ریاضیات نظریهٔ ریسمان*

روبرت دایگرَف*
ترجمهٔ ویدا میلانی

۱. مقدمه

نظریهٔ ریسمان [۱] طی سالها توانسته است شاخه‌های مختلفی از ریاضیات را غنی‌تر سازد. موضوعاتی از قبیل هندسهٔ جبری، هندسهٔ دیفرانسیل، توپولوژی، نظریهٔ نمایش، آنالیز نامتناهی‌بعد و بسیاری موضوعات دیگر تحت تأثیر مفاهیم جدیدی همچون تقارن آینه‌ای ([۲] و [۳])، کوهومولوژی کوانتومی ([۴] و [۵]) و نظریهٔ میدان همدیس [۶] رونق و تحرک یافته‌اند. در واقع می‌توان گفت که صرف‌نظر از نقش نهایی این نظریه در فیزیک بنیادی، تأثیر نظریهٔ ریسمان در ریاضیات اثر پایدار و پرارزش آن در علوم خواهد بود. به نظر می‌رسد که نظریهٔ ریسمان پیچیده‌ترین و غنی‌ترین مبحث ریاضی است که تاکنون در فیزیک ظاهر شده است و ارتباط الهام‌بخشی که بین ریاضی و فیزیک پدید آورده است در حال تأثیرگذاری فزاینده در حوزه‌های وسیع و وسیع‌تری از ریاضیات است.

۱.۱ فیزیک و ریاضیات

همیاری فیزیک و ریاضیات قطعاً پدیدهٔ نوی نیست. ریاضیات سوابقی طولانی در تأثیرپذیری از علم فیزیک دارد که به علم نجوم، معماری، و اندازه‌گیری زمین در عهد بابلیان و مصریان باستان برمی‌گردد و در قرنهای ۱۶ و ۱۷ میلادی با پیدایش آنچه امروزه مکانیک کلاسیک نامیده می‌شود به اوج خود رسید. یکی از بانیان برجستهٔ این همکاری، گالیله، تصویر مشهور «کتاب طبیعت» را به ما ارزانی داشته است، که در انتظار رمزگشایی توسط دانشمندان است:

> فلسفه در این کتاب بزرگ، جهان هستی، که دائماً در برابر چشمان ماست، نوشته شده است. اما تا وقتی که زبان این کتاب و علائمی را که با آنها نوشته شده است نیاموزیم قادر به درک آن نخواهیم بود. این کتاب به زبان ریاضی نوشته شده است و علائم آن مثلثها، دایره‌ها و اشکال هندسی دیگر هستند.

این احترام عمیق به ریاضیات بعد از قرن هفدهم هم از میان نرفت. در اوایل قرن بیستم با پیدایش نظریه‌های عظیم نسبیت عام و مکانیک کوانتومی دوباره شاهد وحدت فکری خارق‌العاده بین ریاضیات و فیزیک بوده‌ایم. این امر در تمام مراکز جهان ریاضیات کاملاً مشهود بوده و ریاضیدانان در آن شرکت فعالانه داشته‌اند. به‌خصوص در گوتینگن، مکانی که هیلبرت، مینکوفسکی، وایل، فون نویمان و بسیاری دیگر از ریاضیدانان خدمات مهمی به فیزیک کرده‌اند، وضع به همین منوال بوده است.

فیزیک نظری همواره مجذوب زیبایی معادلاتش بوده است. در اینجا به بیان قولی از فاینمن، که مسلماً اشتهاری به داشتن تبحر در ریاضیات مجرد ندارد، می‌پردازیم:

> برای آنان که ریاضیات را نمی‌شناسند مشکل است که زیبایی را، عمیق‌ترین زیبایی طبیعت را، واقعاً درک کنند.... اگر بخواهید طبیعت را بهتر بشناسید و آن را تحسین کنید، لازم است زبانی را که با آن سخن می‌گوید درک کنید.

ولی پس از آن فاینمن همچنین اظهار داشت: «اگر امروز کل ریاضیات ناپدید شود، فیزیک دقیقاً یک هفته به قهقرا می‌رود.» (پاسخ یک ریاضیدان به این گفته چنین بود: «این همان یک هفته‌ای است که خداوند جهان را خلق کرد.»)

اما علی‌رغم احساسات گرم فاینمن، در دهه‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۶۰ مسیرهای فیزیک بنیادی و ریاضیات شروع به دور شدن از یکدیگر کرد. در تقلا برای تبیین ذرات زیراتمی، فیزیکدانان امید خود را به اینکه ساختار

ریاضی زیبایی برای آن بیابند از دست می‌دادند. از طرف دیگر، ریاضیدانان در این سالها خیلی درونگرا بودند. به دلیل اینکه این دو شاخه پشت به پشت قرار گرفته بودند، دایسن جملات مشهور زیر را در سخنرانی گیبس خود در ۱۹۷۲ بیان داشت:

> من از این واقعیت آگاهم که وحدت بین ریاضی و فیزیک، که در قرون گذشته فوق‌العاده مفید بوده است، اخیراً به جدایی انجامیده است.

اما این اظهارنظر نایخته بوده است، زیرا درست در همان زمان مدل استاندارد داشت متولد می‌شد، و به این ترتیب هندسه در هیأت میدان پیمانه‌ای غیرآبلی، اسپینورها و توپولوژی به خط مقدم برگشت. نکتهٔ شایان توجه این است که تمام عناصر مدل استاندارد، به‌طور کاملاً طبیعی، تعبیری ریاضی برحسب هموستار[1]ها، کلافهای برداری و جبرهای کلیفورد دارند. طولی نکشید که ریاضیدانان و فیزیکدانان شروع به فراهم کردن این مجموعه از تعابیر کردند و به‌واسطهٔ کارهای آتیا، سینگر، توفت[2]، پولیاکوف و بسیاری افراد دیگر، دوران جدیدی از تأثیرات متقابل مفید میان ریاضی و فیزیک آغاز شد.

۲.۱ ریسمانها و ریاضیات

به نظر من منصفانه است که بگوییم پیوند مجدد ریاضی و فیزیک با ظهور نظریهٔ ریسمان به‌عنوان نیروی محرکهٔ مسلط در فیزیک ذرات بنیادی، بیش از پیش تقویت شده است. ابداع و کاربرد مفاهیم جدید ریاضی در «دورهٔ اولیهٔ» نظریهٔ ریسمان هم سابقه داشته و از جمله منجر به نمایشهای کاتس مودی[3] و جبرهای ویرازورو[4]، عملگرهای رأس و ابرتقارن شده است. ولی از زمان شروع کار مهم گرین و شوارتس در ۱۹۸۴ در زمینهٔ حذف بی‌هنجاری، این تأثیرات متقابل روبه‌فزونی نهاد. به‌ویژه با کشف خمینه‌های کالابی‌ـیائو به‌عنوان [حاصل] فشرده‌سازی ریسمانهای مختلف و چشم‌اندازهای نویدبخش پدیده‌شناختی که بر اثر کارهای اولیهٔ ویتن هویدا شد، بسیاری از روشهای هندسهٔ جبری وارد میدان شد.

بیشتر این پیشرفتها بر پایهٔ صورتبندی اختلالی نظریهٔ ریسمان، خواه در صورتبندی لاگرانژی‌اش برحسب نگاشتهایی از رویه‌های ریمانی به توی خمینه‌ها و یا برحسب کوانتش فضاهای حلقه[5] بوده است. ولی این رویکرد اختلالی تنها یک توصیف تقریبی است از آنچه به‌ازای مقادیر کوچک پارامتر کوانتش رخ می‌دهد.

اخیراً پیشرفت زیادی در توصیف بنیادی‌تری از نظریهٔ ریسمان که گاه نظریهٔ M نامیده می‌شود، به‌دست آمده است. چنین می‌نماید که این نظریه، سه نظریهٔ بزرگ فیزیک نظری قرن بیستم و شاخه‌های ریاضی مرتبط با آن را با هم متحد می‌کند:

ـ نسبیت عام، نظریه‌ای که طبق آن گرانش را می‌توان با هندسهٔ ریمانی فضاـزمان توصیف کرد. شاخه‌های ریاضی مربوط به آن عبارت‌اند از توپولوژی، هندسهٔ دیفرانسیل، هندسهٔ جبری و آنالیز سراسری.

ـ نظریهٔ پیمانه‌ای، که توصیف‌کنندهٔ نیروهای بین ذرات بنیادی با به‌کار بردن هموستارهای روی کلافهای برداری است. این موضوع در ریاضیات با

1. connection 2. 't Hooft 3. Kac-Moody 4. Virasoro
5. loop spaces

نظریهٔ K، فضاهای شاخص [اندیس] و به‌طور کلی با جبرهای ناجابه‌جایی، سروکار دارد.

ـ ریسمانها یا به‌طور کلی اشیای گسترده (شامه[1]ها) به‌عنوان تعمیم طبیعی ذرات تک‌نقطه‌ای. این از لحاظ ریاضی به این معنی است که فضاها عمدتاً از طریق فضاهای حلقهٔ کوانتیده‌شان بررسی می‌شوند. این موضوع به‌طور طبیعی با آنالیز نامتناهی‌بعد و نظریهٔ نمایش ارتباط دارد.

در حال حاضر به نظر می‌رسد که این سه نظریهٔ مستقل خیلی به یکدیگر مربوط‌اند و شاید در اساس با هم معادل باشند. فیزیک تا حدی سعی می‌کند فرهنگی از اصطلاحات و تعابیر بین هندسه، نظریهٔ پیمانه‌ای و ریسمانها بنا کند. از دیدگاه ریاضی، اینکه چنین شاخه‌های گوناگونی این‌قدر به‌هم مربوط‌اند بسیار جالب است. این موضوع انسان را به فکر می‌اندازد که ساختار فراگیری که آنها را در بردارد چیست.

