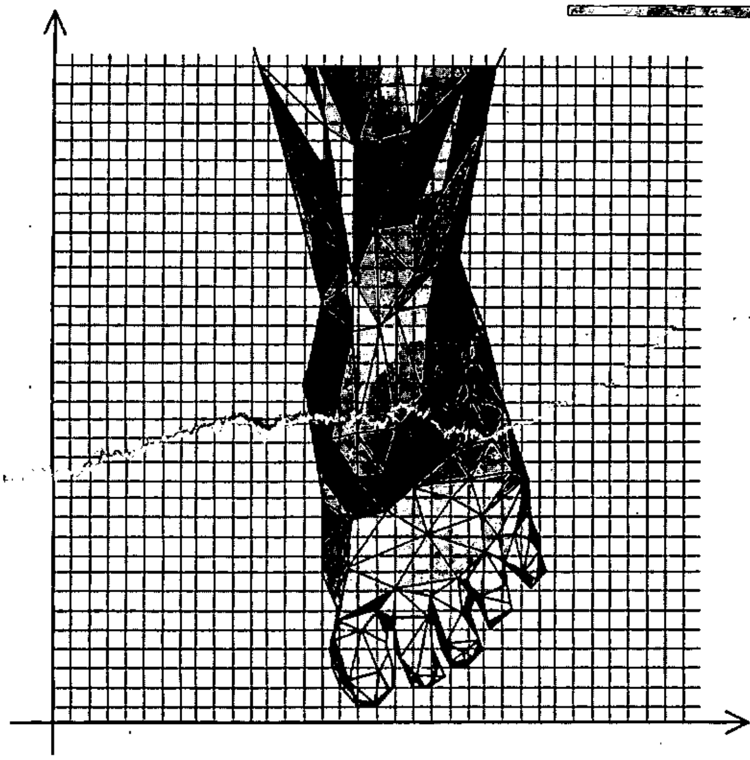
● محمد هاشم رستمی



رویکرد هندسی جبری ـ مختصاتی در آموزش هندسه

اشاره

یکی از مهم‌ترین پیوندها و اتصال‌ها در همه‌ی ریاضیات، اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است.

از استانداردهای موضوعی NCTM

در این شماره نیز اتصال و پیوند را در فضای سه بعدی بررسی می کنیم.

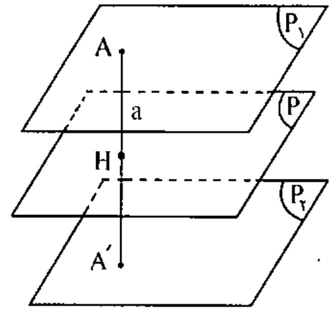
نکته‌ی مهم: ضمن بررسی رویکرد هندسی، رویکرد جبری ـ مختصاتی در آموزش هندسه، برخی از راهبردهای مهم برای حل مسئله‌های هندسه مانند «تحدید یا کوچک‌تر کردن مسئله، مسئله را حل شده فرض کردن، به کارگیری مسئله های خویشاوند برای حل یک مسئله، چگونگی به کارگیری مکان‌های هندسی و استفاده از روش های متفاوت حل یک مسئله» را مطرح می کنیم تا دانش آموزان به دیدگاه‌های جدیدی برای حل مسئله‌های هندسه دست یابند. در ضمن لازم است گفته شود، مسئله هایی را که با دو رویکرد هندسی و رویکرد جبری ـ مختصاتی حل می کنیم، کلیدی هستند و از کتاب های درسی هندسه‌ی (۱) و هندسه‌ی (۲) انتخاب شده‌اند تا دانش‌آموزان بتوانند مسأله‌های دیگر این کتاب‌ها، هم‌چنین مسأله‌های دیگر از کتاب های هندسه را با استفاده از این دو رویکرد، به راحتی حل کنند.

مسئله‌ی ۱۲. ثابت کنید برای هر عدد $a > 0$، مکان هندسی نقطه‌هایی از فضا که از یک صفحه مانند P، به فاصله‌ی a قرار دارد، دو صفحه‌ی موازی P است که در دو طرف این صفحه قرار دارند و فاصله‌ی هر کدام با P برابر a است.

