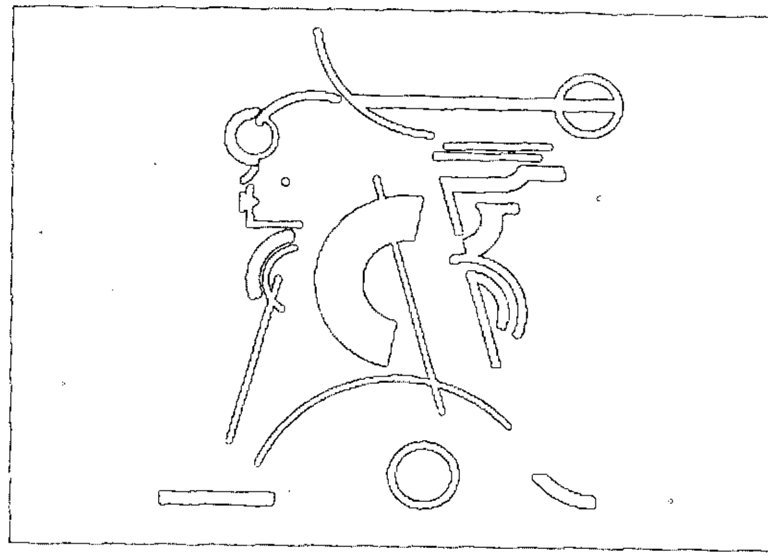
# ریاضیات گسسته

## (قسمت دوّم)

(سوّم ریاضی و پیش‌دانشگاهی)

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

**Discrete and Combinatorial Mathematics. An Applied Introduction. Ralph P. Grimaldi**



### ترکیبات: قضیّهٔ دو جمله‌ای

دستهٔ کارتی شامل ۵۲ کارت از چهار رنگ زیر تشکیل شده است:

قرمز، سیاه، آبی، و سبز. هر رنگ دارای ۱۳ کارت (از یک تا سیزده) است: ۱، ۲، ۳، ...، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳.

اگر خواسته باشیم از این دسته کارت به‌طور متوالی و بدون بازگرداندن، سه کارت بیرون بکشیم، در این صورت بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب:

$$۵۲ \times ۵۱ \times ۵۰ = \frac{۵۲!}{۴۹!} = P(۵۲ \text{ و } ۳)$$

امکان موجودند، که مثلاً یکی از آنها ۱، سبز یکی ۹، قرمز یکی سیاه است. به‌جای این کار، اگر به‌طور ساده از دستهٔ کارت مزبور یکباره سه کارت چنان انتخاب کنیم که دیگر ترتیب انتخاب کارتها مهم نباشد، در این صورت جمیع شش جایگشت زیر دقیقاً متناظر بایک انتخاب (بدون ترتیب) می‌شوند.

سیاه - ۱، سبز - ۹، قرمز و ۹، قرمز - سیاه - ۱، آبی و سیاه - ۹، قرمز - ۱، آبی ۹، قرمز - ۱، آبی - سیاه و ۱، آبی - ۹، قرمز - سیاه و ۱، آبی - سیاه - ۹، قرمز

در نتیجه، هرانتخاب، باترکیب، ازاین کارتها بی‌هیچ ارجاعی به‌ترتیب، متناظر با !۳ جایگشت سه کارت است. این مطلب در شکل تساوی به‌صورت زیر بیان می‌شود:

(تعداد انتخابهای سه اندازه‌ای از دسته‌ای ۵۲ تایی) × (!۳)

(تعداد جایگشتهای ۵۲ کارت‌که یکباره سه کارت از آنها انتخاب شود) =

$$= P(۵۲ , ۳) = \frac{۵۲!}{۴۹!}$$

درنتیجه، از یک دستهٔ کارتِ ۵۲ تایی، می‌توان به ۱۰۰ و ۲۲ = (!۴۹ !۳) / !۵۲ طریق، سه کارت، بدون بازگرداندن، بیرون کشید.

