رادیکال

(قسمت سوم)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

توان رساندن عددها و عبارتهای رادیکالی

بنا به تعریف توان می‌توانیم بنویسیم :

$$۱)\ (\sqrt[۵]{۳})^{۴} = \sqrt[۵]{۳} \times \sqrt[۵]{۳} \times \sqrt[۵]{۳} \times \sqrt[۵]{۳} = \sqrt[۵]{۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳} = \sqrt[۵]{۳^{۴}}$$

$$۲)\ (\sqrt[۴]{۵})^{۳} = \sqrt[۴]{۵} \times \sqrt[۴]{۵} \times \sqrt[۴]{۵} = \sqrt[۴]{۵ \times ۵ \times ۵} = \sqrt[۴]{۵^{۳}}$$

به طور کلی :

$$(\sqrt[n]{a})^{m} = \sqrt[n]{a^{m}} \qquad (۴)$$

m عدد صحیح و n عدد طبیعی بزرگتر یا مساوی ۲ $(n \geq ۲)$ و a عدد حقیقی $(a \in \mathbb{R})$ می‌باشد. اگر n زوج باشد، باید a بزرگتر یا مساوی صفر $(a \geq ۰)$ باشد :

$$(\sqrt[n]{|a|})^{m} = \sqrt[n]{|a|^{m}}$$

مثال ۱۴ : حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

$۱)\ (\sqrt[۳]{۵})^{۶}$

$۲)\ (-\sqrt{۲})^{۴}$

$۳)\ (\sqrt[۵]{۳})^{۷}$

$۴)\ (\sqrt[۳]{-۳})^{۲}$

$۵)\ (\sqrt[۳]{-۴})^{۵}$

$۶)\ (\sqrt{۶} - \sqrt{۳})^{۲}$

$۷)\ (\sqrt{۳} - \sqrt{۲})^{۲} + (\sqrt{۳} + \sqrt{۲})^{۲}$

$۸)\ (\sqrt[۳]{-a^{۲}})^{۴}$

$۹)\ (\sqrt[۵]{a^{۳}b^{۲}})^{۳}$

$۱۰)\ (-\sqrt[۷]{a^{۴}})^{۶}$

حل :

$$۱)\ (\sqrt[۳]{۵})^{۶} = \sqrt[۳]{۵^{۶}} = \sqrt[۳]{(۵^{۲})^{۳}} = ۵^{۲} = ۲۵$$

$$۲)\ (-\sqrt{۲})^{۴} = (\sqrt{۲})^{۴} = \sqrt{۲^{۴}} = \sqrt{(۲^{۲})^{۲}} = ۲^{۲} = ۴$$

$$۳)\ (\sqrt[۵]{۳})^{۷} = \sqrt[۵]{۳^{۷}} = \sqrt[۵]{۳^{۵} \times ۳^{۲}} = ۳\sqrt[۵]{۳^{۲}} = ۳\sqrt[۵]{۹}$$

$$۴)\ (\sqrt[۳]{-۳})^{۲} = \sqrt[۳]{(-۳)^{۲}} = \sqrt[۳]{۹}$$

$$۵)\ (\sqrt[۳]{-۴})^{۵} = \sqrt[۳]{(-۴)^{۵}} = \sqrt[۳]{-۴^{۵}} = -\sqrt[۳]{(۲^{۲})^{۵}} = -\sqrt[۳]{۲^{۱۰}}$$

$$= -\sqrt[۳]{۲^{۹} \times ۲} = -\sqrt[۳]{(۲^{۳})^{۳} \times ۲} = -۲^{۳}\sqrt[۳]{۲} = -۸\sqrt[۳]{۲}$$

$$۶)\ (\sqrt{۶} - \sqrt{۳})^{۲} = (\sqrt{۶})^{۲} - ۲(\sqrt{۶})(\sqrt{۳}) + (-\sqrt{۳})^{۲}$$

$$= \sqrt{۶^{۲}} - ۲\sqrt{۶ \times ۳} + \sqrt{۳^{۲}} = ۶ - ۲\sqrt{۲ \times ۳^{۲}} + ۳$$

$$= ۹ - ۲ \times ۳\sqrt{۲} = ۹ - ۶\sqrt{۲}$$

$$۷)\ (\sqrt{۳} - \sqrt{۲})^{۲} + (\sqrt{۳} + \sqrt{۲})^{۲} = (\sqrt{۳})^{۲} - ۲(\sqrt{۳})(\sqrt{۲}) +$$