حل:

الف) روش هندسی

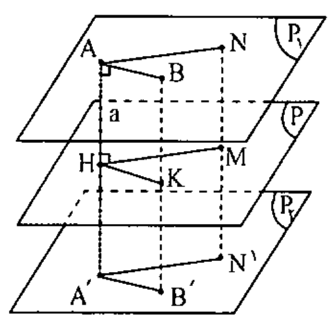
صفحه‌ی P را در نظر می‌گیریم. از نقطه‌ای دل‌خواه مانند H واقع بر P، خط L را عمود بر صفحه‌ی P رسم می‌کنیم.



روی این خط دو پاره خط $HA = HA' = a$ را جدا می‌کنیم. از A صفحه‌ی P_1 و از A' صفحه‌ی P_2 را موازی صفحه‌ی P رسم می‌کنیم. می‌دانیم که از هر نقطه‌ی داده شده مانند A یا A'، تنها یک صفحه به موازات صفحه‌ی مفروض می‌توان رسم کرد. پس دو صفحه‌ی P_1 و P_2 منحصر به فرد هستند.

برای این‌که ثابت کنیم صفحه‌های P_1 و P_2 مکان هندسی مورد نظر هستند، باید ثابت کنیم که:

الف) هر نقطه واقع بر یکی از این دو صفحه، از صفحه‌ی P به فاصله‌ی a قرار دارد.



ب) هر نقطه‌ای که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی a قرار دارد، روی صفحه‌ی P_1 یا روی صفحه‌ی P_2 واقع است.

برای اثبات، یکی از این دو صفحه، مثلاً صفحه‌ی P_1 را در نظر می‌گیریم. روی این صفحه نقطه‌ی دل‌خواه B را اختیار می‌کنیم و از این نقطه، عمود BK را بر صفحه‌ی P فرود می‌آوریم. فصل مشترک صفحه‌ی AHKB با دو صفحه‌ی موازی P و P_1، خط‌های AB و HK هستند که با هم موازی‌اند. یعنی چهار ضلعی AHKB متوازی‌الاضلاع است، اما به دلیل این‌که $\hat{H} = \hat{K} = ۹۰^\circ$ است، این چهار ضلعی مستطیل است. یعنی BK=AH=a

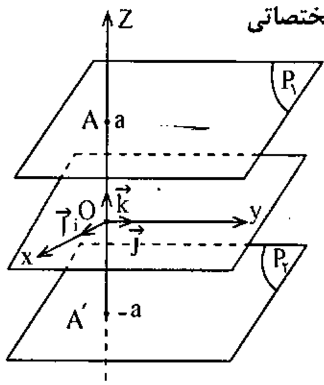
برای اثبات این مطلب، از این ویژگی نیز می‌توان استفاده کرد که پاره‌خط‌های موازی بین دو صفحه‌ی موازی، با هم برابرند. در این مسئله AH =BK است، اما به دلیل عمود بودن BK بر P، پاره‌خط BK فاصله‌ی نقطه‌ی دل‌خواه B متعلق به صفحه‌ی P_1 از صفحه‌ی P است.

پس حکم الف همواره برقرار است.

برای اثبات قسمت ب، نقطه‌ی دل‌خواهی مانند M را روی صفحه‌ی P اختیار می‌کنیم. از این نقطه، خطی مانند D عمود بر P رسم می‌کنیم. روی این خط و در طرف صفحه‌ی P_1، پاره خط MN =a را جدا می‌کنیم. از N به A وصل می‌کنیم.

چهار ضلعی ANMH به دلیل موازی بودن دو ضلع AH و MN که دو خط عمود بر یک صفحه‌اند و به دلیل مساوی بودن (زیرا AH=MN=a) متوازی‌الاضلاع و در واقع مستطیل است. پس AN موازی HM است، اما HM در صفحه‌ی P و $A \in P_1$ واقع است. پس خط AN که از A موازی HM رسم شده است، به تمامی در صفحه‌ی P_1 قرار می‌گیرد (بنا به مطالب کتاب درسی). در نتیجه، N روی صفحه‌ی P_1 قرار دارد. پس حکم ب مسئله نیز برقرار است. بنابراین، صفحه‌ی P_1 یک مکان هندسی نقطه‌هایی است که از P به فاصله‌ی a قرار دارند. هم‌چنین ویژگی برای صفحه‌ی P_2 نیز برقرار است. پس حکم مسئله درست است.

