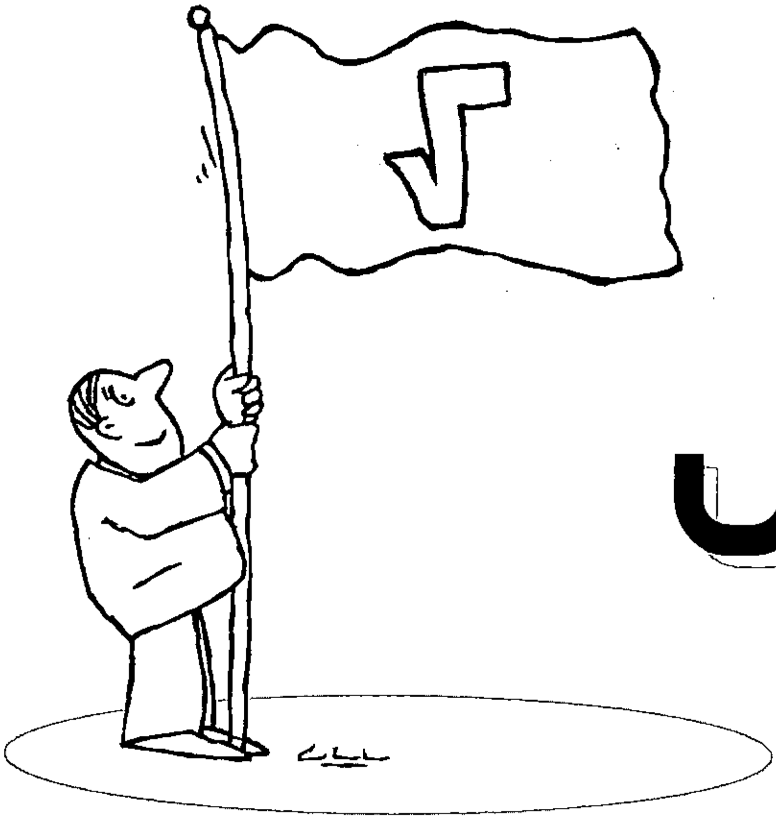

رادیکال

قسمت دوم

● سیّد محمّدرضا هاشمی موسوی

اعمال روی عددها و عبارتهای رادیکالی

۱) ضرب عددها و عبارتهای رادیکالی

می‌دانیم $20=4\times5=\sqrt{16}\times\sqrt{25}$ و $20=\sqrt{400}$، بنابراین:

$$\sqrt{16}\times\sqrt{25}=\sqrt{16\times25}=\sqrt{400}=20$$

و همچنین:

$-4=(-2)\times2=\sqrt[3]{-8}\times\sqrt[3]{8}$ و $-4=\sqrt[3]{-64}$ ، بنابراین:

$$\sqrt[3]{-8}\times\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{(-8)\times8}=\sqrt[3]{-64}=-4$$

به‌طورکلی: برای عددهای حقیقی a، b و عدد طبیعی n بزرگتر یا برابر ۲ $(n\geq2)$، اگر n عددی فرد باشد:

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab} \qquad (1)$$

و اگر n زوج باشد، a و b باید بزرگتر یا مساوی صفر باشند:

$$\sqrt[n]{|a|}\times\sqrt[n]{|b|}=\sqrt[n]{|ab|}$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید (از شماره‌های ۷ تا ۱۲ به عنوان تمرین است).

۱) $\sqrt{2}\times\sqrt{18}$

۲) $\sqrt{14}\times\sqrt{7}\times\sqrt{2}$

۳) $\sqrt[3]{9-\sqrt{17}}\times\sqrt[3]{9+\sqrt{17}}$

۴) $\sqrt{\frac{2}{3}}\times\sqrt{6}\times\sqrt{\frac{5}{7}}\times\sqrt{14}\times\sqrt{10}$

۵) $\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{9}\times\sqrt[5]{\frac{3}{5}}\times\sqrt[5]{\frac{5}{9}}\times\sqrt[5]{27}$

