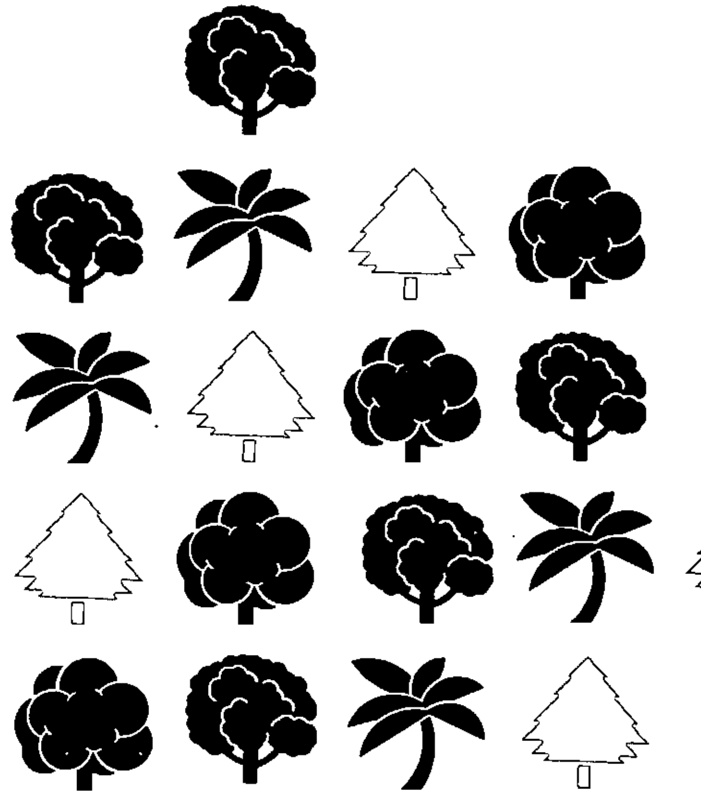
ریاضیات ترکیباتی



● ترجمه: یدا... ایلخانی‌پور
از کتاب مبانی ریاضیات گسسته
● مؤلف: جوزف استرایت و پلیمنی

اگرچه در آغاز ریاضیات ترکیباتی، عاملی برای تفریح در حلّ جدولها و بازیها بود، اما در حال حاضر، یکی از میدانهای فعال تحقیق در ریاضی به حساب می‌آید. به‌علاوه کاربردهای مهمی در زمینه‌هایی نظیر کامپیوتر، تحقیق در عملیات، آمار و علوم اجتماعی و نظری دارد.

با اصل جمع و اصل شمول و عدم شمول آشنایی دارید. اینها قوانین ترکیباتی هستند، که به‌وسیلهٔ آن، تعداد عضوها در اجتماع مجموعه‌ها شمرده می‌شود. ریاضیات ترکیباتی، تا حدّ زیادی به تعیین ترتیب عضوهای یک مجموعه تحت یک شرایط خاص مربوط می‌شود. نوعاً عضوها متعلق به مجموعه‌هایی هستند که شمارا متناهی یا شمارا نامتناهی باشند. و به این ترتیب، ریاضیات ترکیباتی، به محدودهٔ ریاضیات گسسته مربوط می‌شود. زمانی که از یک نوع ترتیب خاص صحبت می‌کنیم، معمولاً چندین سؤال پیش می‌آید:

۱ـ وجود: آیا چنین ترتیبی وجود دارد؟

۲ـ شمارش و طبقه‌بندی: از این نوع خاص ترتیب، چه تعداد وجود دارد؟ آیا به یک طریق خاص می‌توان آنها را طبقه‌بندی کرد؟

۳ـ الگوریتمها: آیا روش معینی برای تهیهٔ این ترتیبها وجود دارد؟

علاوه‌بر سؤالهای فوق، می‌توان این سؤال را نیز مطرح کرد که آیا امکان یک قانون کلی وجود دارد؟ و به‌عبارت دیگر، آیا مسألهٔ قابل توجهی وجود دارد که به سؤالهای فوق مربوط باشد؟

مثالهای زیر، بعضی از نظریه‌های بالا را روشن می‌کند.