باید گفت که در تمام این پیشرفتها دو عنصر دیگر هم وجود دارند که فوق‌العاده مهم‌اند. اولین آنها مکانیک کوانتومی است، یعنی شرح واقعیت فیزیکی بر مبنای جبر عملگرهای روی فضای هیلبرت. در اکثر تلاشها برای درک نظریهٔ ریسمان، مکانیک کوانتومی مبنای کار بوده است و تغییر این وضع بعید به نظر می‌رسد.

عنصر دیگر ابرتقارن است ـــ وحدت ماده و نیروها. به بیان ریاضی، ابرتقارن ارتباط تنگاتنگی با مجتمعهای دُرام[2] و توپولوژی جبری دارد. از لحاظی، بیشتر پیوندهای شگفت‌انگیز در نظریهٔ ریسمان تنها در صورت حضور ابرتقارن امکان‌پذیر است. از آنجا که اساساً با یک مجتمع سروکار داریم، برای ریاضیدانان عجیب نیست که شاخصهای مختلف توپولوژیکی وجود دارند که تحت اختلال، پایدار می‌مانند و می‌توان آنها را در حد مناسبی به‌طور دقیق محاسبه کرد. در واقع وجود چنین کمیتهای توپولوژیک، که نسبت به تغییر کل نظریه حساس نیستند، پیشگوییهای ریاضی دقیق را امکان‌پذیر می‌سازد، هر چند تا کامل شدن نظریهٔ نهایی راه طولانی در پیش است.

۳.۱ ناورداهای کوانتومی

ریاضیات به مطالعهٔ الگوها و ساختارهای مجرد می‌پردازد و یک دیدگاه سلسله‌مراتبی دارد، یعنی اشیا در ابتدا در رسته‌های وسیعی قرار می‌گیرند و سپس ظریف و ظریف‌تر می‌شوند و تمایز بیشتری می‌یابند. مثلاً در توپولوژی، فضاها به‌طور خیلی کلی مطالعه می‌شوند، در حالی‌که در هندسه، شکل واقعی فضاست که اهمیت دارد. رویه‌های (بسته و جهت‌دار) دوبعدی از نظر توپولوژی به‌طور کامل بر اساس گونا[3] یا تعداد دستواره[4]هایشان، $g = 0, 1, 2, \ldots$، طبقه‌بندی می‌شوند. لذا با یک ناوردای توپولوژیکی g سروکار داریم که به هر رویه یک عدد به‌صورت

$$g : \{\text{رویه‌ها}\} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

نسبت می‌دهد.

در حالت کلی، چنین ناورداهایی به‌سختی به‌دست می‌آیند، و فیزیک کوانتومی به‌ویژه نظریهٔ ذرات و ریسمان، منبع الهام مفیدی برای به‌دست آوردن ناورداهای جدید است. البته این موضوع چندان جای تعجب ندارد.

1. brane 2. De Rham complexes 3. genus 4. handle

اجمالاً می‌توان گفت که نظریهٔ کوانتومی به یک شئ هندسی (خمینه، گره، نگاشت) عددی، اغلب یک عدد مختلط، وابسته می‌کند که نشان‌دهندهٔ دامنهٔ احتمالاتی است که قوانین مکانیک کوانتومی به یک فرایند فیزیکی معین که با آن شئ هندسی نمایش داده می‌شود، نسبت می‌دهند. به‌عنوان مثال، یک گروه در $\mathbb{R}^3$ می‌تواند نشان‌دهندهٔ جهان‌خطِ یک ذرهٔ خاص، و خمینه‌ای برای یک فضا-زمان خاص باشد. به محض اینکه اعداد مشخص به اشیای هندسی وابسته می‌شوند، می‌توان عملهای مختلف جبری را روی آنها انجام داد. در نظریهٔ گرهها مفهومی برای مربوط ساختن گرهها به یکدیگر از طریق روابط بازگشتی (روابط اسکین) و یا حتی مشتق‌گیری (ناورداهای واسیلیف) وجود دارد. به این‌ترتیب کوانتش می‌تواند به‌عنوان نگاشت

هندسه $\longrightarrow$ جبر

تلقی شود که هندسه را به قلمرو جبر می‌برد. این امر همان‌گونه که در مثالهای بعدی خواهیم‌دید، چشم‌اندازهای جدیدی در برابر ما می‌گشاید.

۴.۱ نظریهٔ ریسمان به‌عنوان دگردیسی هندسهٔ کلاسیک

در این سخنرانی، به خاطر اهداف آموزشی، نظریهٔ ریسمان در ریاضیات را به‌صورت خانواده‌ای دوپارامتری از دگردیسیهای هندسهٔ ریمانی کلاسیک در نظر می‌گیریم. بگذارید این دو پارامتر را فعلاً به‌صورت نادقیق معرفی کنیم (بعداً راجع به آنها توضیح دقیق‌تری خواهیم داد).

ابتدا، در نظریهٔ ریسمانِ اختلالی، حلقه‌ها را در خمینهٔ فضا-زمان مورد مطالعه قرار می‌دهیم. فرض بر این است که این حلقه‌ها دارای طول ذاتی l_s، یعنی طول ریسمان هستند. به‌دلیل متناهی بودن اندازهٔ ریسمان، هندسهٔ به‌کار برده شده لزوماً هندسهٔ فازی است. حداقل از لحاظ شهودی واضح است که در حد $l_s \to 0$ ریسمان به یک نقطه، حلقه‌ای ثابت، تقلیل می‌یابد و به هندسهٔ کلاسیک می‌رسیم. پارامتر l_s میزان «ریسمانی بودن» مدل را معین می‌کند. خواهیم دید که کمیت $\alpha' = l_s^2$ نقش ثابت پلانک را در جهان‌صفحهٔ ریسمان دارد؛ به عبارت دیگر، تصحیح کوانتومی نظریهٔ میدان دوبعدی را در جهان‌صفحهٔ ریسمان کنترل می‌کند.

دگردیسی دیگر هندسهٔ کلاسیک با این واقعیت سروکار دارد که ریسمانها می‌توانند پاره شوند و به هم متصل شوند و رویهٔ Σ با توپولوژی معمولی را در فضا-زمان برویند. طبق قوانین عمومی مکانیک کوانتومی باید یک عمل جمع روی تمام توپولوژیها انجام دهیم. چنین جمعی روی توپولوژیها را هنگامی می‌توان تحت کنترل داشت که یک پارامتر صوری g_s را به‌عنوان جفت‌شدگی ریسمان معرفی کنیم به‌طوری که رویه‌ای از گونای h وزنی برابر g_s^{2h-2} داشته باشد. توپولوژیهای با گونای بالا را به‌عنوان فرایندهای مجازی که در آنها ریسمانها پاره و به هم متصل می‌شوند ـ یک نوع پدیدهٔ کوانتومی ـ تلقی می‌کنیم. بنابراین، پارامتر g_s تصحیحات کوانتومی را کنترل می‌کند. می‌توان g_s^2 را با ثابت پلانک در فضا-زمان یکسان گرفت. تنها به‌ازای مقادیر کوچک g_s، نظریهٔ ریسمان می‌تواند برحسب فضاهای حلقه و جمع روی رویه‌ها بیان شود.

در واقع، در مورد ذرات می‌دانیم که به‌ازای مقادیر بزرگ g_s، بهتر است مسئله را از دیدگاه موج، یا به‌طور دقیق‌تر میدانهای کوانتومی، بررسی کنیم. در این‌صورت می‌توان انتظار داشت که به‌ازای α' و g_sهای بزرگ، نظریهٔ میدان ریسمان بهترین چارچوب باشد [۷]. این فرضیه تا حدودی درست است، اما به‌طور کلی، تحلیل مستقیم نظریهٔ میدان ریسمان کاری دشوار است. به‌ویژه ظهور شامه‌ها، اشیای گسترده از بعد بالاتر، که در ادامهٔ بحث نقش مهمی خواهند داشت، اغلب کم‌رنگ است.

به‌طور خلاصه، می‌توان دو نوع دگردیسی را از هم تمیز داد: اثرات ریسمانی پارامتربندی شده توسط α' و اثرات کوانتومی پارامتربندی شده توسط g_s. این وضعیت را می‌توان با نمودار زیر نشان داد:

α' بزرگ	نظریهٔ میدان همدیس ریسمانها	نظریهٔ M میدانهای ریسمان، شامه‌ها
$\alpha' \approx 0$	مکانیک کوانتومی ذرات	نظریهٔ میدانهای کوانتومی میدانها
	$g_s \approx 0$	g_s بزرگ

شاید بی‌مناسبت نباشد که بعضی شاخه‌های ریاضی مربوطه و ریاضیدانان پیشرو در آنها را در جدولی مشابه بیاوریم

α' بزرگ	کوهومولوژی کوانتومی (گروموف، ویتن)	هندسهٔ ناجابه‌جایی (کُن)
$\alpha' \approx 0$	ناورداهای ترکیبیاتی گره (واسیلیف، کونتسویچ)	خمینهٔ ۴بعدی، خمینه‌های ۳بعدی، گرهها (دانلدسن، ویتن، جونز)
	$g_s \approx 0$	g_s بزرگ

۲. مکانیک کوانتومی و ذرات

برای زمینه‌سازی، بحث را با مرور مختصر مکانیک کوانتومی ذرات نقطه‌ای به زبان مجردتر ریاضی شروع می‌کنیم.