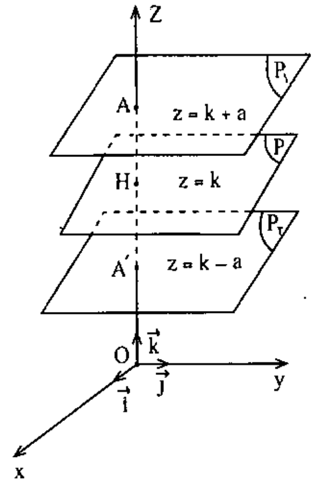
ب) حل با روش جبری ـ مختصاتی



دستگاه مختصات قائم o - xyz در فضا را چنان اختیار می‌کنیم که P، صفحه‌ی xoy باشد. در این صورت، معادله‌ی صفحه‌ی P به صورت $z = ۰$ است. معادله‌ی صفحه‌هایی که موازی صفحه‌ی P و به فاصله‌ی $a > ۰$ از این صفحه قرار دارند، به صورت $P_1:\ z = a$ و $P_2:\ z = -a$ است. بدیهی است، هر نقطه‌ی واقع در یکی از این دو صفحه، به فاصله‌ی a از صفحه‌ی P قرار دارد و هر نقطه‌ای که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی a واقع است، در یکی از صفحه‌های P_1 یا P_2 قرار دارد.

نکته ۱. معادله‌ی هر خم در هر دستگاه مختصات، رابطه‌ای است که بین مختصات هر نقطه از آن خم در آن دستگاه مختصات برقرار است. به قسمی که مختصات هر نقطه از آن خم، در آن معادله صدق کند و هر نقطه‌ای که مختصاتش در آن معادله صدق کند، روی آن خم قرار داشته باشد.

نکته ۲. اگر دستگاه مختصات قائم در فضا را چنان اختیار کنیم که صفحه‌ی P با یکی از صفحه‌های مختصات، مثلاً با صفحه‌ی xoy موازی باشد، معادله‌ای به صورت z=k پیدا خواهد کرد. در این صورت، صفحه‌های P_1 و P_2 به معادله‌های z=k+a و z=k-a خواهند بود.



نکته۳. اگر دستگاه مختصات قائم O-xyz در فضا را چنان اختیار کنیم که صفحه‌ی P با هیچ یک از صفحه‌های مختصات موازی نباشد، صفحه‌ی P به معادله‌ی $P:\ a_1'x + b_1'y + c_1'z + d_1 = 0$ خواهد بود. در این صورت، اگر M=(x,y,z) یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی معلوم a قرار دارد، خواهیم داشت:

$$a = \frac{|a_1x + b_1y + c_1z + d_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}$$

$$\Rightarrow |a_1x + b_1y + c_1z + d_1| = a\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}$$

$$P_1:\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 - a\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = 0 \quad (1)$$

$$P_2:\ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 + a\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} = 0 \quad (2)$$

به‌طوری که دیده می‌شود، P_1 و P_2 دو صفحه‌اند که با صفحه‌ی P موازی‌اند، زیرا معادله‌های (۱) و (۲)، دو معادله‌ی درجه‌ی اول نسبت به x، y و z هستند و بردار قائم این صفحه‌ها نیز یکی است. $\vec{N}_P = \vec{N}_{P_1} = \vec{N}_{P_2} = (a_1, b_1, c_1)$. پس حکم مسئله درست است.

اینک به چند مثال توجه کنید:

مثال۱. معادله‌ی مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که از صفحه‌ی $P:\ z = 0$ به فاصله‌ی ۴ قرار دارد.

حل: صفحه‌ی P منطبق بر صفحه‌ی xoy است. پس صفحه‌های جواب مسئله $P_1: z = 4$ و $P_2: z = -4$ است. با استفاده از دستور کلی فاصله‌ی نقطه از صفحه نیز می‌توان معادله‌ی صفحه‌های P_1 و P_2 را به دست آورد. زیرا اگر M=(x,y,z) یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۴ قرار دارد، خواهیم داشت:

$$4 = \frac{|z|}{\sqrt{0+0+1}} \Rightarrow 4 = \frac{|z|}{1} \Rightarrow |z| = 4 \Rightarrow$$

$$P_1:\ z = 4\ ,\ \ P_2:\ z = -4$$

مثال۲. ثابت کنید مکان هندسی نقطه‌ای که از صفحه‌ی $P:\ 2x + y - 2z + 3 = 0$ به فاصله‌ی ۷ قرار دارد، دو صفحه‌ی موازی P در دو طرف آن و هر یک به فاصله‌ی ۷ از صفحه‌ی P است.