مثال: هفت فروشگاه عمومی، مدارک بسیار سرّی خود را در یک گاوصندوق نگه‌داری می‌کنند. آنها می‌خواهند تنها زمانی بتوانند در گاوصندوق را باز کنند، که اکثریت اعضا حاضر باشند. بنابراین، آنها پیشنهاد می‌کنند که در گاوصندوق را با تعدادی از قفلهای متفاوت ببندند و هر فروشگاه کلیدهایی برای قفلهای بخصوصی داشته باشد. با این امکان که دو نفر از آنان ممکن است کلید یک قفل را داشته باشند. حداّقل، چه تعداد قفل باید وجود داشته باشد؟ و چه تعداد کلید برای هر فروشگاه وجود دارد؟

حل: فرض کنید $G_1, G_2, \cdots, G_7$ نشان‌دهندهٔ فروشگاه‌ها باشند. چون فقط با اکثریت افراد، فروشگاه‌ها می‌توانند گاوصندوق را باز کنند. غیرممکن است که با حضور سه نفر، گاوصندوق باز شود. بنابراین، برای هر ۳ فروشگاه فرضی، یک قفل وجود دارد، که هیچ‌کدام کلید آن‌را ندارند. آیا می‌توان دو زیرمجموعهٔ متفاوت از سه فروشگاه که هیچ‌کدام کلید یک نوع قفل را ندارند، در نظر گرفت؟ برای مثال، فرض کنید که G_1, G_2, G_3 و G_2, G_3, G_4 کلید قفل مشابه را نداشته باشند. پس G_1, G_2, G_3, G_4 کلید قفل

را ندارند. به شرط مسأله بازمی‌گردیم که بیشتر افراد می‌توانند گاوصندوق را باز کنند. بنابراین، باید حداقل به تعداد قفلهای متعددی که وجود دارد، راه‌هایی برای انتخاب یک زیرمجموعهٔ سه عضوی از هفت فروشگاه وجود داشته باشد. با توجه به تعداد کلیدهایی که هر فروشگاه باید داشته باشد، توجه خود را روی یکی از فروشگاه‌ها به نام G_7 معطوف می‌کنیم. اگر G_7 را به زیرمجموعهٔ S که شامل ۳ فروشگاه است، اضافه کنیم، مجموعهٔ چهار عضوی قادر خواهد بود که گاوصندوق را باز کند. به هر حال، همان‌طوری که اشاره کردیم، یک قفل وجود دارد که اعضای S کلید آن‌را ندارند. پس G_7 باید کلید این قفل را داشته باشد. همچنین، چون هردو زیرمجموعهٔ مختلف از سه فروشگاه، فاقد یک کلیدازیک نوع قفل هستند، G_7 حداقل باید کلیدهای زیادی داشته باشد. همان‌طوری که برای انتخاب یک زیرمجموعهٔ سه عضوی از مجموعهٔ شش عضوی راه‌های زیادی وجود دارد.

این مسألهٔ کلّی، تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعهٔ n عضوی را مشخص می‌کند، که در همین فصل به آن می‌پردازیم.

مثال: در فصل ۵ جایگشت یک مجموعه به عنوان یک تابع یک به یک و پوشا روی خودش معرفی شد. بخصوص اگر A یک مجموعه متناهی باشد، می‌گوییم $|A|=n$ است. پس می‌بینیم که یک جایگشت A می‌تواند به‌عنوان ترتیبی از عضوهای انتخابی A یا nتایی مرتبی که دارای مختصات عضوهای A هستند، باشد. نشان دادیم که !n تا جایگشت از یک مجموعه با n عضو وجود دارد. برای مثال فرض کنید $A=\{1,2,3\}$ باشد؛ پس:

$$(1,2,3),(1,3,2),(2,3,1),(2,1,3),(3,1,2),(3,2,1)$$

یعنی $3!=6$ جایگشت از اعضای A وجود دارد.

به‌طورکلّی، برای مجموعهٔ متناهی و اختیاری A آیا یک روش مشخصی وجود دارد که به‌وسیلهٔ آن، همهٔ جایگشتهای A به‌دست آید و این سؤال در بخش بعدی مطرح می‌شود.

در فصل (۸) دوباره به جایگشت از نقطه نظر جبری می‌پردازیم.