در مکانیک کلاسیک، ذرات نقطه‌ای روی یک خمینهٔ ریمانی X که به‌عنوان فضا-زمان اقلیدسی در نظر گرفته می‌شود، توصیف می‌شوند. به بیان دقیق‌تر، X از طریق نگاشتهای $x : pt \to X$ از یک نقطهٔ مجرد به توی X بررسی می‌شود. مکانیک کوانتومی به فضای پیکربندی کلاسیک X، فضای هیلبرت $\mathcal{H} = L^2(X)$ از توابع موج مربع‌انتگرال‌پذیر را نظیر می‌کند. می‌خواهیم این فضای هیلبرت را فضای وابسته به یک نقطهٔ $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{pt}$ در نظر بگیریم. برای یک ذرهٔ نقطه‌ای ابرمتقارن، می‌خواهیم متغیرهای جابه‌جایی و پادجابه‌جایی را به همراه یک عملگر پوچ‌توان که این دو را به هم مربوط می‌سازد، داشته باشیم. این ساختار، به شکل مجتمع دُرامِ توپولوژی جبری، در ریاضیات کاملاً شناخته شده است. به بیان دقیق‌تر، مختصات بوزونی x^μ و متغیرهای فرمیونی θ^μ را داریم که در رابطهٔ $\theta^\mu\theta^\nu = -\theta^\nu\theta^\mu$ صدق می‌کنند. ابربار d که بیان‌کنندهٔ ابرتقارن است به‌صورت

$$d(x^\mu) = \theta^\mu, \qquad d(\theta^\mu) = 0$$

عمل می‌کند. از نظر هندسی، متغیرهای فرمیونی به‌عنوان ۱-فرمهای $\theta^\mu = dx^\mu$ در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین، تابع موج ابرمتقارن $\Psi(x, \theta)$

به‌صورت یک برهم‌نهی خطیِ فرمهای دیفرانسیل روی X تعبیر می‌شود:

$$\Psi(x,\theta)=\sum_n \Psi_{\mu_1\cdots\mu_n}\, dx^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\mu_n}$$

لذا، در این حالت فضای هیلبرت توسط فضای فرمهای دیفرانسیل دُرام (مربع‌ـانتگرال‌پذیر) $\mathcal{H}=\Omega^*(X)$ مشخص می‌شود.

از دیدگاه کلاسیک، ذره می‌تواند در لحظهٔ t از یک نقطهٔ x در طول مسیر مشخصی، معمولاً یک مسیر ژئودزیک، به سمت یک نقطهٔ y حرکت کند. از دیدگاه مکانیک کوانتومی، یک عملگر تحول خطی

$$\Phi_t:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$$

وجود دارد که این تحول زمانی را نشان می‌دهد. این عملگر از طریق انتگرال مسیری فاینمن، با نگاشتهایی از بازهٔ به طول t به توی X نظیر می‌شود. به بیان دقیق‌تر، هستهٔ $\Phi_t(x,y)$ عملگر Φ_t را ارائه می‌دهد که دامنهٔ احتمال ذرهٔ واقع در مکان x را که در زمان t به مکان y برسد، نشان می‌دهد و توسط انتگرال مسیری

$$\Phi_t(x,y)=\int_{x(\tau)}\mathcal{D}_x \exp\left[-\int_0^t d\tau|\dot{x}|^2\right]$$

بیان می‌شود، که در آن $\mathcal{D}_x$ اندازهٔ مناسب روی فضای تمام مسیرهای $x(\tau)$ با شرط $x=x(0)$ و $x(\tau)=y$، است. Φ_t یک شئ مشهور ریاضی یعنی هستهٔ انتگرال معادلهٔ گرماست:

$$\frac{d}{dt}\Phi_t=\Delta\Phi_t,\qquad \Phi_0=\delta(x-y).$$

این چنین انتگرالهای مسیری دارای خاصیت طبیعیِ «به‌هم چسبیدن» هستند، به این معنی که اگر تحول ابتدا در یک زمان t_1 و سپس در زمان t_2 صورت گیرد، هم‌ارز است با تحول در زمان t_1+t_2، یعنی نگاشتهای خطی وابسته به آن دارای ویژگی ترکیب هستند:

$$\Phi_{t_1}\circ\Phi_{t_2}=\Phi_{t_1+t_2}. \qquad (۱)$$

این خاصیت وجود رابطهٔ $\Phi_t=e^{-tH}$ را که در آن H عملگر همیلتنی است امکان‌پذیر می‌سازد. برای ذرهٔ واقع در X، عملگر همیلتنی به‌سادگی توسط منهای لاپلاسی $H=-\Delta$ مشخص می‌شود. خاصیت (۱) یک خاصیتِ عمومی نظریه‌های میدان کوانتومی است. این رابطه به دیدگاه تابعگونی زیگل[۹] دربارهٔ نظریهٔ میدان کوانتومی می‌انجامد که آن را تابعگونی بین رسته‌های خمینه‌ها (با بوردیسم‌ها) و فضاهای برداری (با نگاشتهای خطی)، در نظر می‌گیرد.

در حالت ابرمتقارن، همیلتنی به‌صورت

$$H=-\Delta=-(dd^*+d^*d)$$

نوشته می‌شود، که در آن دیفرانسیلهای d و d^* نقش ابربارهای

$$d=\psi^\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu},\qquad d^*=g^{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial\psi^\mu\partial x^\nu}$$

را ایفا می‌کنند. حالات پایه در مکانیک کوانتومی ابرمتقارن در معادلهٔ $H\Psi=0$ صدق می‌کنند و لذا فرمهای همساز

$$d\Psi=0,\qquad d^*\Psi=0$$

هستند و به همین علت در تناظر یک به یک با گروه کوهومولوژی دُرام خمینهٔ فضاـزمان قرار می‌گیرند:

$$\Psi\in \mathrm{Harm}^*(X)\cong H^*(X).$$

در اینجا تذکر دو نکته را لازم می‌دانیم. اول اینکه می‌توانیم یک خمینهٔ یک‌بعدی بسته، یعنی دایره‌ای چون S^1 با طول t را نیز در نظر بگیریم. از آنجا که دایره با یکی کردن دو سر یک بازه حاصل می‌شود می‌توان نوشت

$$Z_{S^1}=\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}\Phi_t$$

که در اینجا تابع افراز [پارش] Z_{S^1} عددی است وابسته به دایرهٔ S^1 که طیف عملگر Δ را کدگذاری می‌کند. همچنین می‌توان تابع افراز ابرمتقارن را با استفاده از عدد فرمیونی F (که به‌صورت درجهٔ فرم دیفرانسیل وابسته تعریف می‌شود) محاسبه کرد. به این ترتیب عدد اویلر

$$\mathrm{Tr}_{\mathcal{H}}(-1)^F\Phi_t=\dim H^{\text{زوج}}(X)-\dim H^{\text{فرد}}(X)=\chi(X)$$

محاسبه می‌شود.

دوم اینکه، به این ترتیب تمام جهان‌خطهای ذرات مجهز به یک متریک، یعنی یک طول مسیر t، می‌شوند. برای حرکت از مکانیک کوانتومی به سمت انتشار یک ذره در نظریهٔ میدان کوانتومی، باید روی این متریک انتگرال گرفت. در مورد یک بازه، به این طریق، انتشاردهندهٔ یک ذرهٔ بدون جرم، یعنی تابع گرین لاپلاسی Δ

$$G=\int_0^\infty dt\, e^{t\Delta}=\frac{1}{\Delta}$$

حاصل می‌شود. در اینجا $G(x,y)$ یک انتگرال هسته در نظر گرفته می‌شود که در معادلهٔ

$$\Delta_x G(x,y)=\delta(x,y)$$

صدق می‌کند و دامنهٔ احتمال حرکت یک ذره را از x به y توصیف می‌کند. پس از اعمال تبدیل فوریه، می‌توان آن را با بیانی بسیار نزدیک‌تر به فیزیک برحسب متغیر تکانهٔ p به‌صورت $G=1/p^2$ نوشت.

۳. ریسمانها و نظریهٔ میدان همدیس

اکنون اولین پارامتر دگردیسی یعنی α' را معرفی می‌کنیم و ذرات نقطه‌ای و مکانیک کوانتومی را به ریسمانها و نظریهٔ میدان همدیس تعمیم می‌دهیم.

۱.۳ مدلهای سیگما

ریسمان را می‌توان یک حلقهٔ پارامتری‌شده در نظرگرفت. پس در این حالت، خمینهٔ X از طریق نگاشتهای $x : S^1 \to X$ و به عبارت دیگر از طریق فضای حلقه‌های آزاد $\mathcal{L}X$ مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

کوانتش، یک فضای هیلبرت را به این فضای حلقه وابسته می‌سازد. به‌طور کلی می‌توان این فضای هیلبرت را به‌صورت $L^2(\mathcal{L}X)$ در نظر گرفت، اما بهتر است آن را به‌عنوان کوانتش یک ضخامت بی‌اندازه کوچک مکان هندسی حلقه‌های ثابت $X \subset \mathcal{L}X$ در نظر بگیریم. این حلقه‌های ثابت نقاط ثابت تحت عمل بدیهی S^1 روی فضای حلقه هستند. کلاف قائم بر X در $\mathcal{L}X$ تحت این عمل S^1 به‌ویژه‌فضاها تجزیه می‌شود و این (برای بخش بزرگی از X) توصیفی از فضای هیلبرت $\mathcal{H}_{S^1}$ وابسته به دایره، به‌عنوان برشهای بهنجارشدنی کلاف فضای فاک[1] نامتناهی روی X است:

$$\mathcal{H}_{S^1} = L^2(X, \mathcal{F}_+ \otimes \mathcal{F}_-)$$

که در آن کلاف فاک به‌صورت

$$\mathcal{F} = \bigotimes_{n \geq 1} S_{q^n}(TX) = \mathbb{C} \oplus qTX \oplus \cdots$$

تعریف می‌شود. در اینجا متغیر صوری q برای مشخص کردن $\mathbb{Z}$-درجه‌بندی $\mathcal{F}$ به‌کار می‌رود و از نمادگذاری استاندارد

$$S_q V = \bigoplus_{N \geq 0} q^N S^N V$$

برای تابع مولد ضربهای متقاون فضای برداری V استفاده می‌شود.