$$(-\sqrt{۲})^{۲} + (\sqrt{۳})^{۲} + ۲(\sqrt{۳})(\sqrt{۲}) + (\sqrt{۲})^{۲}$$

$$= \sqrt{۳^۲} - ۲\sqrt{۶} + \sqrt{۲^۲} + \sqrt{۳^۲} + ۲\sqrt{۶} + \sqrt{۲^۲}$$

$$= ۳ + ۲ + ۳ + ۲ = ۱۰$$

۸) $(\sqrt[۳]{-a^۲})^۴ = \sqrt[۳]{(-a^۲)^۴} = \sqrt[۳]{a^۸} = \sqrt[۳]{a^۶.a^۲}$

$= \sqrt[۳]{(a^۲)^۳.a^۲} = a^۲\sqrt[۳]{a^۲}$

۹) $(\sqrt[۵]{a^۳b^۲})^۳ = \sqrt[۵]{(a^۳b^۲)^۳} = \sqrt[۵]{a^۹b^۶} = \sqrt[۵]{a^۵.\,a^۴.\,b^۵.\,b}$

$= ab\sqrt[۵]{a^۴b}$

۱۰) $(-\sqrt[۷]{a^۴})^۶ = \sqrt[۷]{(a^۴)^۶} = \sqrt[۷]{a^{۲۴}} = \sqrt[۷]{a^{۲۱}.a^۳}$

$= \sqrt[۷]{(a^۳)^۷.a^۳} = a^۳\sqrt[۷]{a^۳}$

توجه داشته باشید که عبارتهایی نظیر : $(\sqrt{-۴})^۲$ و $(-\sqrt[۴]{-۳})^۲$ و $(\sqrt[۶]{-۵})^۳$ و $(\sqrt[۸]{-۲})^۸$ و $(\sqrt[۳]{\sqrt[۴]{-۲}})^۴$ در مجموعهٔ اعداد حقیقی بی‌معنی است، زیرا $\sqrt{-۴}$ و $\sqrt[۴]{-۳}$ و $\sqrt[۶]{-۵}$ و $\sqrt[۸]{-۲}$ و $\sqrt[۴]{-۲}$ عددهای حقیقی نیستند.

حالت خاص ــ به مثالهای زیر توجه کنید :

۱) $(\sqrt{۲})^۲ = \sqrt{۲^۲} = ۲$

۲) $(\sqrt[۵]{۷})^۵ = \sqrt[۵]{۷^۵} = ۷$

۳) $(\sqrt[۳]{۴})^۳ = \sqrt[۳]{۴^۳} = ۴$

۴) $(\sqrt[۴]{۳})^۴ = \sqrt[۴]{۳^۴} = ۳$

بطورکلی : برای عدد حقیقی a و عدد طبیعی n بزرگتر یا مساوی ۲ $(n \geq ۲)$، اگر n عددی فرد باشد :

$$\sqrt[n]{a^n} = a \qquad (۵)$$

و اگر n عددی زوج باشد :

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad \text{و} \quad (\sqrt[n]{|a|})^n = |a|$$

ریشهٔ یک عدد و یا عبارت رادیکالی

به مثالهای زیر توجه کنید :

۱) $\sqrt[۲]{\sqrt[۲]{۸۱}} = \sqrt[۲]{۹} = ۳$

$\sqrt[۴]{۸۱} = \sqrt[۴]{۳^۴} = ۳$

و

بنابراین :

$\sqrt[۲]{\sqrt[۲]{۸۱}} = \sqrt[۴]{۸۱}$

۲) $\sqrt[۳]{\sqrt[۲]{۶۴}} = \sqrt[۳]{۸} = ۲$

همچنین

$\sqrt[۶]{۶۴} = \sqrt[۶]{۲^۶} = ۲$

و

بنابراین :

$\sqrt[۳]{\sqrt[۲]{۶۴}} = \sqrt[۶]{۶۴}$

در مثال ۱ ملاحظه می‌شود که ریشهٔ دوم مثبت $\sqrt{۸۱}$ مساوی با ریشهٔ چهارم مثبت ۸۱ است.

در مثال ۲ مشاهده می‌کنید که ریشهٔ سوم $\sqrt{۶۴}$ مساوی با ریشهٔ ششم مثبت ۶۴ است.