درنتیجه، دانشجوی مورد بحث می‌تواند، بنابه قاعدهٔ حاصل‌ضرب، امتحان خود را به

$$\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۴} = ۱۰ \times ۵ = ۵۰$$

طریق به‌اتمام رساند. □

**مثال ۱ . ۲۰**

a) معلم ورزش دبیرستانی باید از کلاسهای پایینتر و بالاتر نه نفر برای تیم والیبال انتخاب کند. اگر ۲۸ نفر دانش‌آموز کلاس پایینتر و ۲۵ نفر دانش‌آموز کلاس بالاتر موجود باشند، می‌تواند انتخاب خود را به

$$\binom{۵۳}{۹} = ۴ , ۴۳۱ , ۶۱۳ , ۵۵۰$$

طریق انجام دهد.

b) اگر دو شاگرد کلاس پایینتر و یک شاگرد کلاس بالاتر بهترین بازیکن‌اند و ضرورت دارد که در تیم باشند، در این صورت باقی‌ماندهٔ تیم می‌توانند به

$$\binom{۵۰}{۶} = ۱۵ , ۸۹۰ , ۷۰۰$$

طریق انتخاب شوند.

c) برای تورنمنت خاصی تیم مدرسه باید متشکل از چهار شاگرد پایینتر و پنج شاگرد بالاتر باشد. معلم موردبحث می‌تواند چهار شاگرد پایینتر را به $\binom{۲۸}{۴}$ طریق انتخاب کند. به‌ازای هریک از این انتخابها $\binom{۲۵}{۵}$ طریق اختیار پنج شاگرد بالاتر را دارد. در نتیجه، بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب می‌تواند تیمش را به

$\binom{۲۸}{۴}\binom{۲۵}{۵} = ۱,۰۸۷,۸۳۶,۷۵۰$ طریق برای تور خاص انتخاب کند. □

بعضی از مسائل را، بسته به این‌که شخص چگونه به تحلیل وضعیت می‌پردازد، می‌توان از نقطهٔ نظر ترتیب یا ترکیب مورد بررسی قرار داد. مثال زیر به توضیح این موضوع می‌پردازد.

**مثال ۱ . ۲۱.** معلم ورزش مثال ۱ . ۲۰ باید چهار تیم نه نفره از میان ۳۶ دانش‌آموز سال اول تشکیل دهد. به چند طریق می‌تواند این چهار تیم را انتخاب کند. تیمها را A ، B ، C ، و D می‌نامیم.

a) برای تشکیل تیم A ، می‌تواند نه دانش‌آموز را از میان ۳۶ دانش‌آموزی که نام‌نویسی کرده‌اند به $\binom{۳۶}{۹}$ طریق انتخاب کند. برای تیم B فرآیند انتخاب $\binom{۲۷}{۹}$ امکان به‌دست می‌دهد. این کار برای انتخاب تیمهای C و D ، به‌ترتیب، $\binom{۱۸}{۹}$ و $\binom{۹}{۹}$ طریق امکان به‌جامی‌گذارد. بنابراین، بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب، چهار تیم مذکور می‌توانند به

$$\binom{۳۶}{۹}\binom{۲۷}{۹}\binom{۱۸}{۹}\binom{۹}{۹} = \left(\frac{۳۶!}{۲۷!۹!}\right)\left(\frac{۲۷!}{۱۸!۹!}\right)$$

$$\left(\frac{۱۸!}{۹!۹!}\right)\left(\frac{۹!}{۹!۰!}\right) = \frac{۳۶!}{۹!۹!۹!۹!} = ۲.۱۴۵ \times ۱۰^{۱۹}$$

طریق انتخاب شوند.

b) برای راه حل دیگر، ۳۶ دانش‌آموز مزبور را به طریق زیر در یک خط قرار می‌دهیم.

