اشاره

یکی از مهم‌ترین پیوندها و اتصال‌ها در همه‌ی ریاضیات، اتصال و پیوند بین هندسه و جبر است.

در این شماره نیز (از استانداردهای NCTM) این اتصال و ارتباط را در فضای سه‌بعدی بررسی می‌کنیم.

نکته‌ی مهم: ضمن بررسی رویکرد هندسی- رویکرد جبری در آموزش هندسه، برخی از راهبردهای مهم برای حل مسئله‌های هندسه را مطرح می‌کنیم.

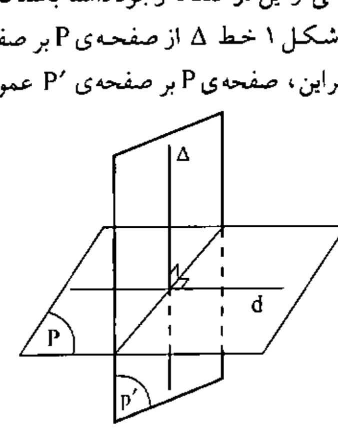
رویکرد هندسی- رویکرد جبری در آموزش هندسه (۷)

● محمدهاشم رستمی

مثال ۸: از هر خط L که بر صفحه‌ی P، عمود نیست، یک و تنها یک صفحه می‌گذرد که بر صفحه‌ی P عمود باشد.

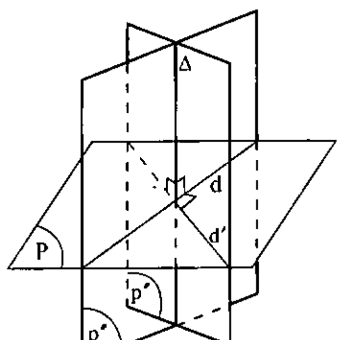
حل: نخست تعریف دو صفحه‌ی عمود بر هم را می‌بینیم:

تعریف دو صفحه‌ی عمود بر هم: دو صفحه را عمود بر هم می‌نامیم، هرگاه خطی در یکی از این دو صفحه وجود داشته باشد که بر دیگری عمود باشد: در شکل ۱ خط Δ از صفحه‌ی P بر صفحه‌ی P' عمود است. بنابراین، صفحه‌ی P بر صفحه‌ی P' عمود است.



شکل ۱

از این تعریف نتیجه می‌شود، که اگر خطی مانند Δ بر صفحه‌ی P عمود باشد، هر صفحه‌ای که بر خط Δ بگذرد، بر صفحه‌ی P عمود است. در شکل ۲ خط Δ بر صفحه‌ی P عمود است و دو صفحه‌ی دل‌خواه P' و P'' بر خط Δ گذشته‌اند. پس این دو صفحه بر صفحه‌ی P عمودند.



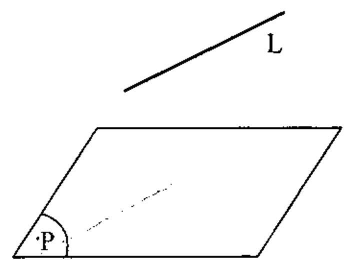
شکل ۲

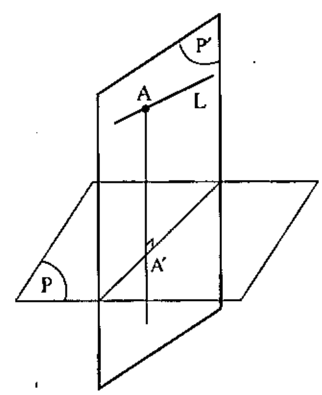
اینک مسئله را با دو رویکرد هندسی و مختصاتی- جبری حل می‌کنیم.

الف) رویکرد هندسی

صفحه‌ی P و خط L را که بر صفحه‌ی P عمود نیست در نظر می‌گیریم. نخست ثابت می‌کنیم صفحه‌ای مانند P' وجود دارد که بر خط L می‌گذرد و بر صفحه‌ی P عمود است و سپس ثابت می‌کنیم، صفحه‌ی P' یکتاست.

برای اثبات، از یک نقطه‌ی دل‌خواه مانند A واقع بر خط L، خط AA' را عمود بر صفحه‌ی P رسم می‌کنیم. صفحه‌ای را که بر دو خط متقاطع L و AA' می‌گذرد، صفحه‌ی P' می‌نامیم. این صفحه بر صفحه‌ی P عمود است، زیرا بنا به تعریف، شامل خط AA' است که این خط عمود بر صفحه‌ی P است.