به طور کلی :

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \qquad (۶)$$

ریشهٔ mام مثبت $\sqrt[n]{a}$، مساوی با ریشهٔ mnام مثبت a است.

m و n عددهای طبیعی و $m \geq ۲$ و $n \geq ۲$ می‌باشند ؛ و $a \in \mathbb{R}$ است.

اگر m یا n و یا هر دو زوج باشند ؛ a نمی‌تواند منفی باشد.

مثال ۱۵ : حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $(\sqrt{\sqrt{\sqrt{۴}}})^۴$

۲) $(\sqrt[۳]{\sqrt{۲\sqrt{۲}}})^{۱۲}$

۳) $(\sqrt[۳]{۲\sqrt{۲\sqrt[۴]{۴}}})^{۲۴}$

۴) $\sqrt[۳]{(\sqrt{۵\sqrt{۲}})^۴}$

۵) $\sqrt[۵]{\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{\sqrt{۴^{۶۰}}}}}$

۶) $(\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲\sqrt{۲}}}}})^{۳۲}$

۷) $(\sqrt[۳]{a\sqrt[۵]{a}})^{۱۵}$

$$8)\ \sqrt[7]{\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^7}}}\right)^{45}}$$

حل :

$$1)\ \left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}}\right)^4 = \left(\sqrt{\sqrt[4]{4}}\right)^4 = \sqrt{\left(\sqrt[4]{4}\right)^4} = \sqrt{4} = 2$$

$$2)\ \left(\sqrt[3]{\sqrt{2\sqrt{2}}}\right)^{12} = \left(\sqrt[6]{\sqrt{2^2\times 2}}\right)^{12} = \left(\sqrt[12]{8}\right)^{12} = 8$$

$$3)\ \left(\sqrt[3]{2\sqrt{2\sqrt[4]{4}}}\right)^{24} = \left(\sqrt[3]{\sqrt{2^2\times 2\sqrt[4]{4}}}\right)^{24}$$

$$= \left(\sqrt[6]{\sqrt[4]{(2^3)^4\times 4}}\right)^{24} = \left(\sqrt[24]{2^{12}\times 4}\right)^{24}$$

$$= 2^{12}\times 4 = 1\,2^{12}\times 2^2 = 2^{14}$$

$$4)\ \sqrt[3]{\left(\sqrt{5\sqrt{2}}\right)^4} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{\sqrt{5^2\times 2}}\right)^4} = \sqrt[3]{\left(\sqrt[4]{50}\right)^4} = \sqrt[3]{50}$$

$$5)\ \sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{4^{60}}}}} = \sqrt[20]{\sqrt[3]{\sqrt{4^{60}}}} = \sqrt[60]{\sqrt{4^{60}}}$$

$$= \sqrt[60]{\left(\sqrt{4}\right)^{60}} = \sqrt{4} = 2$$

$$6)\ \left(\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}}\right)^{32} = \left(\sqrt{\sqrt{2^2\times 2\sqrt{\sqrt{2^2\times 2\sqrt{2}}}}}\right)^{32}$$

$$= \left(\sqrt[4]{8\sqrt[4]{8\sqrt{2}}}\right)^{32} = \left(\sqrt[4]{\sqrt[4]{8^4\times 8\sqrt{2}}}\right)^{32}$$

$$= \left(\sqrt[16]{\sqrt{(8^5)^2\times 2}}\right)^{32} = \left(\sqrt[32]{8^{10}\times 2}\right)^{32} = 8^{10}\times 2$$

$$= (2^3)^{10}\times 2 = 2^{30}\times 2 = 2^{31}$$

در حالت کلی اگر $a \geq 0$ و تعداد رادیکالها n باشد داریم :

$$\underbrace{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots\sqrt{a}}}}}_{\text{مرتبه } n} = \sqrt[2^n]{a^{2^n-1}} \qquad (a \geq 0)$$

برای مثال داریم :

$$\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}}} = \sqrt[2^6]{3^{2^6-1}} = \sqrt[64]{3^{63}}$$

$$7)\ \left(\sqrt[3]{a\sqrt[5]{a}}\right)^{15} = \left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^5.a}}\right)^{15} = \left(\sqrt[15]{a^6}\right)^{15} = a^6$$

$$8)\ \sqrt[7]{\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^7}}}\right)^{45}} = \sqrt[7]{\left(\sqrt[15]{\sqrt[3]{a^7}}\right)^{45}} = \sqrt[7]{\left(\sqrt[45]{a^7}\right)^{45}}$$

$$= \sqrt[7]{a^7} = a$$

با توجه به مثالهای اخیر، در حالت کلی خواهیم داشت :

$$\sqrt[k]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}}}} = \sqrt[kpqmn]{a}$$

n و m و p و q و k عددهای طبیعی بزرگتر یا مساوی ۲ می‌باشند ؛ که اگر لااقل یکی از آنها زوج باشد، a نمی‌تواند منفی باشد.

