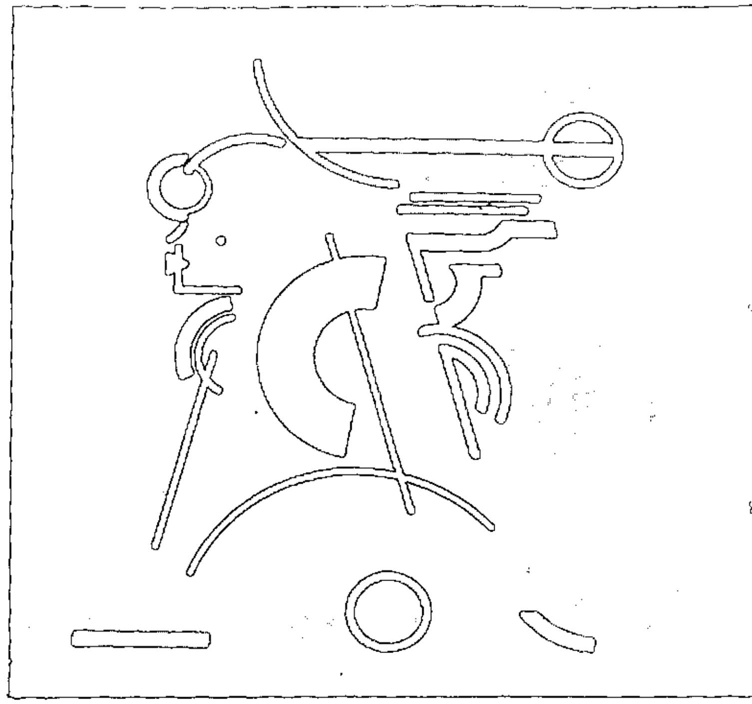
ریاضیات گسسته

(قسمت سوم)

ترکیبهای با تکرار
توزیعها

(سوّم ریاضی و پیش‌دانشگاهی)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور



ملاحظه کردیم، هنگامی که تکرار مجاز باشد، به ازای n شیءِ متمایز، ترتیب به اندازهٔ r این اشیا را، به ازای عدد صحیح $r \geq 0$، می‌توان به n^r طریق به دست آورد. اکنون به مسأله‌ای مشابه در مورد ترکیبات توجه می‌کنیم و بار دیگر مسألهٔ مرتبطی را به دست می‌آوریم که راه حلش از اصول محاسبهٔ قبلیمان حاصل می‌شود.

مثال ۱. ۲۵. هفت دانش‌آموز سال اول دبیرستان، در راه بازگشت از تمرین ورزش در یک ساندویچ فروشی توقف کردند. در آنجا هر یک از آنها یکی از ساندویچهای زیر را سفارش داد: همبرگر، سوسیس، الیویه و ماهی. چند خرید متفاوت ممکن است رخ داده باشد؟

همبرگر، سوسیس، الیویه، و ماهی را به ترتیب با c، h، t، و f نمایش می‌دهیم. در اینجا با دفعات خرید هر ساندویچ و نه با ترتیبی که خریده می‌شوند سر و کار داریم، بنابراین مسأله یکی از موارد انتخاب یا ترکیبهای با تکرار است.

در جدول ۱. ۵ بعضی از خریدهای ممکن را در ستون (a) و طریق دیگر نمایش هر خرید را در ستون (b) فهرست کرده‌ایم.

جدول ۱. ۵

(a)	(b)
۱.c, c, h, h, t, t, f	۱.xx | xx | xx | x
۲.c, c, c, c, h, t, f	۲.xxxx | x | x | x
۳.c, c, c, c, c, c, f	۳.xxxxxx | | | x
۴.h, t, t, f, f, f, f	۴. | x | xx | xxxx
۵.t, t, t, t, t, f, f	۵. | | xxxxx | xx
٦.t, t, t, t, t, t, t	٦. | | xxxxxxx |
۷.f, f, f, f, f, f, f	۷. | | | xxxxxxx

در مورد خرید مربوط به ستون (b) ی جدول ۱. ۵ چنین درمی‌یابیم که هر x واقع در سمت چپ بار (خط قائم) اول (۱) نمایشگر c اند، هر x بین بارهای اول و دوم نمایشگر h هستند، xهای بین بارهای دوم و سوم به جای tها قرار دارند، و هر x واقع در سمت راست بار سوم به جای f قرار دارند. به عنوان مثال، سومین خرید سه بار متوالی دارد زیرا کسی سوسیس یا الیویه نخریده است؛ بار واقع در آغاز خرید چهارم دلالت بر این دارد که در این خرید همبرگری وجود نداشته است.

بار دیگر بین دو گردایهٔ اشیا تناظری برقرار شده است، که در آن چگونگی شمردن تعداد اشیا در یک گردایه را می‌دانیم.