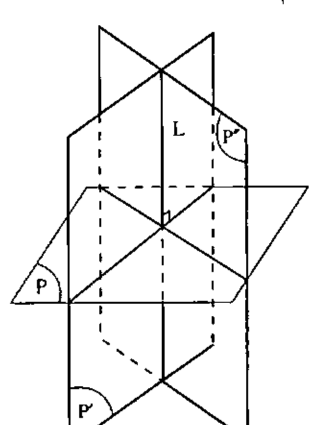




شکل۳

نکته: روش رسم خطی که از یک نقطه بر یک صفحه عمود می‌شود، در کتاب درسی آمده است.

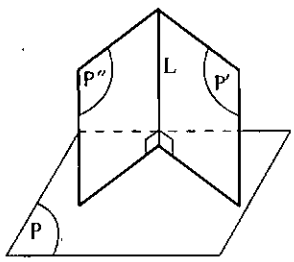
اکنون ثابت می‌کنیم که صفحه‌ی P' یکتا (منحصر به فرد) است.



شکل۴

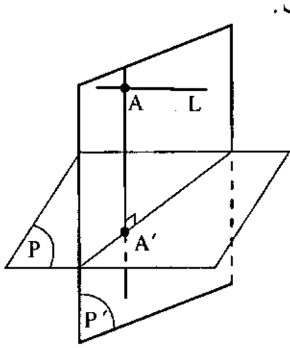
برای اثبات از برهان خلف استفاده می‌کنیم. بدین‌ترتیب که فرض می‌کنیم صفحه‌ی P' یکتا نباشد.

در این صورت، صفحه‌ی دیگری مانند P'' وجود دارد که بر خط L می‌گذرد و بر صفحه‌ی P عمود است. دو صفحه‌ی P' و P'' که هر دو بر صفحه‌ی P عمودند، در خط L مشترک‌اند. به بیان دیگر، خط L فصل مشترک دو صفحه‌ی P' و P'' است که هر دو بر صفحه‌ی P عمودند. بنابراین، خط L بر صفحه‌ی P عمود است، اما این مطلب خلاف فرض مسئله است؛ زیرا بنا به فرض، خط L بر صفحه‌ی P عمود نیست. پس هیچ صفحه‌ی دیگری غیر از صفحه‌ی P' وجود ندارد که بر خط L بگذرد و بر صفحه‌ی P عمود باشد. درنتیجه صفحه‌ی P' یکتاست.



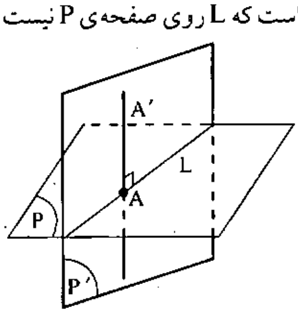
شکل۵

نکته: می‌دانیم که اگر دو صفحه‌ی متقاطع P' و P'' بر یک صفحه مانند P عمود باشند، فصل مشترک آن‌ها (خط L در شکل۵) بر صفحه‌ی P عمود است.



شکل۶

بحث: خط L می‌تواند موازی صفحه‌ی P و یا روی این صفحه باشد. در این دو حالت نیز روش حل مسئله مشابه روش حلی است که بیان شد. تنها در حالتی که خط L روی صفحه‌ی P است، از نقطه‌ی دل‌خواه A واقع بر L، باید عمود AA' را بر صفحه‌ی P اخراج کنیم و آن‌گاه صفحه‌ی P' را بر L و AA' بگذرانیم. ادامه‌ی اثبات همانند حالتی است که L روی صفحه‌ی P نیست.



شکل۷

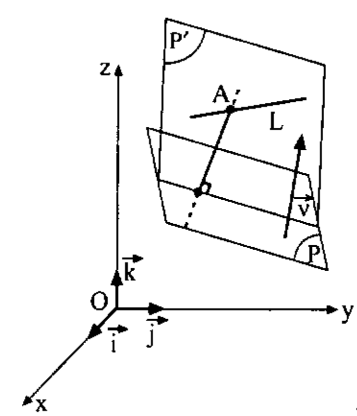
نکته‌ی ۱ : وقتی خط L موازی صفحه‌ی P و یا روی این صفحه باشد، بدیهی است که بر این صفحه عمود نخواهد بود. یعنی شرط عمود نبودن L بر P به خودی‌خود برقرار است(شکل۷).

نکته‌ی ۲ : بنا به قرارداد، وقتی خطی هیچ نقطه‌ی مشترکی با یک صفحه نداشته باشد و یا تمام نقاط آن روی آن صفحه باشند، آن خط را موازی آن صفحه می‌نامند. با توجه به این قرارداد می‌توانیم دو خط ذکر شده در بالا را یک حالت و آن هم حالت موازی بودن خط L با صفحه‌ی P در نظر بگیریم.