برای مثال داریم :

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{75}}}}} = \sqrt[180]{75} \quad \text{و} \quad \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[4]{2}}}} = \sqrt[120]{2}$$

توجه : می‌دانیم $2 = \sqrt{4^1}$ و $2 = \sqrt[4]{2^4} = \sqrt[4]{4^2} = \sqrt[2\times 2]{4^{1\times 2}}$ ،

بنابراین :

$$\sqrt{4} = \sqrt[2\times 2]{4^{1\times 2}}$$

همچنین $\sqrt[5]{a^5} = a$ و $a = \sqrt[15]{a^{15}} = \sqrt[5\times 3]{(a^5)^3}$ ،

بنابراین :

$$\sqrt[5]{a^5} = \sqrt[5\times 3]{a^{5\times 3}}$$

به‌طور کلی :

برای عدد حقیقی a و عدد طبیعی n بزرگتر یا مساوی ۲ $(n \geq 2)$ ، اگر p عددی فرد باشد :

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \qquad (7)$$

اگر n زوج باشد، a^m نمی‌تواند منفی باشد.

و اگر p عددی زوج باشد :

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{|a|^m}$$

یعنی : عدد فرجه رادیکال و توان عبارت زیر رادیکال را می‌توانیم در یک عدد طبیعی ضرب و یا بر یک عدد طبیعی تقسیم کنیم.

مثال :

$$1)\ \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[7\times 3]{2^{7\times 2}} = \sqrt[21]{2^{14}}$$

2) $\sqrt[4]{2x^2} = \sqrt[2\times4]{(2x^2)^2} = \sqrt[8]{4x^4}$

3) $\sqrt[12]{3^4} = \sqrt[3\times4]{3^4} = \sqrt[3]{3}$

4) $\sqrt[15]{\sqrt[3]{a^9}} = \sqrt[45]{a^9} = \sqrt[9\times5]{a^9} = \sqrt[5]{a}$

نکته مهم

در مورد تقسیم فرجه رادیکال و توان عبارت زیر رادیکال بر یک عدد زوج و یا ضرب فرجه رادیکال و توان عدد زیر رادیکال در یک عدد زوج توجه به علامت عدد زیر رادیکال بسیار ضروری است :

مثال :

1) $\sqrt[4]{(-9)^2} = \sqrt[4]{81} = 3$ یا $\sqrt[4]{(-9)^2} = \sqrt{|-9|} = \sqrt{9} = 3$

یعنی $\sqrt[4]{(-9)^2} \neq \sqrt[2]{-9}$

2) $\sqrt[3]{-27} = -3$

همچنین $\sqrt[3]{-27} \neq \sqrt[3\times2]{(-27)^2}$

از خاصیتهای اخیر برای ضرب یا تقسیم عبارتهای رادیکالی با فرجه‌های نامساوی استفاده می‌کنیم، بدین ترتیب که ابتدا فرجه‌های رادیکالها را به فرجه مشترک تبدیل کرده و سپس عمل ضرب یا تقسیم را انجام می‌دهیم.

مثال :

1) $\sqrt[4]{2}\times\sqrt{2} = \sqrt[4]{2}\times\sqrt[2\times2]{2^2} = \sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2\times4} = \sqrt[4]{8}$

2) $2\sqrt[3]{-4}\times3\sqrt{2} = -2\sqrt[3]{4}\times3\sqrt{2} = -2\sqrt[3\times2]{4^2}\times3\sqrt[2\times3]{2^3}$

$= -2\sqrt[6]{4^2}\times3\sqrt[6]{2^3} = -6\sqrt[6]{4^2\times2^3} = -6\sqrt[6]{2^4\times2^3}$

$= -6\sqrt[6]{2^7} = -6\sqrt[6]{2^6\times2} = -6\times2\sqrt[6]{2} = -12\sqrt[6]{2}$

3) $\sqrt[3]{4}\div\sqrt[5]{8} = \sqrt[3\times5]{4^5}\div\sqrt[5\times3]{8^3} = \sqrt[15]{4^5}\div\sqrt[15]{8^3}$