وقتی یک ریسمان در زمان حرکت می‌کند، یک رویهٔ $\sum$ را می‌روبد. برای یک ریسمان آزاد، $\sum$ توپولوژی $S^1 \times I$ را دارد، ولی بدون از دست رفتن کلیت موضوع می‌توان ریسمانهایی را در نظر گرفت که پاره و به هم متصل می‌شوند. در این حالت $\sum$ رویهٔ جهت‌داری با توپولوژی دلخواه است. لذا در صورتبندی لاگرانژی می‌توان نگاشتهای $x : \sum \to X$ را در نظر گرفت. همان‌گونه که در سخنرانیهای دیگر توضیح داده شده است، اگر یک ساختار همدیس و یا ستارهٔ هاج[2] روی $\sum$ (به همراه یک متریک ریمانی g روی X) را در نظر بگیریم:

$$S(x) = \int_\Sigma g_{\mu\nu} dx^\mu \wedge *dx^\nu$$

نقاط بحرانی $S(x)$ نگاشتهای همساز هستند.

درصورتبندی کوانتش لاگرانژی می‌توان روی تمام نگاشتهای $x : \sum \to X$ انتگرال مسیری صوری

$$\Phi_\Sigma = \int_{x:\Sigma \to X} e^{-S/\alpha'}$$

را در نظر گرفت. α' در اینجا نقش ثابت پلانک را روی جهان‌صفحهٔ ریسمان یعنی $\sum$ دارد. α' می‌تواند با مقیاس‌بندی مجدد متریک به‌صورت $g \to \alpha' g$ در حجم خمینهٔ هدف[3] X ادغام شود. لذا حد نیمه کلاسیک $\alpha' \to 0$ معادل است با حد $vol(X) \to \infty$.

1. Fock   2. Hodge star   3. target manifold

۲.۳ توصیف تابعگونی

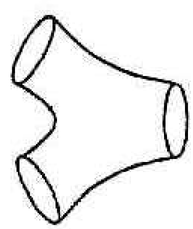
در توصیف تابعگونی نظریهٔ میدان کوانتومی، نگاشتهای Φ_Σ از تعریف مدل سیگما حذف می‌شوند.

نقطهٔ شروع کار در اینجا یک رویهٔ ریمانی مرزدار دلخواه (بسته و جهت‌دار) Σ است. مرز آن مرکب از مجموعه‌ای از دایره‌های جهت‌دار است. می‌توان برحسب اینکه جهت دایره‌ها با جهت Σ سازگار باشد یا نباشد، آنها را رو به درون یا رو به بیرون در نظر گرفت. به رویهٔ Σ با m مرز رو به درون و n مرز رو به بیرون می‌توان یک نگاشت خطی $\Phi_\Sigma : \mathcal{H}_{S^1}^{\otimes m} \to \mathcal{H}_{S^1}^{\otimes n}$ نظیر کرد. این نگاشتهای خطی از هم مستقل نیستند، اما در اصول به هم چسباندن

$$\Phi_{\Sigma_1} \circ \Phi_{\Sigma_2} = \Phi_\Sigma$$

صدق می‌کنند که تعمیم قانون سادهٔ ترکیب (۱) است. Σ از به هم چسباندن Σ_1 و Σ_2 در طول مرزهای، به‌ترتیب، برونسو و درونسوی آنها حاصل می‌شود.

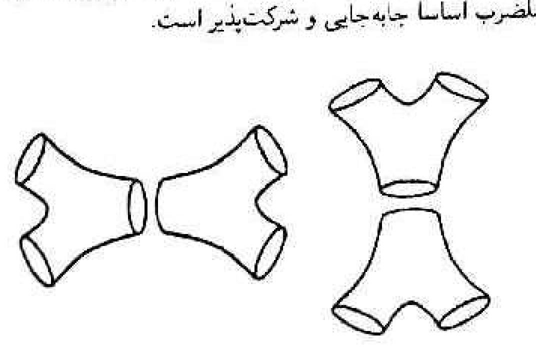
به این ترتیب، تابعگون مدولی [پیمانه‌ای] به‌دست می‌آید. این تابعگون دارای ساختار غنی جبری است. مثلاً کرهٔ با سه سوراخ



به حاصلضرب

$$\Phi : \mathcal{H}_{S^1} \otimes \mathcal{H}_{S^1} \to \mathcal{H}_{S^1}$$

منجر می‌شود. با توجه به این واقعیت که می‌توان کره‌ای چهار سوراخه از چسباندن دو نسخه از کرهٔ سه سوراخه به‌دست آورد، می‌توان نشان داد که این حاصلضرب اساساً جابه‌جایی و شرکت‌پذیر است.



بیان این رابطه برحسب دامنه‌های انتقال، به معادلات دیفرانسیل نابدیهی و سلسله‌مراتب انتگرال‌پذیر منجر می‌شود. برای ملاحظهٔ جزئیات بیشتر به ([۴]، [۸]) رجوع کنید.

۳.۳ هندسهٔ ریسمانی و T-دوگانی

مدلهای سیگمای دوبعدی یک دگردیسی یک پارامتری طبیعی برای هندسهٔ کلاسیک فراهم می‌آورند. پارامتر دگردیسی ثابت پلانک α' است. در حد

• $\alpha' \to \circ$ توجه خود را به حلقه‌های ثابت معطوف می‌کنیم و به مکانیک کوانتومی یا نظریهٔ ذرات نقطه‌ای برمی‌گردیم. برای α' ناصفر حلقه‌های غیرثابت ظاهر می‌شوند.

در حقیقت می‌توان فضای مدولی [مدولهای[۱]] نظریهٔ میدان کوانتومی را به‌صورت زیر به تصویر کشید. این فضا دارای مؤلفه‌هایی است که می‌توانند برحسب فضای هدف X بیان شوند. برای این مدلها، این طبقه‌بندی، متریکهای ریچی‌ـتخت و یک انتخاب از میدان B را پارامتری می‌کند.[۲] این مؤلفه‌ها یک مرز «در بینهایت» دارند که بزرگی حجم خمینه را نشان می‌دهد. می‌توان پارامتر α' را به‌عنوان مختصات عمودی موضعی روی یقهٔ اطراف این مرز در نظر گرفت. لذا، مرز در مکان $\alpha' = \circ$ واقع است که می‌توان آن را حد کلاسیک نظریهٔ میدان کوانتومی دوبعدی در نظر گرفت. با عبور از این مرز، اصلاحات ریسمانی شروع می‌شوند. در میانهٔ فضای مدولی ممکن است پدیده‌های غریبی رخ دهند. به‌طور مثال، گروه خودریختی نظریهٔ میدان کوانتومی ممکن است از دست برود و این منجر به پدید آمدن تکینگیهای اُربیفُلد در نقاط تقارن خواهد شد.

نکتهٔ بسیار جالب توجه این است که فضای مدولی می‌تواند مرز دیگری داشته باشد، یعنی در $\alpha' \to \infty$، که تعبیر نیمه‌کلاسیک دیگری برحسب هندسهٔ کلاسیک دیگری مثلاً $\hat{X}$ است. در اینجا پارامتر کوچک $1/\alpha'$ است. این نقاط مشابه حجم کوچک یا کوانتومی برحسب متغیرهای اصلی روی X هستند و لذا تحلیل آنها بسیار مشکل است، زیرا در این حالت تا آنجا که ممکن است از حد کلاسیک دور هستیم. اما همچنین می‌توانند به‌عنوان حجم بزرگ برحسب مجموعه‌ای از متغیرهای دوگان روی خمینهٔ آینه یا دوگان $\hat{X}$ بیان شوند. در این حالت، بحث T‌ـدوگانی مطرح می‌شود. به این ترتیب دو خمینهٔ X و $\hat{X}$ که هر دو به یک نظریهٔ میدان کوانتومی منجر می‌شوند، به هم مربوط‌اند.

ساده‌ترین مثال از چنین T‌ـدوگانی در فشرده‌سازی چنبره‌ای رخ می‌دهد. اگر $X = T$ یک چنبره باشد، نظریهٔ میدان کوانتومی روی T و روی دوگان آن T^* یکریخت‌اند. ما اکنون با تفصیل بیشتری به این مطلب می‌پردازیم. این نوع T‌ـدوگانیها منجر به کاربرد ریاضی جالب توجهی در تقارن آینه‌ای شده است، که ما مروری بر آن خواهیم داشت.

۴.۳ ذرات و ریسمانهای روی چنبره

یک ذره یا ریسمانی در یک فضا‌ـزمان را که توسط یک چنبرهٔ nبعدی به‌صورت خارج‌قسمت $T = \mathbb{R}^n/L$ داده شده است، در نظر بگیرید. L یک مشبکه با رتبهٔ n است.