حل: فرض می‌کنیم M=(x,y,z) یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر، یعنی نقطه‌ای باشد که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۷ واقع است. در این صورت داریم:

$$7 = \frac{|2x + y - 2z + 3|}{\sqrt{4+1+4} = 3} \Rightarrow |2x + y - 2z + 3| = 21$$

$$\Rightarrow P_1:\ 2x + y - 2z + 3 = 21 \Rightarrow P_1:\ 2x + y - 2z - 18 = 0$$

$$P_2:\ 2x + y - 2z + 3 = -21 \Rightarrow P_2:\ 2x + y - 2z + 24 = 0$$

به‌طوری که دیده می‌شود P_1 و P_2 دو صفحه‌اند که با صفحه‌ی P موازی‌اند، زیرا بردار نرمال آن‌ها $\vec{V} = (2, 1, -2)$ است. به سادگی می‌توان ثابت کرد که این دو صفحه، در دو طرف صفحه‌ی P واقع‌اند، زیرا اگر معادله‌ی صفحه‌ی P را به صورت $p(x, y) = 2x + y - 2z + 3 = 0$ بگیریم، برای دو نقطه‌ی $M_1 \in P_1$ و $M_2 \in P_2$ باید $P(M_1)$ و $P(M_2)$ مختلف‌العلامت باشند. بررسی می‌کنیم:

$$M_1 = (0, 0, -9) \in P_1$$

$$\Rightarrow P(M_1) = P(0, 0, -9) = 0 + 0 + 18 + 3 = 21 > 0$$

$$M_2 = (0, 0, 12) \in P_2$$

$$\Rightarrow P(M_2) = P(0, 0, 12) = 0 + 0 + -24 + 3 = -21 < 0$$

پس، دو صفحه‌ی P_1 و P_2 در دو طرف صفحه‌ی P قرار دارند.

مثال۳. نقطه‌ای روی خط $\Delta: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}$ بیابید که از صفحه‌ی P به معادله‌ی $P(x, y) = x + 2y + 2z - 5 = 0$ به فاصله‌ی ۵ باشد.

حل: می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۵ قرار دارد، دو صفحه موازی P به فاصله‌ی ۵ از آن است (بنابر مسئله‌ی ۱۲). بنابراین، معادله‌ی این دو صفحه را به دست می‌آوریم و نقطه‌های برخورد خط Δ با این دو

صفحه را که دو نقطه‌ی جواب مسئله (در صورت وجود جواب) هستند، به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$P:\ x+۲y+۲z-۵=۰\ ,\quad M=(x,y,z)\in \text{مکان هندسی مورد نظر}$$

$$\Rightarrow ۵=\frac{|x+۲y+۲z-۵|}{\sqrt{۱+۴+۴}}=|x+۲y+۲z-۵|=۱۵$$

$$\Rightarrow P_۱:\ x+۲y+۲z-۵=۱۵\Rightarrow P_۱:\ x+۲y+۲z-۲۰=۰$$
$$P_۲:\ x+۲y+۲z-۵=-۱۵\Rightarrow P_۲:\ x+۲y+۲z+۱۰=۰$$

$$\begin{matrix}\Delta:\\ P_۱:\end{matrix}\begin{cases}\dfrac{x}{۲}=\dfrac{y}{-۱}=\dfrac{z+۲}{۳}=t\\ x+۲y+۲z-۲۰=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=۲t\ ,\ y=-t\ ,\ z=۳t-۲$$
$$\Rightarrow ۲t-۲t+۶t-۴-۲۰=۰$$
$$\Rightarrow t=۴\Rightarrow M_۱=(۸,-۴,۱۰)$$

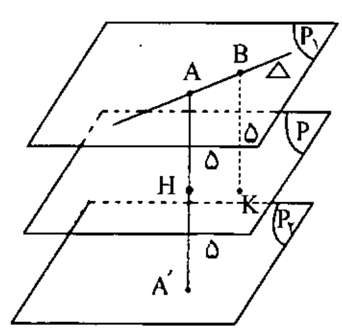
$$\begin{matrix}\Delta:\\ P_۲:\end{matrix}\begin{cases}\dfrac{x}{۲}=\dfrac{y}{-۱}=\dfrac{z+۲}{۳}=t\\ x+۲y+۲z+۱۰=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow x=۲t\ ,\ y=-t\ ,\ z=۳t-۲$$
$$\Rightarrow ۲t-۲t+۶t-۴+۱۰=۰$$
$$\Rightarrow t=-۱\Rightarrow M_۲=(-۲,۱,-۵)$$

نکته‌ی مهم: برای بحث در وجود جواب برای مسئله، باید به این نکته توجه کنیم که خط Δ نسبت به صفحه‌های $P_۱$ و $P_۲$ چه وضعی دارد؟ یکی از سه حالت زیر می‌تواند پیش آید:

الف) خط Δ غیرموازی با صفحه‌های $P_۱$ و $P_۲$ باشد. در این صورت، Δ هر یک از صفحه‌های $P_۱$ و $P_۲$ را در یک نقطه قطع می‌کند. بنابراین، ۲ نقطه‌ی جواب مسئله وجود دارد.