$= \sqrt[15]{4^5\div8^3} = \sqrt[15]{2^{10}\div2^9} = \sqrt[15]{2^{10-9}} = \sqrt[15]{2}$

4) $\sqrt[4]{36}\div\sqrt{3} = \sqrt[4]{36}\div\sqrt[2\times2]{3^2} = \sqrt[4]{36}\div\sqrt[4]{9}$

$= \sqrt[4]{36\div9} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$

مثال ۱۶ : حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

1) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2}$

2) $5\sqrt{2}\times2\sqrt[3]{-2}$

3) $\sqrt[5]{8}\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2}$

4) $5\sqrt[3]{25}\times2\sqrt{3\sqrt{4}}$

5) $\sqrt{15}\div\sqrt[3]{5}$

6) $\sqrt[4]{225}\div\sqrt{25}$

7) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\times\sqrt[3]{a^2\sqrt[5]{a}}$

8) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\div\sqrt[7]{a^3}}{\sqrt[21]{a^{12}}}$

9) $\dfrac{\sqrt[5]{a^3}\times\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[7]{a^{12}}\div\sqrt[5]{a^2}}$

حل :

1) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2} = \sqrt[3\times2]{4^2}\times\sqrt[2\times3]{2^3} = \sqrt[6]{4^2}\times\sqrt[6]{2^3}$

$= \sqrt[6]{4^2\times2^3} = \sqrt[6]{2^4\times2^3} = \sqrt[6]{2^7} = \sqrt[6]{2^6\times2} = 2\sqrt[6]{2}$

2) $5\sqrt{2}\times2\sqrt[3]{-2} = -5\sqrt{2}\times2\sqrt[3]{2} = -5\sqrt[6]{2^3}\times2\sqrt[6]{2^2}$

$= -10\sqrt[6]{2^3\times2^2} = -10\sqrt[6]{2^5} = -10\sqrt[6]{32}$

3) $\sqrt[5]{8}\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2} = \sqrt[30]{8^6}\times\sqrt[30]{4^{10}}\times\sqrt[30]{2^{15}}$

$= \sqrt[30]{8^6\times4^{10}\times2^{15}} = \sqrt[30]{2^{18}\times2^{20}\times2^{15}} = \sqrt[30]{2^{53}}$

$= \sqrt[30]{2^{30}\times2^{23}} = 2\sqrt[30]{2^{23}}$

4) $5\sqrt[3]{25}\times2\sqrt{3\sqrt{4}} = 5\sqrt[3]{25}\times2\sqrt{3\times2} = 5\sqrt[3]{25}\times2\sqrt{6}$

$= 5\sqrt[6]{25^2}\times2\sqrt[6]{6^3} = 10\sqrt[6]{25^2\times6^3} = 10\sqrt[6]{135000}$

5) $\sqrt{15}\div\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{15^3}\div\sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{15^3\div5^2}$

$= \sqrt[6]{\dfrac{5^3\times3^3}{5^2}} = \sqrt[6]{5\times3^3} = \sqrt[6]{5\times27} = \sqrt[6]{135}$

6) $\sqrt[4]{225}\div\sqrt{25} = \sqrt[4]{225}\div\sqrt[4]{25^2} = \sqrt[4]{225\div25^2}$

$= \sqrt[4]{\dfrac{5^2\times3^2}{5^4}} = \sqrt[4]{\dfrac{3^2}{5^2}} = \sqrt[4]{(\dfrac{3}{5})^2} = \sqrt{\dfrac{3}{5}} = \sqrt{0.6}$

7) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\times\sqrt[3]{a^2\sqrt[5]{a}} = \sqrt[3]{a^3\sqrt[3]{a}\times\sqrt[5]{a}} = a\sqrt[3]{\sqrt[15]{a^5}\times\sqrt[15]{a^3}}$