| دانش‌آموز اول | دانش‌آموز دوم | دانش‌آموز سوم | ...... | دانش‌آموز سی و پنجم | دانش‌آموز سی‌وششم |
|---|---|---|---|---|---|

به‌سبب انتخاب چهار تیم، باید نه نفر A ، نه‌نفر B ، نه نفر C و نه نفر D را در ۳۶ مکان مزبور توزیع کنیم. تعداد طرقی که این کار را طبق آنها می‌توان انجام داد تعداد ترتیبات ۳۶ حرف در بردارندهٔ نه عضو هریک از A ، B ، C ، و D است. این مسأله، مسألهٔ آشنای ترتیبهای اشیای نامتمایز است، و جواب آن عبارت از:

$$\frac{۳۶!}{۹!۹!۹!۹!}$$ □

دو مثال بعدیمان اشاره براین دارند که چگونه بعضی از مسائل، برای حلشان، به‌هر دو مفهوم ترتیب و ترکیب نیاز دارند.

**مثال ۱ . ۲۲.** تعداد ترتیبات حروف TALLAHASSEE عبارت است.

$$\frac{۱۱!}{۳!۲!۲!۲!۱!۱!} = ۸۳۱,۶۰۰$$

چند ترتیب از آنها بدون A های مجاوراند؟

هنگامی که A ها را کنار بگذاریم، برای ترتیب حروف باقی‌مانده:

$$\frac{۸!}{۲!۲!۲!۱!۱!} = ۵۰۴۰$$

طریق موجودند. یکی از این ۵۰۴۰ طریق را درشکل زیر نشان داده‌ایم، که نوک پیکانهای آن دلالت برنه‌مکان ممکن برای سه A ی موردبحث دارند.

$\uparrow$ E $\uparrow$ E $\uparrow$ S $\uparrow$ T $\uparrow$ L $\uparrow$ L $\uparrow$ S $\uparrow$ H $\uparrow$

سه مکان از این مکانها را می‌توان به $\binom{۹}{۳} = ۸۴$ طریق انتخاب کرد؛ و به‌علت این‌که این کار به‌ازای جمیع ۵۰۳۹ ترتیب دیگر E ، E ، S ، T ، L ، L ، S ، H نیز ممکن است، بنابه قاعدهٔ حاصل‌ضرب $۵۰۴۰ \times ۸۴ = ۴۲۳,۳۶۰$ ترتیب حروف بدون A های متوالی در TALLAHASSEE موجودند □ .

**مثال ۱ . ۲۳.** در مطالعهٔ نظریهٔ کدگذاری جبری «algebraic coding Theory» و نظریهٔ زبانهای کامپیوتری «Theory of computer languages» ترتیبات خاصی، موسوم به رشته‌ها «*strings*» ، تشکیل شده از الفبا «alphabet» ای تعیین شده از نمادها، را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اگر الفبای تعیین شده مزبور، فی‌المثل، شامل نمادهای ۰ ، ۱ ، و ۲ باشد، در این‌صورت ۰۱ ، و ۲۰ پنج رشته از نه رشتهٔ به طول «*length*» دواند. ۰۰۰ و ۱۱۰ درمیان ۲۷ رشتهٔ به‌طول سه‌اند.

درحالت عمومی، اگر n عدد صحیح و مثبت دلخواهی باشد، آنگاه بنا به قاعدهٔ حاصل‌ضرب در مورد الفبای ۰ ، ۱ ، و ۲ ، $۳^n$ رشته به‌طول n موجودند. اگر $x = x_۱x_۲x_۳ \ldots x_n$ یکی از این رشته‌ها باشد، وزن «*weight*» x ، نمایش داده شده با wt(x) ، را با $wt\ (u) = x_۱ + x_۲ + x_۳ + \ldots + x_n$ تعریف می‌کنیم. به‌عنوان مثال، حالت n = ۲ ، wt (۱۲) = ۳ و wt (۲۲) = ۴ ؛ و در حالت n = ۳ ، wt (۱۰۱) = ۲ ، wt (۲۱۰) = ۳ ، و wt (۲۲۲) = ۶ .