ب) خط Δ موازی صفحه‌های $P_۱$ و $P_۲$ باشد و روی هیچ یک از این دو صفحه قرار نداشته باشد. در



این صورت، مسئله جواب ندارد. یعنی هیچ نقطه‌ای روی Δ نمی‌توان یافت که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۵ (عدد داده شده) باشد.

پ) خط Δ روی یکی از صفحه‌های $P_۱$ یا $P_۲$ قرار گیرد. در این صورت، مسئله بی‌شمار جواب دارد. زیرا در این حالت هر نقطه‌ای واقع بر خط Δ، از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۵ واقع است. زیرا این نقطه روی صفحه‌ی $P_۱$ یا صفحه‌ی $P_۲$ است.

شما می‌توانید مسئله‌هایی با این ویژگی برای حالت‌های ب و پ طرح و حل کنید.

مثال۴. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه‌ی $\Gamma:۲x-y-۲z+۱=۰$ را تعیین کنید که از صفحه‌ی $P:\ ۷x+۲۴y-۲۵=۰$ به فاصله‌ی ۴ قرار دارد.

حل: فصل مشترک صفحه‌ی (Γ) با صفحه‌های $P_۱$ و $P_۲$ که مکان هندسی نقطه‌هایی هستند که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۴ قرار دارند، جواب مسئله است. به بیان دیگر، مکان هندسی نقطه‌هایی که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۴ واقع‌اند، دو صفحه‌ی $P_۱$ و $P_۲$ موازی صفحه‌ی P و در دو طرف آن و به فاصله‌ی ۴ از آن است (بنا به مسئله ۱۲). پس معادله‌ی این دو صفحه را می‌نویسیم و فصل مشترک هر یک از این دو صفحه با صفحه‌ی (Γ) را به‌دست می‌آوریم (در صورت وجود) داریم:

$$P:\ ۷x+۲۴y-۲۵=۰\quad M=(x,y,z)\in \text{مکان هندسی داده شده}$$

$$\Rightarrow ۴=\frac{|۷x+۲۴y-۲۵|}{\sqrt{۴۹+۵۷۶}}\Rightarrow |۷x+۲۴y-۲۵|=۱۰۰$$

$$P:\ ۷x+۲۴y-۱۲۵=۰$$

$$P_۲:\ ۷x+۲۴y+۷۵=۰$$

$$\begin{matrix}P_۱:\\ \Gamma:\end{matrix}\begin{cases}۷x+۲۴y-۱۲۵=۰\\ ۲x-۲y-z+۱=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۷x+۲۴y-۱۲۵=۰\\ ۲۴x-۲۴y-۱۲z+۱۲=۰\end{cases}$$

$$\Rightarrow ۳۱x-۱۲z-۱۱۳=۰\Rightarrow x=\frac{z+\frac{۱۱۳}{۱۲}}{\frac{۳۱}{۱۲}}\quad (۱)$$

$$۷x+۲۴y-۱۲۵=۰\Rightarrow x=\frac{y-\frac{۱۲۵}{۲۴}}{-\frac{۷}{۲۴}}\quad (۲)$$

$$(1),(2) \Rightarrow L_1:\ x=\frac{y-\frac{125}{24}}{-\frac{7}{24}}=\frac{z+\frac{113}{12}}{\frac{31}{12}}$$

یا: $$\frac{x}{24}=\frac{y-\frac{125}{24}}{-7}=\frac{z+\frac{113}{12}}{62}$$

$$\begin{aligned} P_2&: \begin{cases} 7x+24y+75=0 \\ 2x-2y-z+1=0 \end{cases} \\ \Gamma&: \end{aligned}$$

$$(P_2)+12(\Gamma)=0 \Rightarrow 31x-12z+87=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{z-\frac{29}{4}}{\frac{31}{12}} \quad \text{و} \quad x=\frac{y+\frac{25}{8}}{\frac{7}{-24}}$$

$$\Rightarrow L_2:\ x=\frac{y+\frac{25}{8}}{-\frac{7}{24}}=\frac{z-\frac{29}{4}}{\frac{31}{12}}$$