مثال: به چند روش می‌توان ۳۷ شیرینی را بین ۵ نفر تقسیم کرد؟ اگر بچه‌ها را با c_1,c_2,c_3,c_4,c_5 نشان دهیم فرض کنید x_i تعدادی از شیرینیها باشد که c_i دریافت می‌کند. به ازای $i=1,2,3,4,5$ می‌بینیم که x_i یک عدد صحیح غیرمنفی است و،

$$x_1+x_2+\cdots+x_5=37$$

در حالت کلّی، مسألهٔ تعیین تعداد جوابهای معادلهٔ

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=m$$

می‌باشد؛ درحالی‌که x_i عدد صحیح غیرمنفی است. به ازای $i=1,2,\cdots,n$ و $m>0$ است.

تمرین:

۱ـ تعداد جایگشتهای هر مجموعه را بنویسید.

(a){1} (b){1,2} (c){1,2,3} (d){1,2,3,4}

۲ـ فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت و $A=\{1,2,\cdots,n\}$ باشد. ترتیب «≤» روی جایگشتهای A را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: برای دو جایگشت $\pi_1=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ و $\pi_2=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ از A تعریف می‌کنیم: $\pi_1\le\pi_2$ به‌شرطی که یا $\pi_1=\pi_2$ و یا $a_1<b_1$ یا $a_1=b_1$، $a_2=b_2,\ldots,a_{i-1}=b_{i-1}$ و $a_i<b_i$ برای بعضی مقادیر i که $1<i\le n$، باشد. این ترتیب، به ترتیب الفبایی معروف است.

الف) نشان دهید که رابطهٔ ≤ یک ترتیب کلی از مجموعهٔ جایگشتهای A است.

ب) جایگشتهای مجموعهٔ $\{1,2,3,4\}$ را به‌صورت ترتیب الفبایی بنویسید.

ج) به ازای $n=7$، کدام جایگشت، بلافاصله پس از $(1,2,3,4,6,7,5)$ می‌آید؟ (به ترتیب الفبایی)

د) به‌ازای $n=7$، کدام جایگشت بلافاصله پس از $(1,6,2,7,5,4,3)$ می‌آید؟ (به ترتیب الفبایی)

۳ـ زیرمجموعه های سه عضوی هریک از مجموعه‌های زیر را بنویسید:

a) $\{1,2,3,4,5\}$ b) $\{1,2,3,4,5,6\}$

۴ـ n و A را در تمرین ۲ درنظر بگیرید و فرض کنید k عدد صحیح باشد. درحالی‌که $1\le k\le n$ باشد، ترتیب ≤ را نیز ترتیب الفبایی روی زیرمجموعه های K عضوی A می‌نامیم. و ترتیب آن به‌صورت زیر است. فرض کنید:

$$S_1=\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}\ ,\quad S_2=\{b_1,b_2,\cdots,b_k\}$$

دو زیرمجموعهٔ k عضوی از A باشند و فرض کنید که عضوهای آن طوری نوشته شده باشد. که: $a_1<a_2<\cdots<a_k$ و

$b_1 < b_2 < \cdots < b_k$ باشد. پس $S_1 \le S_2$ است، به شرط آن‌که یا $S_1 = S_2$ باشد یا $a_1 < b_1$ و یا $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \cdots, a_{i-1} = b_{i-1}$ باشد و $a_i < b_i$ به ازای i و $1 < i \le k$.

الف) نشان دهید که $\le$ یک ترتیب کلی از زیرمجموعهٔ k عضوی A است.

ب) فهرست زیرمجموعه های سه عضوی $\{1,2,3,4,5,6\}$ را به ترتیب الفبایی بنویسید.