در ستون (b) ی جدول ۱. ۵، جمیع ترتیبهای ۱۰ نماد شامل هفت x و سه ۱ را می‌شماریم، بنابراین، بنا به تناظر مزبور، تعداد ترتیبهای متفاوت ستون (a) عبارت است از :

$$\frac{10!}{7!3!}=\binom{10}{7}$$

در مثال فوق توجه می‌کنیم که هفت x مورد بحث (هر یک برای یک دانش‌آموز سال اول) متناظر با اندازهٔ انتخاب است و برای جدا کردن ۴ = ۱+۳ فقره غذای ممکنی که می‌توانند انتخاب شوند به سه بار نیاز است. ❑

در حالت عمومی، زمانی که مایل به انتخاب، *با تکرار*[1]، r، شیء از n شیء متفاوتیم، (چون در جدول ۱. ۵) درمی‌یابیم که در کار بررسی جمیع ترتیبات r، x و n − ۱، ۱ هستیم و تعداد این ترتیبات عبارت است از :

$$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}=\binom{n+r-1}{r}$$

در نتیجه تعداد ترکیبات، *با تکرار*، n شیء که هر بار r شیء از آنها در نظر گرفته شوند، عبارت است از :

$C(n+r-1,\ r)$

(در مثال ۱. ۲۵، n = ۴، r = ۷، بنابراین، زمانی که تکرار مجاز باشد، برای r امکان دارد که از n تجاوز کند.)

مثال ۱. ۲۶. یک مغازهٔ شیرینی‌فروشی ۲۰ نوع متفاوت شیرینی بزرگ ارائه می‌دهد. با فرض این که زمانی که داخل مغازه می‌شویم حداقل یک دوجین از هر نوع شیرینی موجود است، می‌توانیم یک دوجین شیرینی بزرگ را به

$C(20+12-1,\ 12)=C(31,\ 12)=141{,}120{,}525$

طریق انتخاب کنیم (در اینجا n = ۲۰، r = ۱۲). ❑

مثال ۱. ۲۷. رییس اداره‌ای چهار منشی با نامهای B(۱)، G(۲)، M(۳)، N(۴) دارد، و مایل است که به عنوان عیدی ۱۰۰ دلار، اسکناس ده دلاری، را بین آنها تقسیم کند.

a) رییس مزبور با پذیرفتن حالتی که طبق آن به یکی یا بیش از یکی از منشیها چیزی نرسد، در کار انتخابی به اندازهٔ ۱۰ (برای هر اسکناس ده دلاری یکی) از گردایه‌ای به اندازهٔ ۴ (چهار منشی)، با تکرار، است. این کار را می‌توان به

$C(4+10-1,\ 10)=C(13,\ 10)=286$

طریق انجام داد.

b) اگر قرار باشد که کسی خیلی آزرده نشود در این صورت لازم است که به هر منشی ۱۰ دلار برسد. در این حال رییس اداره با انتخابی به اندازهٔ ۶ (شش اسکناس ده دلاری باقیمانده) از همان گردایهٔ به اندازهٔ ۴ روبه‌رو است. و تعداد انتخابها در این مرحله $C(4+6-1,\ 6)=C(9,\ 6)=84$ است. (به عنوان مثال، انتخاب ۲، ۳، ۳، ۴، ۴، ۴ به این معنی است که B پول اضافه‌ای به دست نمی‌آورد، در حالی که G، ۱۰ دلار اضافه می‌گیرد، به M، ۲۰ دلار اضافه می‌رسد، و N در مجموع ۴۰ دلار به دست می‌آورد.)

c) اگر لازم باشد که هر منشی حداقل ۱۰ دلار بگیرد و N، به عنوان سرمنشی، حداقل ۵۰ دلار دریافت کند، در این صورت تعداد طرقی که رییس اداره می‌تواند پول عیدی را، طبق آنها تقسیم کند، عبارت است از :

$$\underbrace{C(3+2-1,\ 2)}_{\text{N دقیقاً ۵۰ دلار می‌گیرد}}+\underbrace{C(3+1-1,\ 1)}_{\text{N دقیقاً ۶۰ دلار می‌گیرد}}$$

$$+\underbrace{C(3+0-1,\ 0)}_{\text{N دقیقاً ۷۰ دلار می‌گیرد}}=10=\underbrace{C(4+2-1,\ 2)}_{\text{با استفاده از روش قسمت (b)}}$$ ❑

اکنون، پس از مثالهایی که ترکیبات با تکرار را مورد استفاده قرار داده‌اند، به بررسی دو مثال شامل اصول دیگر شمارش نیز می‌پردازیم.

