wedge(\bar{t}\vee r)\big)\Big]$$

چرا؟

چرا؟

$$\Leftrightarrow p\vee\Big[[(q\vee r)\wedge(t\wedge(\bar{t}\vee r))]\vee [(r\wedge\bar{q}\wedge\bar{t})\wedge(r\wedge\bar{q}\wedge r)]\Big]$$

چرا؟

$$\Leftrightarrow p\vee\Big[[(q\vee r)\wedge(t\wedge r)]\vee[(r\wedge\bar{q}\wedge\bar{t})\vee(r\wedge\bar{q})]\Big]$$

قانون جذب

$$\Leftrightarrow p\vee\Big[[(q\vee r)\wedge(t\wedge r)]\vee(r\wedge\bar{q})\Big]$$

قانون توزیع‌پذیری ∧ بر ∨

$$\Leftrightarrow p\vee\Big[(q\wedge t\wedge r)\vee(r\wedge t\wedge r)\vee(r\wedge\bar{q})\Big]$$

قانون خودنمایی

$$\Leftrightarrow p\vee\Big[((q\wedge t\wedge r)\vee(r\wedge t))\vee(r\wedge\bar{q})\Big]$$

قانون جذب

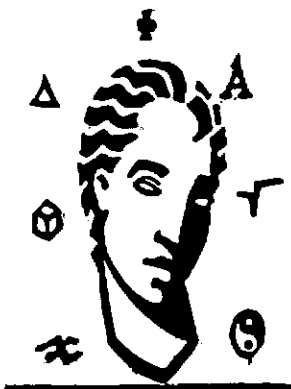
$$\Leftrightarrow p\vee\Big[(r\wedge t)\vee(r\wedge\bar{q})\Big]$$

قانون توزیع‌پذیری ∧ بر ∨

در نتیجه،

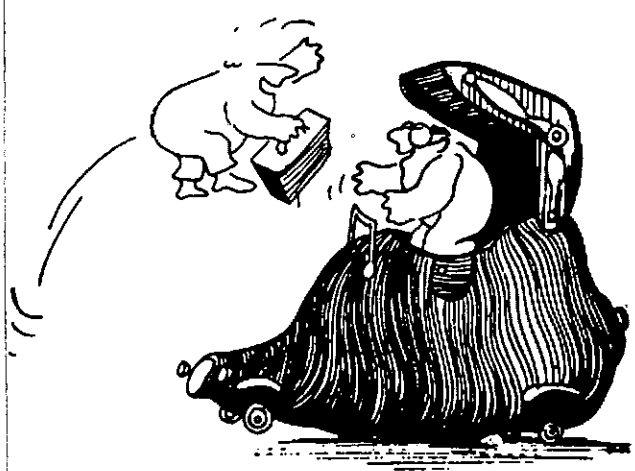
$$(p\vee q\vee r)\wedge(p\vee t\vee\bar{q})\wedge(p\vee\bar{t}\vee r)\Leftrightarrow p\vee\Big[r\wedge(t\vee\bar{q})\Big]$$

و شبکهٔ نشان داده شده در شکل ۳.۲ (b) به این مفهوم— هم‌ارز شبکهٔ اصلی است، که جریان از T_1 به T_2 در شبکهٔ (a) دقیقاً زمانی عبور می‌کند، که در شبکهٔ (b) چنین باشد. اما شبکهٔ (b) تنها چهار سوییچ، یعنی پنج سوییچ کمتر از شبکهٔ (a)، دارد. □



تفریح اندیشه ۳

مهرداد اتومبیلی را برای مسافرت به شهری که در ۱۰۰ کیلومتری محل اقامت او بود کرایه کرد. در نیمهٔ راه دوست خود را سوار کرد و با او ۵۰ کیلومتر آخر راه را پیمود تا به مقصد رسیدند. شب، هنگام مراجعت به شهر خودشان، مهرداد مجدّداً دوستش را سوار اتومبیل کرد و در همان نقطه‌ای که او را سوار کرده بود پیاده کرد و به راه خود ادامه داد تا به شهرش رسید. در آنجا ۲۴ تومان بابت کرایه پرداخت. درصورتی که مهرداد و دوستش بخواهند کرایه اتومبیل را منصفانه به نسبت راهی که پیموده بودند بپردازند، سهم هرکدام چقدر است.



جواب در صفحهٔ ۸۸