می‌خواهیم مشخص کنیم که در میان $۳^{۱۰}$ رشتهٔ به‌طول ۱۰ چند رشته وزن زوج دارند. رشته‌ای چنین زمانی که تعداد ۱ های واقع در

آن زوج باشد دارای وزن زوج است.

شش حالت متفاوت برای بررسی موجودند. اگر رشتهٔ x شامل ۱ نباشد، در این صورت هریک از ۱۰ مکان واقع در x را می‌توان با ۰ یا ۲ پرکرد، و بنابه قاعدهٔ حاصل‌ضرب $2^{10}$ رشته از چنین رشته‌هایی وجود دارند. زمانی که رشتهٔ مورد بحث شامل دو ۱ باشد، مکانهای این دو ۱ را می‌توان به $\binom{10}{2}$ طریق اختیار کرد. هنگامی که این دو مکان مشخص شوند، برای قراردادن ۰ یا ۲ درهشت مکان دیگر $\binom{8}{2}$ طریق موجود می‌شوند. درنتیجه $2^8\binom{10}{2}$ رشته به‌وزن زوج وجود دارند که شامل دو ۱ اند. تعداد رشته‌های چهار حالت دیگر را در جدول ۱ . ۲ داده‌ایم.

■ جدول ۱ . ۲

| تعداد رشته‌ها | تعداد ۱ها | تعداد رشته‌ها | تعداد ۱ها |
|---|---|---|---|
| $\binom{10}{8}2^2$ | 8 | $\binom{10}{4}2^6$ | 4 |
| $\binom{10}{10}$ | 10 | $\binom{10}{6}2^4$ | 6 |

در نتیجه، بنا به قاعدهٔ جمع، تعداد رشته‌های به‌طول ۱۰ ی که دارای وزن زوجند عبارت است از:

$$2^{10}+\binom{10}{2}2^8+\binom{10}{4}2^6+\binom{10}{6}2^4+\binom{10}{8}2^2+\binom{10}{10}$$

$$=\sum_{n=0}^{5}\binom{10}{2n}2^{10-2n} \qquad \Box$$

این بخش را باسه مطلب که بامفهوم ترکیبات در ارتباطند خاتمه می‌دهیم.

ابتدا توجه می‌کنیم که به‌ازای اعداد صحیح n ، r ، با $n \geq r$ ، $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ . این رابطه رامی‌توان به‌طریق جبری ازفرمول $\binom{n}{r}$ محقق کرد، اما ترجیح می‌دهیم ملاحظه کنیم زمانی که با انتخاب با اندازهٔ r ی از کلکسیونی از n شیء متمایز سروکار داریم، فرایند انتخاب $n-r$ شیء به‌جا می‌گذارد. درنتیجه، $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$ وجود تناظری را بین انتخابهای بااندازهٔ r (شیء انتخاب شده) و انتخابهای بااندازهٔ $n-r$ (شیء به‌جا مانده) اظهار می‌کند. مثالی از این تناظر را در جدول ۱ . ۳ نشان داده‌ایم که در آن $n=5$ ، $r=2$ ، و اشیای متمایز عبارتند از ۱ ، ۲ ، ۳ ، ۴ ، و ۵.

این نوع تناظر درفصل ۵ به‌گونه‌ای صوریتر تعریف شده در سایر حالات شمارش به کار خواهد رفت.