ب) رویکرد مختصاتی- جبری

دستگاه مختصات قائم $o-xyz$ را در نظر می‌گیریم. در این دستگاه مختصات، صفحه‌ی P به معادله‌ی $P: ax+by+cz+d=0$ و L به معادله‌ی $L: \frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$ است که با فرض عمود نبودن خط L بر صفحه‌ی P داریم:

$$\frac{a}{p}\neq\frac{b}{q}=\frac{c}{r} \text{ یا } \frac{a}{p}=\frac{b}{q}\neq\frac{c}{r} \text{ یا } \frac{a}{p}\neq\frac{b}{q}\neq\frac{c}{r}$$



شکل۸

با توجه به نکات بالا می‌خواهیم ثابت کنیم، یک و تنها یک صفحه وجود دارد که بر خط $L: \frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r}$ می‌گذرد و بر صفحه‌ی $P: ax+by+cz+d=0$ عمود است.

برای اثبات، یک نقطه‌ی دلخواه از خط L مثلاً نقطه‌ی $A=(x_1,y_1,z_1)$ را اختیار می‌کنیم و معادله‌ی خط AA' را که از نقطه‌ی A بر صفحه‌ی P عمود می‌شود، می‌نویسیم. می‌دانیم که خط AA' با بردار قائم صفحه‌ی P یعنی با بردار $\vec{V}=(a,b,c)$ موازی است. بنابراین یک دسته پارامترهای هادی خط AA' همان (a,b,c) است. پس معادله‌ی خط AA' به‌صورت زیر است:

$$AA': \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$$

اکنون معادله‌ی صفحه‌ی P' را که بر دو خط L و AA' می‌گذرد، می‌نویسیم.

داریم:

$$P': \begin{cases} \frac{x-x_1}{p}=\frac{y-y_1}{q}=\frac{z-z_1}{r} \\ \frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c} \end{cases}$$

اگر بخواهیم معادله‌ی کانونیک صفحه‌ی P را به‌دست آوریم، می‌توانیم بردار قائم آن را که بر دو خط L و AA' عمود است، مشخص سازیم و با داشتن مختصات نقطه‌ای از این صفحه از جمله نقطه‌ی $A=(x_1,y_1,z_1)$ معادله‌ی صفحه‌ی P' را بنویسیم. داریم:

$$\vec{V}_{P'}=\vec{V}_L\times\vec{V}_{AA'}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p & q & r \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}(qc-br)+\vec{j}(ar-pc)+\vec{k}(pb-aq)\Rightarrow\vec{V}_{P'}$$
$$=(qc-br, ar-pe, pb-aq)\Rightarrow P':(qc-br)(x-x_1)$$
$$+(ar-pc)(y-y_1)+(pb-aq)(z-z_1)=0$$

برای یکتایی صفحه‌ی P' می‌توان مشابه روش هندسی، از برهان خلف استفاده کرد. هم‌چنین می‌توانیم با تغییر نقطه‌ی A و اختیار نقطه‌های دیگری روی L مانند B، C و... و رسم عمودهای BB'، CC' و... و نوشتن معادله‌ی صفحه‌های (L,BB')، (L,CC') و... ببینیم که معادله‌ی تمام این صفحه‌ها، همان معادله‌ی صفحه‌ی P' است که قبلاً به‌دست آوردیم.

پرسش: نظر شما درباره‌ی این روش و روش قبلی برای یکتایی صفحه‌ی P' چیست؟ برای ما بنویسید.

نکته‌ی مهم: برای نوشتن صفحه‌ی P' می‌توانیم معادله‌ی دسته صفحه‌ای را که بر خط L می‌گذرد بنویسیم و از بین صفحه‌های این دسته صفحه، صفحه‌ای منحصر به‌فرد اختیار کنیم که بر صفحه‌ی P عمود است.

اینک نمونه‌ای از این مسئله را با روش مختصاتی- جبری حل می‌کنیم.

مسئله: خط $L:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1}$ و صفحه‌ی $P:2x-y+z+1=0$ داده شده‌اند.

اولاً: ثابت کنید که خط L بر صفحه‌ی P عمود نیست.

ثانیاً: معادله‌ی صفحه‌ی P' را بنویسید که بر خط L می‌گذرد و بر صفحه‌ی P عمود است.

ثالثاً: ثابت کنید صفحه‌ی P' یکتاست.