۶) $\sqrt[4]{10-\sqrt{19}}\times\sqrt[4]{10+\sqrt{19}}$

۷) $\sqrt[3]{a^2+b^2}\times\sqrt[3]{a^4+2a^2b^2+b^4}$

۸) $\sqrt[5]{x}\times\sqrt[5]{x^2}\times\sqrt[5]{x^2}$

۹) $\sqrt[3]{a^2bc}\times\sqrt[3]{ab^2c}\times\sqrt[3]{c}$

۱۰) $\sqrt[5]{a^2b^3}\times\sqrt[5]{a^3b^2}$

۱۱) $\sqrt[7]{a^2b^3c}\times\sqrt[7]{a^3b^2c^4}\times\sqrt[7]{a^2b^2c^2}$

۱۲) $\sqrt[3]{a-b}\times\sqrt[3]{a^2+ab+b^2}\times\sqrt[3]{(a^3-b^3)^2}$

حل:

۱) $\sqrt{2}\times\sqrt{18}=\sqrt{2\times18}=\sqrt{36}=6$

۲) $\sqrt{14}\times\sqrt{7}\times\sqrt{2}=\sqrt{14\times7\times2}=\sqrt{14\times14}$

$=\sqrt{14^2}=14$

۳) $\sqrt[3]{9-\sqrt{17}}\times\sqrt[3]{9+\sqrt{17}}=\sqrt[3]{(9-\sqrt{17})(9+\sqrt{17})}$

$=\sqrt[3]{9^2-17}=\sqrt[3]{81-17}=\sqrt[3]{64}=4$

۴) $\sqrt{\frac{2}{3}}\times\sqrt{6}\times\sqrt{\frac{5}{7}}\times\sqrt{14}\times\sqrt{10}=\sqrt{\frac{2}{3}\times6\times\frac{5}{7}\times14\times10}$

$=\sqrt{2\times2\times5\times2\times10}=\sqrt{20^2}=20$

۵) $\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{9}\times\sqrt[5]{\frac{3}{5}}\times\sqrt[5]{\frac{5}{9}}\times\sqrt[5]{27}$

$=\sqrt[5]{3\times9\times\frac{3}{5}\times\frac{5}{9}\times27}=\sqrt[5]{3\times3^2\times3\times3}=\sqrt[5]{3^5}=3$

۶) $\sqrt[4]{10-\sqrt{19}}\times\sqrt[4]{10+\sqrt{19}}=\sqrt[4]{(10-\sqrt{19})(10+\sqrt{19})}$

$=\sqrt[4]{100-19}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

۷) جواب: a^2+b^2

۸) جواب: x

۹) جواب: abc

۱۰) جواب: ab

۱۱) جواب: abc

۱۲) جواب: a^3-b^3

نکته: برای بردن عددی به داخل رادیکال که ضریب رادیکال است باید آن‌را به توان فرجهٔ رادیکال برسانیم و سپس آن‌را در عدد زیر رادیکال ضرب کنیم؛ بنابراین، اگر فرجه زوج باشد، باید عدد مورد نظر مثبت باشد؛ مانند: $\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times3}=2\sqrt{3}$.

مثال: در عبارتهای زیر، ضریب رادیکال را به داخل رادیکال برده‌ایم.

۱) $2\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{2^3\times3}=\sqrt[3]{8\times3}=\sqrt[3]{24}$

۲) $-5\sqrt{2}=-\sqrt{5^2\times2}=-\sqrt{50}$

۳) $3\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{3^4\times3}=\sqrt[4]{81\times3}=\sqrt[4]{243}$

۴) $-2\sqrt[4]{3}=-\sqrt[4]{2^4\times3}=-\sqrt[4]{48}$

۵) $x\sqrt[5]{x^3}=\sqrt[5]{x^5.x^3}=\sqrt[5]{x^8}$

۶) $xy^2\sqrt[7]{x^3y^4}=\sqrt[7]{(xy^2)^7x^3y^4}=\sqrt[7]{x^7y^{14}x^3y^4}$

$=\sqrt[7]{x^{10}y^{18}}$

۷) $-a^2\sqrt[4]{2a^2}=-\sqrt[4]{(a^2)^4(2a^2)}=-\sqrt[4]{a^8(2a^2)}=-\sqrt[4]{2a^{10}}$