$= a\sqrt[3]{\sqrt[15]{a^5.a^3}} = a\sqrt[3]{\sqrt[15]{a^8}} = a\sqrt[45]{a^8}$

$$8)\ \frac{\sqrt[3]{a^2}\div\sqrt[7]{a^3}}{\sqrt[21]{a^{12}}}=\frac{\sqrt[21]{(a^2)^7}\div\sqrt[21]{(a^3)^3}}{\sqrt[21]{a^{12}}}=\sqrt[21]{\frac{a^{14}\div a^9}{a^{12}}}$$

$$=\sqrt[21]{\frac{a^5}{a^{12}}}=\sqrt[21]{\frac{1}{a^7}}=\sqrt[21]{\left(\frac{1}{a}\right)^7}=\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$$

$$9)\ \frac{\sqrt[5]{a^3}\times\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[7]{a^{12}}\div\sqrt[5]{a^2}}=\frac{\sqrt[5]{a^3}\times\sqrt[3]{a^2}}{\frac{\sqrt[7]{a^{12}}}{\sqrt[5]{a^2}}}=\frac{\sqrt[5]{a^2}\times\sqrt[5]{a^3}\times\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[7]{a^{12}}}$$

$$=\frac{\sqrt[5]{a^2.a^3}\times\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[7]{a^{12}}}=\frac{\sqrt[5]{a^5}\times\sqrt[21]{(a^2)^7}}{\sqrt[21]{(a^{12})^3}}=\frac{a\sqrt[21]{a^{14}}}{\sqrt[21]{a^{36}}}$$

$$=a\sqrt[21]{\frac{a^{14}}{a^{36}}}=a\sqrt[21]{\frac{1}{a^{22}}}=\sqrt[21]{\frac{a^{21}}{a^{22}}}=\sqrt[21]{\frac{1}{a}}$$

توانهای کسری (گویا)

قبلاً توانهای صحیح (مثبت و منفی و صفر) و اعمال مربوط به آنها را مطالعه کردیم؛ در اینجا توانهای کسری اعداد را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

رابطهٔ $2^1=2^x\times2^x$ را در نظر می‌گیریم؛ اگر دستور ضرب توانهای صحیح را به کار بریم خواهیم داشت:

$$2^{x+x}=2^1\Rightarrow 2^{2x}=2^1\Rightarrow 2x=1$$

در این صورت x نمی‌تواند عدد صحیح باشد و اگر فرض کنیم این دستور در این مورد نیز درست است $x=\frac{1}{2}$ خواهد شد و در نتیجه:

$$2^{\frac12}\times2^{\frac12}=2^1 \qquad (1)$$

از طرف دیگر:

$$\sqrt2\times\sqrt2=2 \qquad (2)$$

با مقایسهٔ (۱) و (۲) می‌توانیم بنویسیم:

$$2^{\frac12}=\sqrt2$$

و همچنین داریم:

$$(2^{\frac12})^2=2^{\frac12\times2}=2^1=2$$

به طور کلی:
اگر a برابر عدد مثبتی، و یا صفر باشد؛ بنابه تعریف می‌توان نوشت:

$$a^{\frac12}=\sqrt a \qquad (a\ge 0)$$

مثال:

$$\sqrt{49}=\sqrt{7^2}=(7^2)^{\frac12}=7\ ,\ \sqrt3=3^{\frac12}\ ,\ 5^{\frac12}=\sqrt5$$

به طریق مشابه می‌توانیم $a^{\frac1n}$ (n عدد طبیعی و $n\ge2$) را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$a^{\frac1n}=\sqrt[n]{a}$$

اگر n زوج باشد، a نمی‌تواند منفی باشد.

مثال:

$$5^{\frac13}=\sqrt[3]{5}\ ,$$

$$\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=(5^3)^{\frac13}=5\ ,$$

$$\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=(2^5)^{\frac15}=2\ ,$$

$$\sqrt[7]{3}=3^{\frac17}$$

$$\sqrt[4]{9}=(3^2)^{\frac14}=3^{\frac12}$$

می‌دانیم $\sqrt[4]{3}=3^{\frac14}$، اگر دو طرف این تساوی را به توان ۵ برسانیم، خواهیم داشت:

$$(3^{\frac14})^5=(\sqrt[4]{3})^5$$

و یا

$$3^{\frac54}=\sqrt[4]{3^5}$$

به طور کلی:
اگر m و n اعداد طبیعی و $n\ge2$ باشد، بنابه تعریف می‌توان نوشت:

$$a^{\frac mn}=\sqrt[n]{a^m} \qquad (8)$$

اگر n زوج باشد؛ a^m نمی‌تواند منفی باشد.