■ جدول ۱ . ۳

| انتخابهای اندازهٔ $n-r=3$ (اشیای کنار گذاشته شده) | | انتخابهای اندازهٔ $r=2$ (اشیای انتخاب شده) | |
|---|---|---|---|
| 1. 3,4,5 | 6. 1,3,5 | 1. 1,2 | 6. 2,4 |
| 2. 2,4,5 | 7. 1,3,4 | 2. 1,3 | 7. 2,5 |
| 3. 2,3,5 | 8. 1,2,5 | 3. 1,4 | 8. 3,4 |
| 4. 2,3,4 | 9. 1,2,4 | 4. 1,5 | 9. 3,5 |
| 5. 1,4,5 | 10. 1,2,3 | 5. 2,3 | 10. 4,5 |

مطلب دوم قضیه‌ای است از تجربهٔ گذشته‌مان در جبر.

قضیهٔ ۱ . ۱ . (قضیه دو جمله‌ای) اگر x و y متغیر و n عددی صحیح و مثبت باشد در این صورت:

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^0y^n+\binom{n}{1}x^1y^{n-1}+\binom{n}{2}x^2y^{n-2}$$

$$+\dots+\binom{n}{n-1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{n}x^ny^0=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$$

پیش از بررسی اثبات عمومی قضیه، به‌امتحان حالتی خاص می‌پردازیم. اگر $n=4$ ، ضریب $x^2y^2$ در حاصل‌ضرب

| $(x+y)$ | $(x+y)$ | $(x+y)$ | $(x+y)$ |
|---|---|---|---|
| عامل چهارم | عامل سوم | عامل دوم | عامل اول |

برابر باتعداد طرحی است که در آنها می‌توانیم دو x را (با به جاگذاشتن دو y) از چهار x ی، که در هر عامل یکی از آنها موجود است، انتخاب کنیم. (گرچه x ها در ظاهر یکسان‌اند، آنها را به‌عنوان x واقع در عامل اوّل، x واقع در عامل دوم، ... ، و x واقع در عامل چهارم متمایز می‌کنیم.) به‌عنوان مثال، در میان امکانات موجود، می‌توانیم (۱) x را از دو عامل اول و y را از دو عامل دوم؛ یا (۲) x را از عوامل اوّل و سوم و y را از عوامل دوم و چهارم اختیار کنیم. جدول ۱ . ۴ شش انتخاب ممکن را اختصار کرده‌است.

■ جدول ۱ . ۴

| عاملهای انتخاب شده برای y | | عاملهای انتخاب شده برای x | |
|---|---|---|---|
| (1) | 3,4 | (1) | 1,2 |
| (2) | 2,4 | (2) | 1,3 |
| (3) | 2,3 | (3) | 1,4 |
| (4) | 1,4 | (4) | 2,3 |
| (5) | 1,3 | (5) | 2,4 |
| (6) | 1,2 | (6) | 3,4 |

در نتیجه ضریب $x^۲y^۲$ در $(x + y)^۲$ برابر $۶ = \binom{۴}{۲}$، تعداد طرق انتخاب دوشیء متمایز از مجموعه‌ای از چهار شیء متمایز است.

اکنون به اثبات حالت عمومی رو می‌آوریم.

**اثبات.** در حاصل‌ضرب

| $(x + y)$ | $(x + y)$ | $(x + y)$ | $(x + y)$ |
|---|---|---|---|
| عامل اول | عامل دوم | عامل سوم | عامل چهارم |

ضریب $x^ky^{n-k}$، که در آن $۰ \leq k \leq n$، تعداد طرق متفاوتی است که در آنها می‌توان $x$، $k$ (و نتیجتاً $(n-k)$. $y$) از $n$ عامل موجود را انتخاب کرد. (به‌عنوان مثال یک راه، انتخاب $x$ از $k$ عامل اوّل و $y$ از $n-k$ عامل دوم است.) تعداد کل انتخابهایی به اندازهٔ $k$ یی چنین، از کلکسیونی با اندازهٔ $n$، عبارت است از: $C(n, k) = \binom{n}{k}$ و قضیّهٔ دو جمله‌ای از آن به دست می‌آید. □

از مطلب فوق متوجه می‌شویم که

$$(x + y)^n = \sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{n-k} x^k y^{n-k}$$

به‌علت این قضیّه، اغلب به $\binom{n}{k}$ نیز به‌عنوان ضریب دو جمله‌ای «*binomial coefficient*» اشاره شد.