ج) به ازای $n = 7$ کدام زیرمجموعهٔ چهارعضوی، بلافاصله پس از $\{1,3,4,5\}$ می‌آید؟ (به ترتیب الفبایی)

د) به ازای $n = 7$ کدام زیرمجموعهٔ چهارعضوی، بلافاصله پس از $\{2,4,6,7\}$ نوشته می‌شود؟

۵ـ n و A را درتمرینهای ۲ و ۴ در نظر بگیرید. فرض کنید تعریف $\le$ در تمرین ۴ «ترتیب الفبایی» را برای همهٔ زیرمجموعه‌های A به نام $P(A)$ تعمیم دهیم. نخست می‌دانیم که زیرمجموعهٔ تهی، قبل از زیرمجموعهٔ ناتهی می‌آید. پس به ازای دو زیرمجموعهٔ ناتهی A و B که $A \ne B$. فرض کنید x کوچکترین عضو تفاضل متقارن $(A-B)\cup(B-A)$ باشد. اگر $x \in A$ باشد، پس $A < B$ ودرغیراین‌صورت $B < A$ است. (به‌ازای دو زیرمجموعهٔ A و B و نماد $A \le B$ بدین معناست که یا $A = B$ و یا $A < B$).

الف) نشان دهید که $\le$ یک ترتیب کلی از $P(A)$ است.

ب) فهرست زیرمجموعه های $\{1,2,3,4\}$ را به‌ترتیب الفبایی بنویسید.

ج) به ازای $n = 7$ کدام زیرمجموعه، بلافاصله پس از $\{1,3,4,5\}$ در ترتیب الفبایی می‌آید؟

د) به ازای $n = 7$ کدام زیرمجموعه، بلافاصله پس از $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ می‌آید؟

هـ) به ازای $n = 7$، کدام زیرمجموعه بلافاصله پس از $\{1,7\}$ می‌آید؟

روشهای بنیادی شمارش

با اصول جمع و ضرب آشنا هستید، و هرکدام از آنها را برای مجموعه‌های متناهی A و B به‌صورت زیر داریم:

اصل جمع: اگر A و B از هم جدا باشند، آن‌گاه:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

اصل ضرب:

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

در این‌جا هرکدام را به‌طورکلی ثابت می‌کنیم و دستورالعمل‌های بیشتری را ارائه می‌دهیم.

قضیه اصل جمع

اگر $A_1, A_2, \cdots, A_n$ مجموعه‌های متناهی و دو به دو از هم جدا باشند، آن‌گاه:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$$

اثبات: با استقرا روی n و فرض این‌که S مجموعهٔ اعداد صحیح مثبتی باشدکه گزارهٔ فوق درآن درست باشد. واضح است که $1 \in S$ و همان‌طورکه در بخش ۴ـ۲ نشان دادیم، $2 \in S$ است. فرض کنید به ازای عدد صحیح اختیاری $k \ge 2$، $k \in S$ باشد؛ یعنی اصل جمع به‌ازای k مجموعهٔ متناهی صادق باشد. برای این‌که نشان دهیم $k+1 \in S$ است، فرض کنید $A_1, A_2, \cdots, A_{k+1}$، $k+1$ مجموعهٔ متناهی و از هم جدا باشند، پس $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ و A_{k+1} مجموعه‌های متناهی و از هم جدا هستند و

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \cup A_{k+1}| \\
&= |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) \cup A_{k+1}| \\
&= |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| + |A_{k+1}| \\
&= |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k| + |A_{k+1}|
\end{aligned}$$

دردومین تساوی $2 \in S$ است؛ درحالی‌که در سوّمین تساوی، از فرض استقرا استفاده شده است و به همین ترتیب، $k+1 \in S$ است و خواهیم داشت $S = N$.

مثال: اگر یک جفت تاس را با هم پرتاب کنیم، به چند طریق ممکن است مجموع دو تاس ۷ یا ۱۰ باشد؟

حل. فرض کنید نتیجه پرتاب تاسها جفتهای مرتّب (r,s) باشد. درحالی‌که r نشان‌دهندهٔ روشندن اعداد اوّلین تاس و s دومین تاس باشد، فرض کنید A مجموعهٔ جفت‌های مرتّب مجموع ۷ و

B مجموعهٔ جفتهای مرتب مجموع ۱۰ باشد ؛ پس :

$$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$$

$$B=\{(4,6),(5,5),(6,4)\}$$

بنابراین $A\cup B$ مجموعهٔ جفتهای مرتّب با نتیجه ۷ یا ۱۰ است و جواب مسأله $|A\cup B|$ است. چون A و B مجموعه‌های جدا از هم هستند، داریم :

$$|A\cup B|=|A|+|B|=6+3=9$$

مثال: اگر چهار بار متوالی یک سکّه را بیندازیم، به چند طریق ممکن است یک، دو یا سه بار رو بیاید؟