حالتهای ذرهٔ نقطه‌ای مکانیک کوانتومی روی چنبره توسط تکانهٔ آنها، $p \in L^*$، به طرز مناسبی برچسب‌گذاری می‌شوند. توابع موج $\Psi(x) = e^{ipx}$ پایه‌ای برای $\mathcal{H} = L^2(T)$ تشکیل می‌دهند که همیلتنی $H = -\Delta = p^2$ را قطری می‌کند. لذا می‌توان فضای هیلبرت را به‌صورت

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{p \in L^*} \mathcal{H}_p$$

تجزیه کرد که قطعه‌های $\mathcal{H}_p$ همگی یک‌بعدی‌اند. یک عمل طبیعی گروه تقارن

$$G = SL(n, \mathbb{Z}) = \mathrm{Aut}\ L$$

روی مشبکهٔ $\Gamma = L$ و فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ قابل تعریف است. (در حالت کلی این تبدیلات متریک را ناوردا نگاه نمی‌دارند، ولی در عوض با پساوری[۱] متریک تخت دیگری روی T به‌دست می‌دهند.)

در حالتی که یک ریسمان روی چنبرهٔ T حرکت می‌کند، حالتها توسط یک عدد کوانتومی دیگر، یعنی عدد پیچ[۲] آنها $w \in L$، برچسب‌گذاری می‌شوند. این عدد در واقع ردهٔ پیکربندی کلاسیک متناظر در $\pi_1 T$ است. چون $\pi_\circ \mathcal{L}T = \pi_1 T \cong L$، عدد پیچ مؤلفه‌های مختلف همبند فضای حلقهٔ $\mathcal{L}T$ را متمایز می‌سازد. لذا شاهد رخداد طبیعی مشبکه‌ای به نام مشبکهٔ نارین[۳]، که مجموعهٔ تکانه‌های $p \in L^*$ و اعداد پیچ $w \in L$ است هستیم:

$$\Gamma^{n,n} = L \oplus L^* .$$

این مشبکه، یک مشبکهٔ خوددوگان زوج و دارای نشان[۴] (n, n) است با ضرب داخلی

$$p = (w, k), \qquad q^2 = 2w \cdot k .$$

معلوم می‌شود که همهٔ تقارنهای مشبکهٔ $\Gamma^{n,n}$، به تقارنهای نظریهٔ میدان همدیس کامل که با کوانتش فضای حلقه ساخته می‌شود، ارتقا می‌یابند. عناصر گروه تقارن مشبکهٔ نارین

$$SO(n, n, \mathbb{Z}) = \mathrm{Aut}\ \Gamma^{n,n}$$

مثالهایی از T‌ـدوگانیها هستند. یک مثال خاص، تعویض چنبره با دوگان آن است: $T \leftrightarrow T^*$.

T‌ـدوگانیهایی را که چنبره را با دوگانش عوض می‌کنند می‌توان تار به تار هم به‌کار برد. اگر یک تاربندی $B \to X$ برای خمینهٔ X داشته باشیم، که در آن تارها چنبره‌اند، می‌توانیم تاربندی دوگان را با دوگان کردن تمام تارها به‌دست آوریم. این کار منجر به پدید آمدن خمینهٔ جدید $\hat{X} \to B$ خواهد شد و تحت شرایط مناسب، یک مدل سیگمای ابرمتقارن هم‌ارز حاصل خواهد شد. تقارنی که این دو خمینه را به یکدیگر تبدیل می‌کند، $X \leftrightarrow \hat{X}$، تقارن آینه‌ای نام دارد ([۲]، [۳]).

۵.۳ ریسمانهای توپولوژیک، کوهومولوژی کوانتومی، و تقارن آینه‌ای

در حالت ذرات نقطه‌ای، از آنجا که فرمهای دیفرانسیل را به‌طور طبیعی روی فضای هدف بنا می‌کنیم، در نظر گرفتن تعمیم ابرمتقارن آموزنده است.

۱. moduli space: برای این اصطلاح، برابر نهادهٔ «فضای پیمانه‌ها» یا «فضای پیمانه‌ای» در زبان ریاضی فارسی مناسب‌تر است. ولی چون واژهٔ «پیمانه» در فیزیک منحصراً برای gauge یا gage بکار می‌رود و احتمال خلط معنا برای خوانندگان اهل فیزیک می‌رفت، اصطلاح «فضای مدولی» را ترجیح دادیم. ضمناً صفت «مدولی» را در موارد دیگر مانند «دستهٔ مدولی» یا «هندسهٔ مدولی» هم بکار برده‌ایم که واژهٔ مناسب‌تر در ریاضی، «پیمانه‌ای» است.ـم.

۲. توضیح اینکه میدان B یک ۲ـفرم است که dB پیچش (torsion) فضای هدف است.ـم.

1. pull-back 2. winding number 3. Narain lattice 4. signature

این فرمهای دیفرانسیل، که از طریق مجتمع دُرام به‌دست می‌آیند، می‌توانند توپولوژی خمینه را کنترل کنند. در واقع، با تقلیل نظریه به حالات پایه، فرمهای همساز که نمایشهای منحصر به‌فرد گروههای کوهومولوژی هستند، حاصل می‌شوند. و این قدمی است از آنالیز تابعی و نظریهٔ عملگرها به سوی توپولوژی.

همین‌طور، صورتبندی‌ای از نظریهٔ ریسمان وجود دارد که توپولوژی پیکربندی ریسمان را دربر دارد و آن را نظریهٔ توپولوژیک ریسمان می‌نامیم. این موضوع بسیار فنی و پیچیده است و از محدودهٔ این سخنرانی فراتر می‌رود، ولی من شرح مختصری از جنبه‌های اساسی آن خواهم داد. برای ملاحظهٔ جزئیات بیشتر به [۳] مراجعه کنید. (یک ویژگی بسیار مهم نظریهٔ توپولوژیک ریسمان که آن را هم نمی‌توانیم به‌طور کامل در اینجا شرح دهیم، این است که علاوه‌بر داشتن ساختار غنی و زیبای ریاضی، قادر است برخی دامنه‌های «توپولوژیک» خیلی خاص را در ابرریسمان کاملاً آزاد محاسبه کند و لذا اطلاعات فیزیکی را نیز به‌دست بدهد.)

ایدهٔ کلی مستتر در این نظریه چنین است. ابتدا، همانند حالت ذرهٔ نقطه‌ای، میدانهای فرمیونی θ^μ معرفی می‌شوند. حال اینها به‌عنوان اسپینورهای با دو مؤلفهٔ θ^μ_L و θ^μ_R در جهان‌صفحهٔ دوبعدی در نظر گرفته می‌شوند. عمل موضعی برای این فرمیونها عبارت است از

$$\int_\Sigma d^2 z\, g_{\mu\nu}(x)\left(\theta^\mu_L \frac{D\theta^\nu_L}{\partial \bar z} + \theta^\mu_R \frac{D\theta^\nu_R}{\partial z}\right).$$

به‌علاوه فرض می‌کنیم که فضای هدف X (تقریباً) مختلط است و لذا می‌توان مختصات موضعی تمامریخت x^i و $\bar x^{\bar i}$ را با تجزیه‌ای مشابه فرمیونها بکار برد. اگر این با جملات مراتب بالاترِ مناسب تکمیل شود به یک مدل سیگما با ابرتقارن $\mathcal{N}=(2,2)$ دست می‌یابیم.

اکنون می‌توان با تغییر اسپینهای میدانهای فرمیونی ریسمان توپولوژیک را به‌دست آورد. این کار با دو روش معادل به نام مدل A و مدل B صورت می‌گیرد. بنابر ماهیت این تاب توپولوژیک، انتگرال مسیری مدل سیگما در یک فضای متناهی‌بعد متمرکز می‌شود.

مدل A به نگاشتهای تمامریخت

$$\frac{\partial x^i}{\partial \bar z} = 0$$

تحدید می‌شود. این عمل، انتگرال مسیری روی تمام نگاشتهای از Σ به توی X را به یک انتگرال متناهی‌بعد روی فضای مدولی $\mathcal{M}$ از نگاشتهای تمامریخت تقلیل می‌دهد. به بیان دقیق‌تر، $\mathcal{M}$ فضای مدولی جفتهای (Σ, f) است که در آن Σ یک رویهٔ ریمانی و f یک نگاشت تمامریخت $f:\Sigma\to X$ می‌باشد. مدل A تنها به ردهٔ کیلر[1] $[\omega]\in H^2(X)$ خمینهٔ X بستگی دارد.

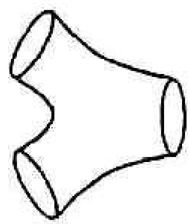
ریسمانهای توپولوژیکِ مدل A، نمونهٔ مهمی از تعمیم ریسمانی ساختار هندسی کلاسیک‌اند. کوهومولوژی کوانتومی ([۴]، [۵]) یک دگردیسیِ حلقهٔ[2] کوهومولوژی دُرام $H^*(X)$ یک خمینه است. از دیدگاه کلاسیک این حلقه خواص تقاطعی زیرخمینه‌ها را مشخص می‌کند. به بیان دقیق‌تر، اگر سه ردهٔ کوهومولوژی $\alpha,\beta,\gamma\in H^*(X)$ داشته باشیم که دوگان پوانکارهٔ زیرواریته‌های $A,B,C\subset X$ باشند، کمیت

$$I(\alpha,\beta,\gamma)=\int_X \alpha\wedge\beta\wedge\gamma$$

1. Kähler 2. ring

تقاطع سه ردهٔ A، B، و C را به‌دست می‌دهد. به عبارت دیگر، تعداد نقاط (با احتساب علامتها) در $A\cap B\cap C$ را می‌شمارد.