توجه کنید که در عبارتهای $-5\sqrt{2}$ ، $-2\sqrt[4]{3}$ و $-a^2\sqrt[4]{2a^2}$ نمی‌توانیم (-5) ، (-2) و $(-a^2)$ را به زیر رادیکال ببریم؛ زیرا فرجهٔ رادیکالها زوج است و می‌دانیم از داخل رادیکال با فرجهٔ زوج عدد منفی بیرون نمی‌آید:

$$-5\sqrt{2}\neq\sqrt{(-5)^2(2)}\quad,\quad -2\sqrt[4]{3}\neq\sqrt[4]{(-2)^4(3)}$$

همچنین اگر a عدد حقیقی مخالف صفر باشد، داریم:

$$-a^2\sqrt[4]{2a^2}\neq\sqrt[4]{(-a^2)^4(2a^2)}\quad(a\in\mathbb{R}-\{0\})$$

به‌طورکلی: برای عددهای حقیقی a، b و عدد طبیعی n بزرگتر یا برابر ۲ $(n\geq2)$، اگر n عددی فرد باشد:

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^nb}\qquad(2)$$

و اگر n عددی زوج و $b\geq0$:

$$\sqrt[n]{a^nb}=|a|\sqrt[n]{b}$$

۲) تقسیم عددها و عبارتهای رادیکالی

می‌دانیم $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\frac{3}{2}$ و $\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$ ؛ بنابراین:

$$\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$$

و همچنین $\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}}=\frac{3}{4}$ و $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{3}{4}$ ؛ بنابراین:

$$\frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[3]{\frac{27}{64}}=\frac{3}{4}$$

به‌طور کلی :
برای عددهای حقیقی a، b و عدد طبیعی n بزرگتر یا برابر ۲ ($n \geq ۲$) و $b \neq ۰$ ، اگر n عددی فرد باشد :

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad (۳)$$

و اگر n عددی زوج و $\frac{a}{b} \geq ۰$:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}} \qquad (۴)$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید (۳ تا ۷ به‌عنوان تمرین است).

$$۱)\ \frac{\sqrt{۲۰}}{\sqrt{۵}} \qquad ۲)\ \frac{\sqrt{۳} \times \sqrt{۶}}{\sqrt{۲}} \qquad ۳)\ \frac{\sqrt{۱۵} \times \sqrt{۵۰} \times \sqrt{۳}}{\sqrt{۶} \times \sqrt{۳۰} \times \sqrt{۲}}$$

$$۴)\ \frac{\sqrt[۳]{۱۰۸}}{\sqrt[۳]{۴}} \qquad ۵)\ \sqrt[۵]{\frac{۳۲}{۲۴۳}} \qquad ۶)\ \frac{\sqrt[۹]{x^۲y^۳} \times \sqrt[۹]{xy^{۱۲}}}{\sqrt[۹]{xy^{۲۱}} \times \sqrt[۹]{x^{۲۰}y^۳}}$$

$$۷)\ \frac{x^۲\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x^{۱۰}}}$$

حل:

$$۱)\ \frac{\sqrt{۲۰}}{\sqrt{۵}} = \sqrt{\frac{۲۰}{۵}} = \sqrt{۴} = ۲$$

$$۲)\ \frac{\sqrt{۳} \times \sqrt{۶}}{\sqrt{۲}} = \frac{\sqrt{۱۸}}{\sqrt{۲}} = \sqrt{\frac{۱۸}{۲}} = \sqrt{۹} = ۳$$

۳) جواب: $\frac{۵}{۲}$ ۴) جواب: ۳

۵) جواب: $\frac{۲}{۳}$ ۶) جواب: $\frac{۱}{x^۲y}$ ۷) جواب: $\frac{۱}{x}$

در این‌جا، روش محاسبهٔ دو عبارت ۶ و ۷ را می‌آوریم :

$$۶)\ \frac{\sqrt[۹]{x^۲y^۳} \times \sqrt[۹]{x\,y^{۱۲}}}{\sqrt[۹]{xy^{۲۱}} \times \sqrt[۹]{x^{۲۰}y^۳}} = \frac{\sqrt[۹]{x^۲y^۳.xy^{۱۲}}}{\sqrt[۹]{xy^{۲۱}.x^{۲۰}y^۳}} = \sqrt[۹]{\frac{x^۳y^{۱۵}}{x^{۲۱}y^{۲۴}}}$$

$$= \sqrt[۹]{\frac{۱}{x^{۱۸}y^۹}} = \sqrt[۹]{\left(\frac{۱}{x^۲y}\right)^۹} = \frac{۱}{x^۲y}$$