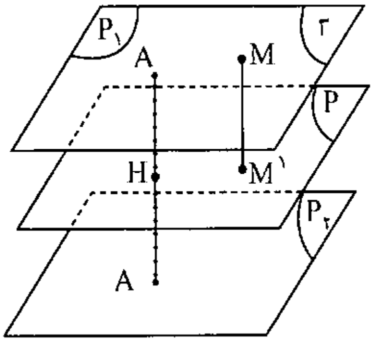
یا: $$\Rightarrow L_2:\ \frac{x}{24}=\frac{y+\frac{25}{8}}{-7}=\frac{z-\frac{29}{4}}{62}$$

به‌طوری که دیده می‌شود، دو خط L_1 و L_2 جواب مسئله‌اند.

بحث وجود جواب برای مسئله، همانند مثال قبلی است؛ با این تفاوت که اگر در این مثال، وضع صفحه‌های P_1 و P_2 با صفحه‌ی (Γ) را بررسی کنیم، سه حالت پیش می‌آید:

الف) اگر صفحه‌های P_1 و P_2 با صفحه‌های Γ موازی نباشند (همانند مثال حل شده)، دو خط راست مانند L_1 و L_2 جواب مسئله‌اند؛ زیرا صفحه‌ی Γ با صفحه‌ی P_1 در فصل مشترک L_1 و با صفحه‌ی P_2 در فصل مشترک L_2 متقاطع است.

ب) اگر صفحه‌ی (Γ) با صفحه‌های P_1 و P_2 موازی باشد (هیچ نقطه‌ی مشترکی با این دو صفحه نداشته باشد)، مسئله جواب ندارد. یعنی هیچ نقطه‌ای روی صفحه‌ی Γ نمی‌توان یافت که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۴ باشد.



پ) اگر صفحه‌ی Γ بر یکی از صفحه‌های P_1 یا P_2 منطبق باشد، مسئله بی‌شمار جواب دارد، زیرا در این حالت، هر خط از صفحه‌ی Γ چون روی صفحه‌ی P_1 یا روی صفحه‌ی P_2 واقع است، از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۴ قرار دارد.

نکته‌ی مهم: همان‌طور که می‌بینید، مسئله‌ی ۱۲ به عنوان مسئله‌ای کلیدی، برای حل مسئله‌های زیادی کاربرد دارد. یک نمونه‌ی دیگر از کاربرد این مسئله را در زیر می‌آوریم. شما خودتان مسئله‌های دیگری طرح کنید که برای حل آن‌ها از مسئله‌ی ۱۲ استفاده شود.

مثال۵. دو نقطه‌ی $A=(1,-1,2)$ و $B=(0,1,1)$ و صفحه‌ی P به معادله‌ی زیر داده شده‌اند. مجموعه‌ی نقطه‌هایی از فضا را بیابید که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی ۶ و از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله باشند.

$$P: x+y-3z+5=0$$

حل: صفحه‌ی عمود منصف پاره‌خط AB را Q می‌نامیم و معادله‌ی آن را می‌نویسیم، زیرا مکان هندسی نقطه‌ای از فضا که از دو نقطه‌ی ثابت A و B به یک فاصله است، صفحه‌ی عمود منصف پاره‌خط AB است. سپس معادله‌ی مکان هندسی نقطه‌هایی از فضا را که از صفحه‌ی P به فاصله‌ی معلوم ۶ هستند، به دست می‌آوریم (بنابر مسئله‌ی ۱۲). می‌دانیم که این مکان هندسی، دو صفحه‌ی P_1 و P_2 موازی P و به فاصله‌ی ۶ از صفحه‌ی P است. آن‌گاه فصل مشترک صفحه‌ی Q با صفحه‌های P_1 و P_2 را به‌دست می‌آوریم. محاسبات را خودتان انجام دهید و درباره‌ی وجود جواب برای مسئله نیز بحث کنید.

یک عمل تقسیم جالب

سعی کنید این عمل تقسیم را حل کرده و اعداد واقعی را در محل‌های مربوطه قرار دهید.

از جالب بودن این عمل اینکه هیچ اطلاعی از اعداد مقسوم علیه نداریم و از خارج قسمت فقط یک عدد ۸ را داریم و ازمقسوم هم هیچ عددی معلوم نیست.

با کمی صبر و حوصله حتماً موفق خواهید شد.