حل: داریم:

اولاً:

$\vec{V}_L=(2,3,-1)$, $\vec{V}_P=(2,-1,1)$

$\frac{2}{3}\neq\frac{3}{-1}\neq\frac{1}{-1}\Rightarrow$ خط L بر صفحه‌ی P عمود نیست

ثانیاً: برای نوشتن معادله‌ی صفحه‌ی P' به یکی از روش‌های زیر عمل می‌کنیم:

روش اول: معادله‌ی خط AA' را که $A\in L$ و $AA'\perp P$ است می‌نویسیم. داریم:

$A=(1,-2,0)\in L$ و $\vec{V}_P=(2,-1,1)$

$\Rightarrow AA':\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{1}$

اکنون معادله‌ی صفحه‌ی گذرنده بر L و AA' را می‌نویسیم. داریم:

$$\begin{cases} L: & \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1}\\ AA': & \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{1}\end{cases}$$

این معادله را می‌توانیم به صورت کانونیک درآوریم:

$$\vec{V}_{P'}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}(3-1)+\vec{j}(-2-2)+\vec{k}(-2-6)$$
$$=2\vec{i}-4\vec{j}-8\vec{k}$$

$\Rightarrow \vec{V}_{P'}=(2,-4,-8)\Rightarrow P':2(x-1)-4(y+2)-8(z-0)=0$

$\Rightarrow P':2x-4y-8z-10=0\Rightarrow P':x-2y-4z-5=0$

روش دوم: معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر L را می‌نویسیم و از بین صفحه‌های این دسته صفحه، معادله‌ی صفحه‌ای را که بر صفحه‌ی P عمود است، می‌نویسیم. این صفحه یکتاست.

$$L:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1}\Rightarrow \begin{matrix}P_1:\\ P_2:\end{matrix}\begin{cases}3x-3=2y+4\\ -x+1=2z\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix}P_1:\\ P_2:\end{matrix}\begin{cases}3x-2y-7=0\\ x+2z-1=0\end{cases}\Rightarrow P_1+\lambda P_2=0$$

$\Rightarrow 3x-2y-7+\lambda(x+2z-1)=0$

$\Rightarrow (3+\lambda)x-2y+2\lambda z-\lambda-7=0$

معادله‌ی دسته صفحه‌ی گذرنده بر L

$\Rightarrow \vec{V}_{\text{دسته صفحه}}=(3+\lambda,-2,2\lambda)$ و $\vec{V}_P=(2,-1,1)$

شرط عمود بودن دو صفحه $\vec{V}_{\text{دسته صفحه}}\cdot\vec{V}_P=0$

$\Rightarrow (3+\lambda)(2)+(-2)(-1)+(2\lambda)(1)=0$

$\Rightarrow 6+2\lambda+2+2\lambda=0\Rightarrow 4\lambda+8=0\Rightarrow \lambda=-2$

$\lambda=-2\xrightarrow{\text{در معادله‌ی دسته صفحه}}(3-2)x-2y-4z+2-7=0$

$\Rightarrow P':x-2y-4z-5=0$

که این معادله، همان معادله‌ی صفحه‌ی P' به‌دست آمده در روش اول است.

ثالثاً: یکتا بودن صفحه‌ی P' در روش دوم ثابت شده است، زیرا از بین صفحه‌های یک دسته صفحه، تنها و تنها یک صفحه وجود دارد که بر صفحه‌ی مفروضی عمود باشد. با وجود این، می‌توانیم یکتا بودن صفحه‌ی P' را با استفاده از برهان خلف مانند روش هندسی، ثابت کنیم.

نکته‌ی مهم: همان‌طور که در مثال‌های قبلی این بحث گفتیم، انتخاب دستگاه مختصات در ساده‌تر شدن راه‌حل جبری اهمیت زیادی دارد. در راه‌حل جبری ارائه شده، برای مثال ۸، دستگاه مختصات $o-xyz$ را به‌صورت کلی اختیار کردیم. اکنون می‌خواهیم ببینیم که با انتخاب این دستگاه مختصات به‌صورتی دیگر، آیا می‌توانیم محاسبه‌ها را ساده‌تر کنیم؟ به نظر شما دستگاه مختصات را چگونه انتخاب کنیم تا راه‌حل جبری ساده‌تر شود؟

پیشنهاد و راه‌حل خودتان را به نشانی مجله‌ی رشد برهان متوسطه ارسال کنید. بهترین راه‌حل، با ذکر نام فرستنده‌ی آن، در شماره‌ی بعدی مجله چاپ خواهد شد.