$$۷)\ \frac{x^۲\sqrt[۳]{x}}{\sqrt[۳]{x^{۱۰}}} = \frac{\sqrt[۳]{(x^۲)^۳.x}}{\sqrt[۳]{x^{۱۰}}} = \frac{\sqrt[۳]{x^۶.x}}{\sqrt[۳]{x^{۱۰}}} = \sqrt[۳]{\frac{x^۷}{x^{۱۰}}}$$

$$= \sqrt[۳]{\frac{۱}{x^۳}} = \sqrt[۳]{(\frac{۱}{x})^۳} = \frac{۱}{x}$$

۳) جمع جبری عددها و عبارتهای رادیکالی

با مقایسهٔ تساویهای $۷x + ۴x = (۷+۴)x = ۱۱x$ و

$$۷\sqrt{۲} + ۴\sqrt{۲} = (۷+۴)\sqrt{۲} = ۱۱\sqrt{۲}$$

و تساویهای

$$۷y - ۴y = (۷-۴)y = ۳y$$

و

$$۷\sqrt[۷]{a} - ۴\sqrt[۷]{a} = (۷-۴)\sqrt[۷]{a} = ۳\sqrt[۷]{a}$$

ملاحظه می‌شود جمع جبری عددها و عبارتهای رادیکالی، شبیه جمع جبری یک‌جمله‌ایهاست ؛ یعنی جمع جبری عددها و عبارتهای رادیکالی را وقتی می‌توان به‌صورت ساده نوشت که عدد فرجهٔ رادیکال و عبارت زیر رادیکال با هم مساوی (یا عددها و عبارتهای رادیکالی با هم معادل) باشند.

مثال: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

$$۱)\ ۵\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۲} - ۴\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۲} - \sqrt{۲}$$

$$۲)\ ۷\sqrt[۴]{۴} - ۵\sqrt{۲} + ۴\sqrt{۲} - ۴\sqrt[۴]{۴}$$

$$۳)\ ۲\sqrt[۱۵]{۸} - ۳\sqrt[۵]{۲} - ۴\sqrt[۱۵]{۸} + ۵\sqrt[۵]{۲}$$

$$۴)\ ۵\sqrt[۳]{۵} + ۲\sqrt[۳]{۵} - ۱۴\sqrt[۹]{۱۲۵} + ۴\sqrt[۳]{۵} + \sqrt[۹]{۱۲۵}$$

حل:

$$۱)\ ۵\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۲} - ۴\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۲} - \sqrt{۲}$$

$$= (۵+۳-۴+۲-۱)\sqrt{۲} = ۵\sqrt{۲}$$

$$۲)\ ۷\sqrt[۴]{۴} - ۵\sqrt{۲} + ۴\sqrt{۲} - ۴\sqrt[۴]{۴}$$

$$= (۷-۴)\sqrt[۴]{۴} + (-۵+۴)\sqrt{۲} = ۳\sqrt[۴]{۴} - \sqrt{۲}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[۴]{۴}$ با $\sqrt{۲}$ ، یعنی :

$$\sqrt[۴]{۴} = \sqrt[۴]{۲^۲} = \sqrt{۲}$$

داریم :

$$۳\sqrt[۴]{۴} - \sqrt{۲} = ۳\sqrt{۲} - \sqrt{۲} = (۳-۱)\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲}$$

$$۳)\ ۲\sqrt[۱۵]{۸} - ۳\sqrt[۵]{۲} - ۴\sqrt[۱۵]{۸} + ۵\sqrt[۵]{۲}$$

$$= (۲-۴)\sqrt[۱۵]{۸} + (-۳+۵)\sqrt[۵]{۲} = -۲\sqrt[۱۵]{۸} + ۲\sqrt[۵]{۲}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[۱۵]{۸}$ با $\sqrt[۵]{۲}$ ، یعنی :

$\sqrt[15]{8} = \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[5]{2}$

داریم :

$-2\sqrt[15]{8}+2\sqrt[5]{2} = -2\sqrt[5]{2}+2\sqrt[5]{2}$

$=(-2+2)\sqrt[5]{2}=(0)\sqrt[5]{2}=0$

۴) $5\sqrt[3]{5}+2\sqrt[3]{5}-14\sqrt[9]{125}+4\sqrt[3]{5}+\sqrt[9]{125}$

$=(5+2+4)\sqrt[3]{5}+(-14+1)\sqrt[9]{125}$

$=11\sqrt[3]{5}-13\sqrt[9]{125}$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[9]{125}$ با $\sqrt[3]{5}$، یعنی :