مثال:

$$7^{\frac45}=\sqrt[5]{7^4}$$

$$2\times5^{\frac23}=2\sqrt[3]{5^2}=2\sqrt[3]{25}$$

$$9\sqrt[4]{27}=3^2\times\sqrt[4]{3^3}=3^2\times3^{\frac34}=3^{2+\frac34}=3^{\frac{11}{4}}=\sqrt[4]{3^{11}}$$

$$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[5]{8}=\sqrt[3]{2^2}\times\sqrt[5]{2^3}=2^{\frac23}\times2^{\frac35}=2^{\frac23+\frac35}=2^{\frac{19}{15}}$$

$$=2^{\frac{15+4}{15}}=2^{1+\frac{4}{15}}=2^1\times2^{\frac{4}{15}}=2\sqrt[15]{2^4}=2\sqrt[15]{16}$$

با توجه به مطالب اخیر می‌توان نتیجه گرفت که دستورهای عملیات توان در مورد توانهای صحیح می‌تواند در مورد توانهای کسری (گویا) نیز به کار رود ؛ بنابراین اگر m و n عددهایی گویا باشند و a عدد حقیقی باشد :

$$a^{m} . a^{n} = a^{m+n} \quad (m,n \in Q \ , \ a \in \mathbb{R})$$

$$a^{m} : a^{n} = a^{m-n} \quad (a \neq 0)$$

مثال :

1) $a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{5}{2}} = a^{\frac{3}{4}+\frac{5}{2}} = a^{\frac{13}{4}}$

2) $b^{\frac{5}{3}} \times b^{-\frac{4}{9}} = b^{\frac{5}{3}-\frac{4}{9}} = b^{\frac{11}{9}}$

3) $b^{\frac{7}{4}} : b^{\frac{7}{3}} = b^{\frac{7}{4}-\frac{7}{3}} = b^{\frac{-7}{12}}$

4) $a^{\frac{2}{3}} : a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}-(-\frac{1}{2})} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}}$

5) $7^{\frac{3}{4}} \times 7^{-\frac{4}{3}} = 7^{\frac{3}{4}-\frac{4}{3}} = 7^{-\frac{7}{12}}$

6) $3^{\frac{1}{4}} : 3^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}} = 3^{-\frac{5}{12}}$

در اینجا عبارت $7^{-\frac{7}{12}}$ را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$7^{-\frac{7}{12}} = (7^{\frac{7}{12}})^{-1} = \frac{1}{7^{\frac{7}{12}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{7^{7}}}$$

به همین ترتیب عبارت $3^{-\frac{5}{12}}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$3^{-\frac{5}{12}} = (3^{\frac{5}{12}})^{-1} = \frac{1}{3^{\frac{5}{12}}} = \frac{1}{\sqrt[12]{3^{5}}}$$

به طور کلی :

اگر $a \neq 0$ و m و n اعداد طبیعی و $n \geq 2$ باشد، بنا به تعریف می‌توان نوشت :

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{m}}} \qquad (9)$$

اگر n زوج باشد ؛ a^{m} نمی‌تواند منفی باشد.

مثال :

1) $5^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^{2}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$

2) $a^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{a^{4}}}$

3) $2^{-\frac{9}{7}} = \frac{1}{\sqrt[7]{2^{9}}} = \frac{1}{\sqrt[7]{2^{7} \times 2^{2}}} = \frac{1}{2\sqrt[7]{4}}$

مثال ۱۷ : حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

1) $\sqrt[5]{8} \times 2^{-\frac{1}{5}} \times \sqrt[5]{16} \times 2^{-\frac{7}{5}} \times 2^{\frac{3}{5}} \times 2^{-\frac{2}{5}}$

2) $\sqrt[3]{4} \times 2^{-\frac{5}{3}} \times \sqrt[3]{2} \times 2^{-\frac{2}{3}}$

3) $2^{-2.5} \times \frac{1}{\sqrt[5]{4^{-10}}} \times 2^{1.5} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt[10]{(\frac{1}{2})^{5}}$

4) $\frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \times \frac{1}{\sqrt[8]{3}} \times 3^{-\frac{1}{16}}$

5) $a^{-\frac{4}{3}} \times a^{\frac{5}{9}} \times \sqrt[3]{a^{-2}} \times a^{-\frac{4}{9}} \times \sqrt[9]{a^{2}}$

6) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}} \times b^{-\frac{2}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{a^{-8}} \times \frac{\sqrt[9]{b^{3}}}{\sqrt[3]{a^{4}}}$

حل :

1) $\sqrt[5]{2^{3}} \times 2^{-\frac{1}{5}} \times \sqrt[5]{2^{4}} \times 2^{-\frac{7}{5}} \times 2^{\frac{3}{5}} \times 2^{-\frac{2}{5}}$