در حالت مدل A باید فرض کنیم که X یک خمینهٔ کیلری یا حداقل یک خمینهٔ همتافته[1] با فرم همتافتهٔ ω است. اکنون حاصلضرب تقاطعی «ریسمانی» به سه رأس ریسمانی مربوط می‌شود:



از دیدگاه ریاضی تعریف زیر را داریم

$$I_{qu}(\alpha,\beta,\gamma)=\sum_d q^d \int_{Map^*d} \alpha\wedge\beta\wedge\gamma$$

که در آن انتگرال‌گیری فرمهای دیفرانسیل روی فضای مدولی نگاشتهای شبه تمامریخت با درجهٔ d از یک کره به توی خمینهٔ X، صورت می‌گیرد. به این نگاشتها توسط عمل اینستانتونیِ کلاسیکِ

$$q^d=\exp\left[-\frac{1}{\alpha'}\int_{S^2}\omega\right]=e^{-(d\cdot[\omega])/\alpha'}$$

وزن داده می‌شود. در حد $\alpha'\to 0$ تنها نگاشتهای درجهٔ صفر حضور دارند، اما این نگاشتها لزوماً ثابت‌اند و لذا تعریف کلاسیک حاصلضرب تقاطعی را به توسط انتگرال روی فضای X باز می‌یابیم. از نظر هندسی، می‌توان حاصلضرب تقاطعی کوانتومی را چنین توجیه کرد: این حاصلضرب کره‌های شبه‌تمامریخت درون X را که هر یک از دورهای A و B و C را قطع می‌کنند، می‌شمارد. لذا در حالت کوانتومی دیگر لازم نیست این دورها یکدیگر را قطع کنند. کافی است یک کرهٔ شبه‌تمامریخت با نقاط a، b، c که $a\in A$ و $b\in B$ و $c\in C$، وجود داشته باشد، یعنی یک جهان‌صفحهٔ ریسمان باشد که از هر سه عبور کند.

در مدل B می‌توانیم توجه خود را به نگاشتهای (تقریباً) ثابت محدود کنیم. این مدل تنها به ساختار مختلط مدولی X بستگی دارد. مهم‌ترین جنبهٔ آن این است که تقارن آینه‌ای مدل A را با مدل B تعویض می‌کند. مثال مشهوری از قدرت تقارن آینه‌ای محاسبهٔ اولیهٔ خمینهٔ کالابی-یائو به‌دست کاندلاس و همکارانش [۱۵] است که در $\mathbb{P}^4$ با رابطهٔ زیر مشخص می‌شود:

$$X: x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5+x_5^5=0.$$

در این حالت، محاسبهٔ مدل A منجر به رابطهٔ

$$F(q)=\sum_d n_d q^d$$

می‌شود که در آن n_d معرف تعداد خمهای گویای از درجهٔ d در X است. (به بیان دقیق‌تر، این کمیتها چیزی را نمی‌شمارند بلکه به‌طور تقریبی به‌عنوان اعداد

1. symplectic

اویلر فضاهای محتملاً تکین معرفی می‌شوند و لذا در حالت کلی اعدادی گویا هستند.) محاسبهٔ این اعداد بسیار دشوار است. عدد $n_1 =$ ۲۸۷۵ برای $d =$ ۱ (خطها) نتیجهٔ کلاسیک به‌دست آمده در قرن ۱۹ است. عدد بعدی $n_2 =$ ۶۰۹۲۵۰ تعداد مقطعهای مخروطی مختلف در چهار بعد است و در حدود سال ۱۹۸۰ محاسبه شد، و سرانجام تعداد مکعبهای تابدار، $n_3 =$ ۳۱۷۲۰۶۳۷۵، با اجرای یک برنامهٔ پیچیدهٔ رایانه‌ای به‌دست آمده است. ولی اکنون به یمن نظریهٔ ریسمان تمام این اعداد را می‌شناسیم. در جدول زیر اولین ده عدد آورده شده‌اند

d	n_d
۱	۲۸۷۵
۲	۶ ۰۹۲۵۰
۳	۳۱۷۲ ۰۶۳۷۵
۴	۲۴ ۲۴۶۷۵ ۳۰۰۰۰
۵	۲۲۹۳۰ ۵۹۹۹۹ ۸۷۶۲۵
۶	۲۴۸ ۲۴۹۷۴ ۲۱۱۸۰ ۲۲۰۰۰
۷	۲ ۹۵۰۹۱ ۰۵۰۵۷ ۰۸۴۵۶ ۵۹۲۵۰
۸	۳۷۵۶ ۳۲۱۶۰ ۹۳۷۴۷ ۶۶۰۳۵ ۵۰۰۰۰
۹	۵۰ ۳۸۴۰۵ ۱۰۴۱۶ ۹۸۵۲۴ ۳۶۴۵۱ ۰۶۲۵۰
۱۰	۷۰۴۲۸ ۸۱۶۴۹ ۷۸۴۵۴ ۶۸۶۱۱ ۳۴۸۸۲ ۴۹۷۵۰

چگونه فیزیکدانان می‌توانند این اعداد را محاسبه کنند؟ تقارن آینه‌ای این کار را انجام می‌دهد. این تقارن ناورداهای «ریسمانی» را که از مدل A روی خمینهٔ X می‌آیند به ناورداهای کلاسیک مدل B روی خمینهٔ آینه‌ای $\check{X}$ مربوط می‌کند. بویژه این عمل منجر به معادلهٔ دیفرانسیل فوکسی تابع $F(q)$ می‌شود. با حل این معادله، اعداد صحیح n_d به‌دست می‌آیند.

۴. نظریهٔ ریسمان غیراختلالی و شامه‌ها

دیدیم که چگونه نظریهٔ میدان کوانتومی منجر به ساختاری غنی در قالب هندسهٔ مدولی می‌شود که برحسب نگاشتهای Φ_Σ صورتبندی شد. برای حرکت از نظریهٔ میدان کوانتومی به سوی نظریهٔ ریسمان باید دو قدم دیگر نیز برداریم.

۱.۴ جمع‌بندی روی توپولوژیهای ریسمان

ابتدا می‌خواهیم موضوع را به حالتی تعمیم دهیم که نگاشتهای Φ_Σ تنها توابعی روی فضای مدولی $\mathcal{M}_{g,n}$، رویه‌های ریمانی نیستند، بلکه فرمهای دیفرانسیل کلی‌تری هستند. در واقع به حالتی که اینها فرمهای حجمی باشند علاقه‌مندیم، زیرا در این‌صورت می‌توان دامنه‌های ریسمان را به‌صورت زیر تعریف کرد

$$A_g : \int_{\mathcal{M}_g} \Phi_\Sigma$$

همان‌گونه که بعداً خواهیم دید، این همان تعریف ناورداهای گروموف‌ـویتن نیز هست ([۵]، [۴]). گرچه ما قائل به استقلال از مدولهای نظریهٔ میدان کوانتومی هستیم، باید این را در نظر داشته باشیم که A_g (که اکنون به یک رویهٔ توپولوژیک باگونای g وابسته است) همچنان (در میان بقیه پارامترها) به α' وابسته است.

دوم اینکه، در نظر گرفتن دامنهٔ ریسمان با یک توپولوژی مفروض به تنهایی کافی نیست. همان‌طور که در نظریهٔ میدان جمع‌بندی روی تمام نمودارهای فاینمن ممکن انجام می‌شود، در نظریهٔ ریسمان باید روی تمام توپولوژیهای جهان‌ـصفحهٔ ریسمان جمع ببندیم. در واقع، باید این دامنه‌ها را به‌صورت $A(g_s) \approx \sum_{g\geq 0} g_s^{2g-2} A_g$، که یک تابع مولد است، جمع ببندیم. در اینجا ما ثابت جفت‌شدگی ریسمان یعنی g_s را به‌کار برده‌ایم. متأسفانه، در حالت کلی این تابع مولد در بهترین وضعیت خود یک بسط سری مجانبی از تابع تحلیلی $A(g_s)$ است. براورد غیردقیقی از حجم $\mathcal{M}_g$ نشان می‌دهد که نوعاً، $A_g \sim 2g!$، و لذا جمع روی توپولوژیهای ریسمان همگرا نیست. در واقع، از استدلالهای فیزیکی عمومی چنین برمی‌آید که دامنه‌های احتمال غیراختلالی $A(g_s)$ تصحیحاتی به شکل زیر دارند

$$A(g_s) = \sum_{g\geq 0} g_s^{2g-2} A_g + \mathcal{O}(e^{-1/g_s}).$$

واضح است که برای دستیابی به تعریف صحیح دامنه‌های احتمال ریسمان، این اصلاحات غیراختلالی باید درک شوند.

۲.۴ نظریهٔ ریسمان غیراختلالی

چنانکه در سخنرانیهای دیگر با تفصیل بیشتری بررسی خواهد شد، در سالهای اخیر شاهد پیشرفت قابل توجهی در جهت توسعهٔ چنین صورتبندی غیراختلالی بوده‌ایم. جالب توجه اینکه، انواع مختلف ریاضیدانان نیز وارد بازی شده‌اند. این موضوع دو ایدهٔ جدید و جالب را در بر دارد.

۱. نظریهٔ ریسمان نظریه‌ای دربارهٔ ریسمانها نیست. در نظر گرفتن فضاهای حلقه و کوانتش آنها به تنهایی کفایت نمی‌کند بلکه باید اشیای گسترده‌تر دیگری همچون شامه‌ها را نیز در نظر داشت. می‌توان گفت این اشیا وابسته به نگاشتهای کلی‌تر $Y \to X$ هستند که Y فضایی از بعد بالاتر است. اما مسأله این است که کوانتش سازگاری وجود ندارد که از شامه‌های «کوچک» در راستای خطوط نظریهٔ ریسمان شروع شود، به این معنی که بسطی که توسط آن بتوان اندازهٔ Y را (از طریق α') و توپولوژی را (از طریق g_s) کنترل کرد موجود نیست. ولی از طریق صورتبندی Dـشامه‌ها[۱۱] این مطلب را می‌توان به‌طور دقیق در نظریهٔ اختلالی ریسمان تحلیل کرد. Dـشامه‌ها سهمی از مرتبهٔ e^{-1/g_s} دارند و لذا مکمل سری اختلالی مجانبی ریسمان هستند.