مثال ۱. ۲۸. به چند طریق می‌توان هفت سیب و شش پرتقال را میان چهار کودک چنان تقسیم کرد که به هر کودک

حداقل یک سیب برسد؟

با دادن یک سیب به هر کودک، $C(۴+۳-۱,\ ۳)=۲۰$ طریق تقسیم سه سیب دیگر و $C(۴+۶-۱,\ ۶)=۸۴$ طریق تقسیم شش پرتقال را میان بچه‌ها داریم. بنابراین، بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب $۱۶۸۰=۸۴\times۲۰$ طریق تقسیم میوه‌ها با شرایط بیان شده موجودند. □

مثال ۱. ۲۹. قرار است پیامی متشکل از ۱۲ نماد متفاوت از طریق یک کانال ارتباطی فرستاده شود. فرستندهٔ موردبحث، علاوه بر ۱۲ نماد مزبور کلاً ۴۵ فاصله (سفید) نیز مابین نمادها، با حداقل سه فاصله بین هر جفت نماد متوالی، می‌فرستد. به چند طریق فرستنده می‌تواند پیام را بفرستد؟

در ترتیب دادن ۱۲ نماد متفاوت ۱۲! طریق وجود دارد، به ازای هر یک از این ترتیبها ۱۱ مکان بین ۱۲ نماد مورد بحث موجودند. به علت این که باید بین نمادهای متوالی حداقل ۳ فاصله موجود باشند، ۳۳ فاصله از ۴۵ فاصله را مصرف می‌کنیم و اکنون باید جای ۱۲ فاصلهٔ باقیمانده را معین کنیم. این کار انتخابی، با تکرار، به اندازهٔ ۱۲ (فاصله) از گردایه‌ای به اندازهٔ ۱۱ (مکان) است، و می‌تواند به $C(۱۱+۱۲-۱,\ ۱۲)=۶۴۶,\ ۶۴۶$ طریق انجام شود.

در نتیجه، فرستندهٔ مزبور، بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب، می‌تواند پیام مورد نظر را با فاصله‌بندی مطلوب به $\binom{۲۲}{۱۲}(۱۲!)=۳/۰۹۷\times۱۰^{۱۴}$ طریق ارسال کند. □

در مثال بعدی به معرفی مفهومی می‌پردازیم که به نظر می‌رسد سر و کارش بیش از ترکیبات یا ترتیبات با نظریهٔ اعداد است. با وجود این، آشکار می‌شود که راه حل آن هم ارز شمارش ترکیبات با تکرار است.

مثال ۱. ۳۰. تمام جوابهای صحیح معادلهٔ

$$x_1+x_2+x_3+x_4=۷$$

را، که در آن، به ازای هر $۱\le i\le ۴$، $x_i\ge ۰$، بیابید.

یکی از جوابهای معادله عبارت است از $x_1=۳$، $x_2=۳$، $x_3=۰$، $x_4=۱$. (این جواب با جوابی چون $x_1=۱$، $x_2=۰$، $x_3=۳$، $x_4=۳$، با وجود این که در آن همان چهار عدد صحیح به کار رفته‌اند، متفاوت است.) یکی از تعبیرهای ممکن جواب $x_1=۳$، $x_2=۳$، $x_3=۰$، $x_4=۱$ این است که بخواهیم هفت ریال (اشیای یکسان) را بین چهار کودک (ظرف متمایز) توزیع کنیم، و در این حال به هر یک از دو کودک اول سه یک ریالی بدهیم، به سومی چیزی ندهیم، و آخرین یک ریالی را به چهارمین کودک بدهیم. با ادامه دادن به این تعبیر، ملاحظه می‌کنیم که هر جواب صحیح نامنفی معادلهٔ مورد بحث متناظر با انتخابی، با تکرار، به اندازهٔ ۷ (یک ریالی یکسان) از گردایه‌ای به اندازهٔ ۴ (کودک متمایز) است، بنابراین، $C(۴+۷-۱,\ ۷)=۱۲۰$ جواب موجود است. □

در این مرحله اهمیت دارد که هم‌ارزی موارد زیر را بشناسیم:

a) تعداد جوابهای صحیح معادلهٔ

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=r \quad x_i\ge ۰ \quad ۱\le i\le n$$

b) تعداد انتخابهای، با تکرار، به اندازهٔ r از گردایه‌ای به اندازهٔ n.

c) تعداد روشهایی که طبق آنها r شیء یکسان بتوانند بین n ظرف متمایز توزیع شوند.

مورد (c)، بر حسب توزیعات، تنها وقتی r شیء توزیع شده یکسان و n ظرف مربوطه متمایز باشند، درست است. هنگامی که هم r شیء و هم n ظرف متمایز باشند، می‌توانیم هر یک از n ظرف را به ازای هر یک از اشیای مزبور انتخاب کرده با استفاده از قاعدهٔ حاصل‌ضرب n^r توزیع به دست آوریم.