حل. همان‌طوری که می‌دانیم، از چهار بار پرتاب سکّه، هربار ممکن است یک رو (H) یا یک پشت (T) بیاید. (برای مثال (HTHH) یک امکان است). فرض کنید E_k مجموعه‌ای از آمدن دقیقاً k دو باشد ؛ درحالی که $0\le k\le 4$ است، بنابراین

$$E_1=\{HTTT,THTT,TTHT,TTTH\}$$

$$E_2=\{HHTT,HTHT,HTTH,THHT,THTH,TTHH\}$$

$$E_3=\{HHHT,HHTH,HTHH,THHH\}$$

پس $E_1\cup E_2\cup E_3$ مجموعه‌ای از حالتهای آمدن یک، دو یا سه رو است و جواب مسأله $|E_1\cup E_2\cup E_3|$ است، چون E_1 ، E_2 و E_3 مجموعه‌های از هم جدا هستند، داریم :

$$|E_1\cup E_2\cup E_3|=|E_1|+|E_2|+|E_3|$$
$$=4+6+4$$
$$=14$$

قضیه اصل ضرب

اگر $A_1,A_2,\cdots,A_n$ مجموعه‌های متناهی باشند. آن‌گاه

$$|A_1\times A_2\times\cdots\times A_n|=|A_1|\times|A_2|\times\cdots\times|A_n|$$

اثبات: با استفاده از اصل استقرا روی n و فرض این‌که S مجموعه‌ای از اعداد صحیح مثبت است که نتیجه صادق است، داریم $1,2\in S$. فرض کنید به ازای عضو اختیاری $k\ge 2$ ، $k\in S$ باشد. یعنی قضیه به ازای هر k مجموعهٔ متناهی صادق باشد.

برای این‌که نشان دهیم $k+1\in S$ است، فرض کنید :

$A_1,A_2,\cdots,A_k,A_{k+1}$ مجموعه‌های متناهی باشند. تابع زیر را در نظر بگیرید.

$$f:(A_1\times A_2\times\cdots\times A_k)\times A_{k+1}$$
$$\to A_1\times A_2\times\cdots\times A_k\times A_{k+1}$$

با ضابطهٔ :

$$f(((a_1,a_2,\cdots,a_k),a_{k+1}))=(a_1,a_2,\cdots,a_k,a_{k+1})$$

این تابع یک به یک و پوشاست (تمرین ۱۴ را ببینید) بنابراین، طبق قضیهٔ فرعی ۱۲ـ۵ داریم :

$$|(A_1\times A_2\times\cdots\times A_k)\times A_{k+1}|$$
$$=|A_1\times A_2\times\cdots\times A_k\times A_{k+1}|$$

و چون $2\in S$ و $k\in S$ است، داریم :

$$|(A_1\times A_2\times\cdots\times A_k)\times A_{k+1}|$$
$$=|A_1\times A_2\times\cdots\times A_k|\times|A_{k+1}|$$
$$=|A_1|\times|A_2|\times\cdots\times|A_k|\times|A_{k+1}|$$

بنابراین نتیجه می گیریم که $k+1\in S$ است. و درنتیجه $S=N$ و اثبات کامل است.

برای درک بیشتر، اصل ضرب رابه صورت زیر نیز می توان بیان کرد.

اصل ضرب: فرض کنید که برای مرتّب کردن n موضوع انتخابی :

۱ـ اوّلین موضوع بتواند با m_1 روش انتخاب شود.

۲ـ برای هرکدام از انتخابهای اوّلین موضوع، موضوع دوم بتواند در m_2 روش انتخاب شود.

۳ـ به ازای اوّلین انتخابهای دو موضوع، موضوع سوّم بتواند با m_3 روش انتخاب شود.

⋮ ⋮ ⋮ ⋮

nـ به ازای انتخاب اوّلین $n-1$ موضوع، nامین موضوع در m_n روش انتخاب شود.

آن‌گاه n موضوع می‌تواند با هم به $m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ روش انتخاب شود.