۲. همان‌گونه که تأکید کردیم، دامنه‌های A به پارامترها و یا مدولهای بسیاری بستگی دارند. بجز جفت‌شدگی ریسمان یعنی g_s، تمام مدولهای دیگر تعبیری هندسی برحسب متریک و میدان B روی X دارند. نکتهٔ جدید دیگر این است که نظریهٔ ریسمان روی X با جفت‌شدگی ریسمان g_s، می‌تواند تعبیری کاملاً هندسی برحسب نظریه‌ای جدید به نام نظریهٔ M روی خمینهٔ $X \times S^1$ داشته باشد که در آن طول دایرهٔ S^1 برابر با g_s است[۱۲].

۳.۴ شامه‌های روی چنبره

اگر به سراغ نظریهٔ ریسمان کاملاً غیراختلالی روی چنبره برویم، ماجرا نسبت به آنچه در بخش ۲.۳ دیدیم پیچیده‌تر می‌شود. مشبکهٔ اعداد کوانتومی اشیای

مختلف و همین‌طور تقارنها بزرگ‌تر می‌شود. به‌ازای مقادیر کوچک n، بعد چنبرهٔ T ($n \geq ۴$)، مشاهده می‌شود که مشبکهٔ بار غیراختلالی M را می‌توان به‌صورت مجموع مستقیم مشبکهٔ نارین (اعداد پیچ و تکانهٔ ریسمانها) با مشبکه‌ای که رده‌های هومولوژی شامه‌ها را تغییر نمی‌دهد، نوشت:

$$M = \Gamma^{n,n} \oplus H^{\text{فرد/زوج}}(T) .$$

در اینجا توجه داریم که مشبکهٔ شامه‌ها (که بسته به نوع نظریهٔ ریسمان مورد بحث زوج یا فردند)، یعنی

$$H^{\text{فرد/زوج}}(T) \cong \wedge^{\text{فرد/زوج}} L^*$$

به‌عنوان نمایشهای نیم‌ـاسپینوری تحت گروه T‌ـدوگانی $SO(n,n,\mathbb{Z})$ تبدیل می‌شوند. معلوم می‌شود که گروه کامل دوگانی، گروه استثنایی اعداد صحیح یعنی $E_{n+1}(\mathbb{Z})$ است. مشبکهٔ M نمایشی تحویل‌ناپذیر برای این گروه تقارن است. لذا این U‌ـدوگانیها ریسمانها را با شامه‌ها جابه‌جا می‌کنند.

لذا ملاحظه می‌کنیم که سلسله‌مراتب

$$\{\text{ذرات}\} \subset \{\text{ریسمانها}\} \subset \{\text{شامه‌ها}\}$$

در دنبالهٔ (زیر) گروههای تقارن ذیل که به‌ترتیب دارای رتبه‌های $n-1$، n و $n+1$ هستند، منعکس است

$$SL(n,\mathbb{Z}) \subset SO(n,n,\mathbb{Z}) \subset E_{n+1}(\mathbb{Z}) .$$

پرسشی عمیق (و در حالت کلی، بدون جواب) این است که چه ساختار ریاضی «صحیحی» به یک چنبرهٔ nبعدی وابسته می‌شود به‌طوری که منجر به پدید آمدن گروه استثنایی $E_{n+1}(\mathbb{Z})$ می‌گردد.

۵. D‌ـشامه‌ها

ابزار مهم برای گسترش نظریهٔ ریسمان در ورای نظریهٔ اختلال، شامه‌ها هستند [۱۱]. از دیدگاه ریاضی، D‌ـشامه‌ها متناظر نسبی نظریهٔ گروموفسویتن هستند. اکنون نقطهٔ شروع ما یک جفت خمینهٔ نسبی (X,Y) است که در آن X یک خمینهٔ dبعدی و $Y \subset X$ بسته است. جهان‌صفحه‌های ریسمان به‌صورت رویه‌های ریمانی Σ با مرز $\partial\Sigma$ تعریف می‌شوند و ردهٔ نگاشتهای $x : \Sigma \to X$ در رابطهٔ $x(\partial\Sigma) \subset Y$ صدق می‌کنند، یعنی مرز رویه‌های ریمانی باید به زیر فضای Y نگاشته شود. حرف "D" در D‌ـشامه‌ها معرف شرایط مرزی دیریکله است که روی مؤلفه‌های نگاشت x که بر Y عمودند اعمال می‌شود.

توجه دارید که در توصیف تابعگونی اکنون دو نوع مرز برای رویه‌ها داریم. ابتدا مرزهای زمان‌گونه هستند که هم‌اکنون آنها را وصف کردیم. در اینجا یک شرط مرزی مشخص، یعنی این شرط را که ریسمان روی D‌ـشامهٔ Y قرار گیرد، انتخاب می‌کنیم. و دیگر، مرزهای فضاگونه هستند که قبلاً دربارهٔ آنها توضیح داده‌ایم. اینها یک جزء اساسی در هر توصیف همیلتنی هستند. روی این مرزها شرایط مقدار اولیه‌ای را در نظر می‌گیریم که در زمان دوباره تولید شوند. در نظریهٔ ریسمان بسته، این مرزها بسته و لذا مجموع دایره‌ها هستند. با وجود D‌ـشامه‌ها، نوع دوم مرز نیز وجود دارد: ریسمان باز با بازهٔ $I = [0,1]$.

پدید آمدن دو نوع مرز فضاگونه به این دلیل است که راههای مختلفی برای انتخاب مختص «زمانی» روی رویهٔ ریمانی مرزدار وجود دارد. چنین رویه‌ای همواره به‌طور موضعی شبیه $S^1 \times \mathbb{R}$ یا $I \times \mathbb{R}$ است. این ابهام در چگونگی برش رویه، ابزار جدید و قدرتمندی در نظریهٔ ریسمان باز است.

به نظریهٔ میدان کوانتومی که توسط زوج (X,Y) بیان می‌شود، یک رستهٔ مدولی تعمیم‌یافته وابسته می‌کنیم. این رسته دو نوع شئ یا خمینهٔ یک‌بعدی دارد: دایرهٔ S^1 (ریسمان بسته) و بازهٔ $I = [0,1]$ (ریسمان باز). مورفیسم [ریختار]های بین خمینه‌های یک‌بعدی، باز بوردیسمها یا رویه‌های ریمانی Σ و اکنون با امکان وجود مرز می‌باشند. اکنون دو نوع فضای هیلبرت داریم: ریسمانهای بستهٔ $\mathcal{H}_{S^1}$ و ریسمانهای باز $\mathcal{H}_I$.

از دیدگاه نیم‌کلاسیک، فضای هیلبرت ریسمان باز عبارت است از

$$\mathcal{H}_I = L^2(Y,\mathcal{F})$$

با کلاف فضای فاک

$$\mathcal{F} = \bigotimes_{n \geq 1} S_{q^n}(TX)$$

توجه کنید که ما تنها یک نسخه از فضای فاک $\mathcal{F}$ داریم، و شرایط مرزی در انتهای بازه، حرکت‌دهنده‌های راست و چپ را به هم مربوط می‌سازد. همچنین میدانها، برشهای کلاف فضای فاک روی D‌ـشامهٔ Y هستند نه روی کل خمینهٔ فضاـزمان X. به این معنی، حالتهای ریسمان باز روی شامه قرار می‌گیرند.

۱.۵ شامه‌ها و ماتریسها

یکی از واقعیتهای جالب توجه این است که D‌ـشامه‌ها را می‌توان با چندگانگی N مشخص کرد، که به‌طور طبیعی منجر به یک ساختار ناجابه‌جایی می‌شود [۱۳].

با در دست داشتن یک رستهٔ مدولی، آن‌گونه که در بالا شرح داده شد، راه ساده‌ای برای ضرب تانسوری آن روی ماتریسهای ارمیتی $N \times N$ وجود دارد. کافی است به جای فضای هیلبرت $\mathcal{H}_I$ وابسته به بازهٔ I، $\mathcal{H}_I \otimes Mat_{N\times N}$ را با شرط ارمیتی بودن

$$(\psi \otimes M_{ij})^* = \psi^* \otimes M_{ji}$$

در نظر بگیریم. نگاشتهای Φ_Σ به طریق زیر تعمیم می‌یابند. ابتدا برای سادگی یک رویهٔ Σ با تک مرز C را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم C شامل n فضای هیلبرت ریسمان باز «ورودی» با حالتهای $\psi_1 \otimes M_1, \ldots, \psi_n \otimes M_n$ باشد. این حالتها اکنون دارای مقادیر ماتریسی هستند. مورفیسم جدید به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Phi_\Sigma(\psi_1 \otimes M_1, \ldots, \psi_n \otimes M_n) = \Phi_\Sigma(\psi_1, \ldots, \psi_n)\,\mathrm{Tr}(M_1 \cdots M_n)$$

در حالتی که بیش از یک مؤلفهٔ مرزی داریم، برای هر مؤلفه یک اثر اضافی خواهیم داشت.

به‌ویژه، می‌توانیم نمودار قرص با سه تقاطع ریسمانی باز را در نظر بگیریم.