هنگامی که اشیای مزبور متمایز اما ظرفها یکسان باشند، مسأله را با استفاده از اعداد استرلینگ از نوع دوم حل می‌کنیم. در مورد حالت نهایی، که در آن هم اشیا هم ظرفها یکسانند، نظریهٔ افزارهای اعداد صحیح، بعضی از مطالب لازم را به دست خواهد داد.

مثال ۱. ۳۱. به چند طریق شخص می‌تواند ۱۰ مهرهٔ سفید (یکسان) را بین شش ظرف متمایز توزیع نماید؟

حل این مسأله هم ارز یافتن تعداد جوابهای صحیح نامنفی معادلهٔ

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 10$$

است. این تعداد، تعداد انتخابهای به اندازهٔ ۱۰، با تکرار، از گردایه‌ای به اندازهٔ ۶ است. در نتیجه پاسخ مسأله عبارت است از $C(6+10-1, 10) = 3003$. ❑

اکنون به بررسی دو مثال دیگر در ارتباط با موضوع این بخش می‌پردازیم.

مثال ۱. ۳۲. از مثال ۱. ۳۱ می‌دانیم که در مورد معادلهٔ $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 10$، ۳۰۰۳ جواب صحیح نامنفی موجودند. در مورد نامساوی $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 < 10$ چند جواب از چنین جوابهایی وجود دارند؟

یکی از رهیافتهایی که در حل این نامساوی عملی به نظر می‌رسد تعیین تعداد چنین جوابهایی در مورد $x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = k$ است، که در آن k عددی صحیح است و $0 \le k \le 9$. این روش گرچه در این حالت معقول است، در صورتی که به جای ۹ عددی تا اندازه‌ای بزرگتر، به طور مثال ۱۰، قرار گیرد غیرعملی می‌شود. اما، در آینده، اتحادی ترکیباتی را اثبات می‌کنیم که کمک می کند با استفاده از این رهیافت، راه حل دیگری در مورد این مسأله به دست آوریم.

در حال حاضر مسأله را با توجه به تناظر بین جوابهای صحیح و نامنفی

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_6 < 10 \qquad (1)$$

و جوابهای صحیح

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_6 + x_7 = 10$$
$$0 \le x_i,\ 1 \le i \le 6,\ 0 < x_7 \qquad (2)$$

تبدیل می‌کنیم.

تعداد جوابهای (۲) برابر تعداد جوابهای صحیح و نامنفی

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_6 + y_7 = 9$$

است، که در آن، به ازای $1 \le i \le 6$، $y_i = x_i$، و $y_7 = x_7 - 1$. این تعداد عبارت است از:

$$C(7+9-1, 9) = 5005$$ ❑

مثال ۱. ۳۳. در بسط دوجمله‌ای $(x+y)^n$، هر جمله به صورت $\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$ است، بنابراین تعداد کل جمله‌های بسط تعداد جوابهای صحیح و نامنفی $n_1 + n_2 = n$ است (n_1 نمای x، n_2 نمای y است). این تعداد عبارت است از $C(2+n-1, n) = n+1$.

شاید چنین به نظر برسد که برای به‌دست آوردن نتیجهٔ فوق از استدلالی به‌نسبت طولانی استفاده کرده‌ایم. بسیاری از ما شاید مایل باشیم نتیجهٔ مزبور را بر مبنای تجربه‌هایمان در محاسبهٔ $(x+y)^n$، به ازای مقادیر کوچک و گوناگون n، بپذیریم.

گرچه تجربه در شناخت نمونه‌ای دارای ارزش است، مورد دریافتن اصلی عمومی همواره کفایت ندارد، و در این حالت، در صورتی که مایل به دانستن این بودیم که در بسط $(w+x+y+z)^{10}$ چند جمله موجود است کارایی کمی از خود نشان می‌دهد.

در حالت فوق، هر جملهٔ متمایز به‌صورت $\binom{10}{n_1, n_2, n_3, n_4} w^{n_1} x^{n_2} y^{n_3} z^{n_4}$، با $0 \le n_i$، به ازای $1 \le i \le 4$، است و $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 10$. مسألهٔ اخیر را می‌توان به $C(4+10-1, 10) = 286$ طریق حل کرد، بنابراین در بسط $(w+x+y+z)^{10}$، ۲۸۶ جمله موجود است. ❑

دو مثال آخرمان در این بخش کاربردهایی از زمینهٔ دانش کامپیوتری به دست می‌دهند. گذشته از این، مثال آخر به فرمول مجموعه‌یابی مهمی منجر می‌شود که در بسیاری از مباحث بعدی از آن استفاده خواهیم کرد.

*** زیرنویس**

1. Repetition