مثال: به چند روش می‌توان ۴ کارت را به‌طور تصادفی از بین ۵۲ کارت انتخاب کرد ؛ به‌شرطی که :

الف) کارت انتخابی به بقیه کارتها برگردد؟

ب) بدون اضافه کردن کارت انتخاب شده به بقیهٔ کارتها؟

حل الف) برای انتخاب اوّلین کارت، ۵۲ انتخاب وجود دارد ؛ چون اوّلین کارت که انتخاب شود، پیش از انتخاب دوم به کارتها اضافه می‌شود. باز هم برای دومین کارت ۵۲ انتخاب وجود دارد و به همین ترتیب، برای کارتهای سوّم و چهارم. بنابراین، با استفاده از اصل ضرب ترتیبی از چهار کارت انتخاب شده، به‌صورت زیر است :

تعداد انتخابها : $52\times 52\times 52\times 52=52^4$

حل ب) برای انتخاب کارت اوّل، ۵۲ انتخاب وجود دارد، و چون اوّلین کارت به بقیهٔ کارتها اضافه نمی‌شود، برای انتخاب دومین کارت ۵۱ انتخاب، سوّمین ۵۰ و چهارمین ۴۹ انتخاب وجود دارد. بنابراین، با استفاده از اصل ضرب داریم :

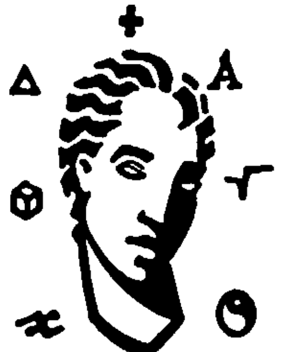
تعداد راه‌ها : $52\times 51\times 50\times 49$

مثال: چه تعداد عدد صحیح n وجود دارد ؛ به‌طوری که $5000<n<10000$ و رقمهای n مجزّا باشند؟

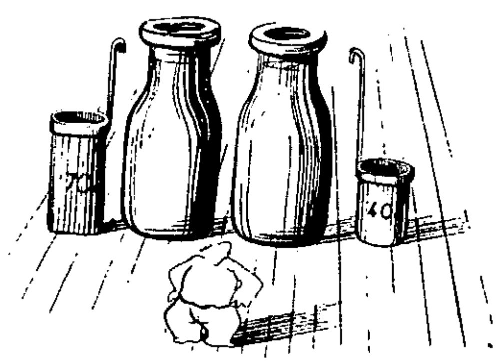
حل. اگر n عدد صحیح باشد، آن‌گاه n شامل ۴ رقم است و رقم هزارگان آن باید یکی از اعداد ۵,۶,۷,۸,۹ باشد. بنابراین، برای رقم هزارم ۵ حالت انتخاب وجود دارد. پس از انتخاب رقم هزارم، برای انتخاب رقم صدگان ۹ راه وجود دارد. (دقّت کنید که عدد صفر، می‌تواند برای این رقم استفاده شود).

به همین طریق، برای انتخاب رقم دهگان، هشت طریق و برای انتخاب رقم یکان، هفت طریق وجود دارد. بنابراین، طبق اصل ضرب $5\times 9\times 8\times 7$ راه برای انتخاب n وجود دارد.

یکی دیگر از راه‌های اصلی و مهم شمارش در ترکیبیات، اصل لانه کبوتر است. درک این اصل بسیار آسان است. در واقع به‌نظر می رسد که اثبات آن برای دانش‌آموز بسیار آسان باشد (اگر این‌طور است، سعی کنید آن‌را ثابت کنید و برای این کار، از برهان «خلف» استفاده کنید). در شمارهٔ آینده به این اصل خواهیم پرداخت.



تفریح اندیشه ۳



دو بطری یک لیتری هر دو پر از شیر هستند. مهرداد دو پیمانهٔ خالی به گنجایش ۴۰ و ۷۰ سانتی‌لیتر در اختیار دارد. او می‌خواهد بدون استفاده کردن از ظرف دیگری در هر یک از دو پیمانه، ۳۰ سانتی‌لیتر شیر داشته باشد، بدون اینکه یک قطره از شیر بیرون بریزد. مهرداد در ۶ مرحله این کار را انجام می‌دهد. چگونه؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