با در نظر گرفتن آن به‌صورت یک نگاشت

$$\Phi_\Sigma : \mathcal{H}_I \otimes \mathcal{H}_I \longrightarrow \mathcal{H}_I$$

ملاحظه می‌کنیم که رأس تقاطع این ریسمان باز اکنون با عبارت زیر مشخص می‌شود

$$\Phi_\Sigma(\psi_1 \otimes M_1, \psi_2 \otimes M_2) = (\psi_1 * \psi_2) \otimes (M_1 M_2).$$

لذا ما حاصلضرب ریسمان وابسته را با حاصلضرب ماتریسی ضرب تانسوری کرده‌ایم.

با در نظر گرفتن حد هندسی، که در آن نظریهٔ میدان کوانتومی به‌عنوان مدل سیگمای نیمه‌کلاسیک روی X در نظر گرفته می‌شود، میدانهای ریسمانی متناظر با حالات $\mathcal{H}_I$، یعنی فضای هیلبرت ریسمان باز، میدانهایی با مقادیر ماتریسی D ـ شامهٔ Y خواهند بود، یعنی، می‌توان آنها را به‌عنوان برشهای $\mathrm{End}(E)$ در نظر گرفت که در آن E یک کلاف برداری (بدیهی) روی Y است.

همین ساختار ماتریسی زمانی هم که N تا D ـ شامهٔ متمایز $Y_1, \ldots, Y_N$ را در نظر بگیریم، به‌طور طبیعی ظاهر می‌شود. در چنین حالتی ماتریسی از ریسمانهای باز داریم که از شامهٔ Y_i تا شامهٔ Y_j کشیده شده است. در چنین حالتی هیچ توجیه واضحی برحسب کلاف برداری وجود ندارد. اما اگر تمام D ـ شامه‌ها برهم منطبق شوند یعنی $Y_1 = \cdots = Y_N$، آنگاه یک تقارن $U(N)$ پدید می‌آید.

۲.۵ D ـ شامه‌ها و نظریهٔ K

ارتباط با کلافهای برداری بسیار مفید از آب درآمده است. قدم بعدی، در نظر گرفتن D ـ شامه‌ها با کلافهای برداری نابدیهی است. معلوم شده است که این پیکربندیها را می‌توان به‌عنوان ترکیب شامه‌های با ابعاد مختلف در نظر گرفت[۱۴]. فرمول دقیقی وجود دارد که توپولوژی کلاف برداری E را به بار شامه، $\mu(E)$، مربوط می‌سازد که می‌توان آن را به‌صورت رده‌ای در $H^*(X)$ در نظر گرفت. (ما برای سادگی اولین شامه‌های ماکسیمال $Y = X$ را در نظر می‌گیریم.) ملاحظه می‌شود[۱۵]:

$$\mu(E) = \mathrm{ch}(E)\hat{A}^{1/2} \in H^*(X) \qquad (۲)$$

که در اینجا $\mathrm{ch}(E)$ مشخصهٔ چرن (تعمیم‌یافته)

$$\mathrm{ch}(E) = \mathrm{Tr}\ \exp(F/2\pi i)$$

و $\hat{A}$ گونایی است که در قضیهٔ شاخص اتیا ـ سینگر ظاهر می‌شود. توجه کنید که بار D ـ شامه می‌تواند کسری باشد.

برای توصیف شامه‌های با بعد کمتر می‌توان از دو شامهٔ با بعد زیاد، با کلافهای برداری E_1 و E_2 که بار مخالف دارند، شروع کرد. از نظر فیزیکی، دو تا از این‌گونه شامه‌ها پس از حذف شدن، گردایه‌ای از شامه‌های با بعد کمتر را باقی می‌گذارند. از نظر ریاضی، شیء حاصل را باید یک کلاف مجازی $E_1 \ominus E_2$ که نشان‌دهندهٔ رده‌ای در $K^0(X)$، گروه نظریهٔ Kای X، می‌باشد، در نظر گرفت[۱۶]. در واقع، نگاشت μ در (۲) تناظر مشهور

$$\mu : K^0(X) \longrightarrow H^{\mathrm{ev}}(X)$$

است که زمانی که با اعداد حقیقی ضرب تانسوری شود، یک یکریختی خواهد بود. به این معنا، تناظری یک‌به‌یک بین D ـ شامه‌ها و رده‌های نظریهٔ K وجود دارد[۱۶]. ثابت شده است که این ارتباط با نظریهٔ K بسیار مفید است.

۳.۵ مثال: قضیهٔ شاخص

یک مثال خوب از کارایی نقل‌وانتقال بین ریسمانهای باز و بسته دستیابی طبیعی به قضیهٔ شاخص است. استوانهٔ $\Sigma = S^1 \times I$ را بین دوتا D ـ شامه که توسط کلافهای برداری (مجازی) E_1 و E_2 مشخص می‌شوند، در نظر بگیرید. می‌توان آن را به‌صورت نمودار ریسمانی بسته با حالت درونی $\langle E_1|$ و حالت بیرونی $\langle E_2|$ به شکل زیر در نظر گرفت

$$\Phi_\Sigma = \langle E_2, E_1 \rangle$$

با تبدیل حالت مرزی D ـ شامه به حالتهای پایهٔ ریسمان بسته (که به توسط رده‌های کوهومولوژی داده می‌شوند) خواهیم داشت

$$|E\rangle = \mu(E) \in H^*(X)$$

و لذا

$$\Phi_\Sigma = \int_X \mathrm{ch}(E_1)\mathrm{ch}(E_2^*)\hat{A}.$$

از طرف دیگر، همچنین می‌توان استوانه را به‌عنوان یک اثر روی حالتهای ریسمان باز، با شرایط مرزی که با E_1 و E_2 کدگذاری می‌شوند، تلقی کرد. حالتهای پایه در $\mathcal{H}_I$، برشهایی از کلاف اسپینور دیراک هستند که با $E_1 \otimes E_2^*$ تابدار شده‌اند. خواهیم داشت

$$\Phi_\Sigma = \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_I}(-1)^F = \text{اندیس}\,(D_{E_1 \otimes E_2^*})$$

و لذا قضیهٔ شاخص [اندیس] خیلی ساده نتیجه می‌شود.

۴.۵ دیدگاه

در سالهای اخیر، پیشرفتهای جدید جالبی در این رشته صورت گرفته است. این مرور مختصر نمی‌تواند حق مطلب را ادا کند، ولی خواننده می‌تواند با مطالعهٔ مقالات مروری([۱۷] و [۱۸]) و متونی که در این مقالات از آنها نام برده شده، تصویر روشنی از این موضوع به‌دست آورد.

مراجع

1. J. Polchinski, *String Theory* (Cambridge Monographs on Mathematical Physics), Cambridge University Press, 1998.

2. D. A. Cox and S. Katz, *Mirror Symmetry and Algebraic Geometry* (Mathematical Surveys and Monographs, No. 68), AMS, 1999.

3. K. Hori, S. Katz, A. Klemm, R. Pandharipande, R. Thomas, C. Vafa, R. Vakil, E. Zaslow, *Mirror Symmetry*, Clay Mathematics Monographs, AMS, 2003.

4. Yu. I. Manin, *Frobenius Manifolds, Quantum Cohomology, and Moduli Spaces*, AMS, 1999.

5. D. McDuff and D. Salamon, *J-holomorphic curves and quantum cohomology*, AMS, 1994.

6. Ph. Di Francesco, P. Mathieu, and D. Senechal, *Conformal Field Theory* (Graduate Texts in Contemporary Physics), Springer, 1996.

7. B. Zwiebach, Closed string field theory: quantum action and the B-V master equation, *Nucl. Phys.* **B390**, 33-152 (1993) hep-th/9206084.

8. R. Dijkgraaf, *Les Houches Lectures on Fields, Strings and Duality, in Quantum Symmetries*, les Houches Session LXIV, Eds. A. Connes, K. Gawedzki, and J. Zinn-Justin, North-Holland, 1998, hep-th/9703136.

9. G. segal, *The definition of conformal field theory*, preprint; *Two dimensional conformal field theories and modular functors, in IXth International Conference on Mathematical Physics*, B. Simon, A. Truman and I. M. Davies Eds. (Adam Hilger, Bristol, 1989).

10. P. Candelas, P. Green, L. Parke, and X. de la Ossa, A pair of Calabi-Yau manifolds as an exactly soluble superconformal field theory, *Nucl. Phys.* **B359**, 21 (1991) and in [2].

11. J. Polchinski, Dirichlet-branes and Ramond-Ramond charges, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4724-4727 (1995) hep-th/9510017.

12. E. Witten, String theory in various dimensions, , *Nucl. Phys.* **B443**, 85 (1995) hep-th/9503124.

13. E Witten, Bound states of strings and p-branes, *Nucl. Phys.* **B460**, 335 (1996) hep-th/9510135.

14. M. Douglas, *Branes within branes*, hep-th/9512077.

15. M. Green, J. Harvey, and G Moore, I-brane inflow and anomalous couplings on D-branes, *Class. Quant. Grav.* **14**, 47-52 (1997) hep-th/9605033.

16. E. Witten, *D-branes and K-theory*, *JHEP* 9812, 019 (1998) hep-th/9810188.

17. A. Neitzke and C. Vafa, *Topological strings and their physical applications*, arXiv: hep-th/0410178.

18. M. Marino, *Chern-Simons theory and topological strings*, Rev. Mod. Phys. **77** (2005) 675 [arXiv:hep-th/0406005].
Les Houches lectures on matrix models and topological strings, arXiv: hep-th/0410165.

* * * * * *

• Robbert H. Dijkgraaf, "The mathematics of string theory", *Gaz. Math.*, (106) suppl (2005) 45-64.

• روبرت دایکگرف، دانشگاه آمستردام، هلند

سپاسگزاری. از آقای محمدمهدی شیخ‌جباری به خاطر مساعدت در ویرایش ترجمهٔ این مقاله سپاسگزاریم.