$= 2^{\frac{3}{5}-\frac{1}{5}+\frac{4}{5}-\frac{7}{5}+\frac{3}{5}-\frac{2}{5}} = 2^{\frac{0}{5}} = 2^{0} = 1$

2) $\sqrt[3]{2^{2}} \times 2^{-\frac{5}{3}} \times \sqrt[3]{2} \times 2^{-\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{-\frac{2}{3}}$

$= 2^{\frac{2}{3}-\frac{5}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}} = 2^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

2) $2^{-2.5} \times \frac{1}{\sqrt[5]{2^{-20}}} \times 2^{1.5} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt[10]{(\frac{1}{2})^{5}}$

$= 2^{-2.5} \times 2^{-(\frac{-20}{5})} \times 2^{1.5} \times 2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{5}{10}}$

$= 2^{-2.5+4+1.5-0.5-0.5} = 2^{2} = 4$

4) $3^{-\frac{1}{2}} \times 3^{-\frac{1}{4}} \times 3^{-\frac{1}{8}} \times 3^{-\frac{1}{16}} = 3^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}} = 3^{-\frac{15}{16}}$

$= \frac{1}{3^{\frac{15}{16}}} = \frac{1}{\sqrt[16]{3^{15}}}$

۵) $a^{-\frac{4}{3}} \times a^{\frac{5}{9}} \times \sqrt[3]{a^{-2}} \times a^{-\frac{4}{9}} \times \sqrt[9]{a^{2}}$

$$= a^{-\frac{4}{3}} \times a^{\frac{5}{9}} \times a^{-\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{4}{9}} \times a^{\frac{2}{9}}$$

$$= a^{-\frac{4}{3}+\frac{5}{9}-\frac{2}{3}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}} = a^{-\frac{15}{9}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[9]{a^{15}}} = \frac{1}{\sqrt[9]{a^{9} \times a^{6}}} = \frac{1}{a\sqrt[9]{a^{6}}}$$

۶) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}} \times b^{-\frac{2}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{a^{-8}} \times \frac{\sqrt[9]{b^{3}}}{\sqrt[3]{a^{4}}}$

$$= a^{-\frac{1}{3}} \times b^{-\frac{2}{3}} \times a^{\frac{2}{3}} \times a^{-\frac{8}{3}} \times b^{\frac{3}{9}} \times a^{-\frac{4}{3}}$$

$$= a^{-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-\frac{8}{3}-\frac{4}{3}} \times b^{-\frac{2}{3}+\frac{3}{9}} = a^{-\frac{11}{3}} \times b^{-\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{a^{11}}} \times \frac{1}{\sqrt[3]{b}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^{9} \times a^{2}}} \times \frac{1}{\sqrt[3]{b}} = \frac{1}{a^{3}\sqrt[3]{a^{2}b}}$$

نکته : با فرض $a \geq 0$ ، برابری $\sqrt[x]{a} = a^{\frac{1}{x}}$ وقتی برقرار است که دامنهٔ متغیر x مجموعهٔ عددهای طبیعی باشد $(x \in \mathbb{N})$.

تفریح اندیشهٔ ۳

معمای برج آب

مسأله زیر مسألهای حسابی است که بسیاری از خوانندگان را گیج می‌کند. اما در صورتی که با شکیبایی توضیح داده شود کودکی نیز آن را درک می‌کند.

از مخزن آبی، آب به طور دائم، با نرخ ثابت ۱۰۰۰ گالن در ساعت، به شهری وارد می‌شود.

از آنجا که مصرف آب در شبانه‌روز تغییر می‌کند، اضافهٔ آن، هنگامی که ورود آب از مصرف آن افزون می‌شود، در برجی، برای زمانی که مصرف آن از ورود آن فزونی می‌گیرد، ذخیره می‌شود.

تعداد گالنهای مصرف شده طی هشت دورهٔ سه‌ساعتی متوالی به طریق زیر است : ۲۰۰۰، ۵۰۰۰، ۴۵۰۰، ۲۵۰۰، ۴۰۰۰، ۵۰۰، ۴۰۰۰، و ۱۵۰۰ گالن.

با این فرض که آب در هر دورهٔ سه ساعتی با نرخ ثابتی مصرف می‌شود، ظرفیت برج چقدر باشد تا همواره جوابگوی وضعیت حاصل باشد؟

ترجمه: غلامرضا یاسی‌پور

جواب در صفحه ۸٦