مثال ۱ . ۲۴

a) از قضیّهٔ دو جمله‌ای نتیجه می‌شود که ضریب $x^۵y^۲$ در $(x + y)^۷$ عبارت است از:

$$\binom{۷}{۵} = \binom{۷}{۲} = ۲۱$$

b) ضریب $a^۵b^۲$ در $(۲a - ۳b)^۷$ عبارت است از:

$$\binom{۷}{۵} (۲)^۵ (-۳)^۲$$

این مقدار را از قضیّهٔ دوجمله‌ای با قراردادن $x = ۲a$ و $y = ۳b$ به دست می‌آوریم. □

نتیجه ۱ . ۱

به‌ازای هر عدد صحیح $n > ۰$،

a) $\binom{n}{۰} + \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} + \dots + \binom{n}{n} = ۲^n$

b) $\binom{n}{۰} - \binom{n}{۱} + \binom{n}{۲} - \dots + (-۱)^n \binom{n}{n} = ۰$

اثبات:

قسمت (a) از قضیّهٔ دو جمله‌ای، چون قرار دهیم $x = y = ۱$، به دست می‌آید. زمانی که $x = -۱$ و $y = ۱$، قسمت (b) نتیجه می‌شود. □

سومین و آخرین مطلبمان تعمیم قضیّهٔ دوجمله‌ای و به قضیّهٔ چند جمله‌ای «*multinomial theorem*» موسوم است.

قضیّهٔ ۱ . ۲

به‌ازای اعداد صحیح و مثبت $n$، $t$، ضریب $x_۱^{n_۱} x_۲^{n_۲} x_۳^{n_۳} \dots x_t^{n_t}$

$$(x_۱ + x_۲ + x_۳ + \dots + x_t)^n$$

عبارت است از:

$$\frac{n!}{n_۱!\, n_۲!\, n_۳! \dots n_t!}$$

که هر $n_i$ ی آن، به‌ازای هر $۱ \leq i \leq t$، عددی صحیح با $۰ \leq n_i \leq n$ است، و

$$n_۱ + n_۲ + n_۳ + \dots + n_t = n$$

اثبات:

چون دراثبات قضیّهٔ دوجمله‌ای، ضریب $x_۱^{n_۱} x_۲^{n_۲} x_۳^{n_۳} \dots x_t^{n_t}$ تعداد طرقی است که طبق آنها می‌توان $x_۱$ را از $n_۱$ عامل از $n$ عامل، $x_۲$ را از $n_۲$ عامل از $n - n_۱$ عامل باقی‌مانده، $x_۳$ را از $n_۳$ عامل از $n - n_۱ - n_۲$ عامل اکنون باقی‌مانده، ... ، و $x_t$ را از $n_t$ عامل از آخرین $n - n_۱ - n_۲ - n_۳ - \dots - n_{t-۱} = n_t$ عامل باقی‌مانده، انتخاب کرد. این کار را می‌توان، چون در قسمت (a) ی مثال ۱.۲۱، به

$$\binom{n}{n_۱} \binom{n-n_۱}{n_۲} \binom{n-n_۱-n_۲}{n_۳} \dots \binom{n-n_۱-n_۲-\dots-n_{t-۱}}{n_t}$$

طریق انجام‌داد. تفصیلات نشان دادن این راکه مقدارفوق برابراست با:

$$\frac{n!}{n_۱!\, n_۲!\, n_۳! \dots n_t!}$$

که به‌صورت:

$$\binom{n}{n_۱, n_۲, n_۳, \dots, n_t}$$

نیز نوشته می‌شود و به ضریب چند جمله‌ای multinomial coefficient موسوم است؛ به‌عهدهٔ خواننده وامی‌گذاریم. □