$\sqrt[9]{125}=\sqrt[9]{5^3}=\sqrt[3]{5}$

داریم :

$11\sqrt[3]{5}-13\sqrt[9]{125}=11\sqrt[3]{5}-13\sqrt[3]{5}$

$=(11-13)\sqrt[3]{5}=-2\sqrt[3]{5}$

توجه داشته باشید که در جمع جبری، عبارتهای رادیکالی ابتدا باید عواملی را که توان کامل فرجهٔ رادیکال هستند از زیر رادیکال بیرون آورد و سپس عبارت را ساده کرد.

مثال: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید (۳، ۴ و ۵ به‌عنوان تمرین است).

۱) $\sqrt{54}+3\sqrt{6}-5\sqrt{24}+4\sqrt{6}-\sqrt{24}+\sqrt[4]{36}$

۲) $2\sqrt[3]{16}-7\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}+4\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}+\sqrt[6]{4}$

۳) $3\sqrt[4]{405}+5\sqrt[4]{5}-2\sqrt[4]{80}+4\sqrt[4]{5}-\sqrt[4]{405}+\sqrt[4]{80}$

۴) $\sqrt[3]{a^7}-2\sqrt[3]{a^4}+5\sqrt[3]{a^4}-\sqrt[3]{a^{10}}+3\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^{10}}-\sqrt[3]{a^7}$

۵) $\sqrt[5]{a^6b^6}-2b\sqrt[5]{a^6b}-5\sqrt[5]{a^6b^6}+3a\sqrt[5]{ab^6}+3ab\sqrt[5]{ab}$

حل:

۱) $\sqrt{54}+3\sqrt{6}-5\sqrt{24}+4\sqrt{6}-\sqrt{24}+\sqrt[4]{36}$

$=\sqrt{9\times6}+(3+4)\sqrt{6}+(-5-1)\sqrt{4\times6}+\sqrt[4]{36}$

$=3\sqrt{6}+7\sqrt{6}-6\times2\sqrt{6}+\sqrt[4]{36}$

$=(3+7-12)\sqrt{6}+\sqrt[4]{36}$

$=-2\sqrt{6}+\sqrt[4]{36}$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[4]{36}$ با $\sqrt{6}$، یعنی :

$\sqrt[4]{36}=\sqrt[4]{6^2}=\sqrt{6}$

داریم :

$-2\sqrt{6}+\sqrt[4]{36}=-2\sqrt{6}+\sqrt{6}=(-2+1)\sqrt{6}=-\sqrt{6}$

۲) $2\sqrt[3]{16}-7\sqrt[3]{2}+5\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{54}+4\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{16}+\sqrt[6]{4}$

$=(2+5-1)\sqrt[3]{16}+(-7+4)\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{54}+\sqrt[6]{4}$

$=6\sqrt[3]{2^3\times2}-3\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3^3\times2}+\sqrt[6]{4}$

$=6\times2\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{4}$

$=(12-3-3)\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{4}$

$=6\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{4}$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[6]{4}$ با $\sqrt[3]{2}$، یعنی :

$\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[3]{2}$

داریم :

$6\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{4}=6\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}=(6+1)\sqrt[3]{2}=7\sqrt[3]{2}$

جواب: ۳) $13\sqrt[4]{5}$ جواب: ۴) $6a\sqrt[3]{a}$ جواب: ۵) ۰

نکته: جمع دو عدد $\sqrt{5}$ و $\sqrt{3}$ به‌صورت $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ نوشته می‌شود. همچنین دو عدد $\sqrt{2}$ و $\sqrt[3]{2}$ به‌صورت $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$ جمع بسته می‌شوند.

توان رساندن عددها و عبارتهای رادیکالی

بنا به تعریف توان، می‌توان نوشت :

۱) $(\sqrt[5]{3})^4=\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{3}\times\sqrt[5]{3}=\sqrt[5]{3\times3\times3\times3}$

$=\sqrt[5]{3^4}$

و به‌طورکلی می‌توان نوشت :

$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ (اگر n زوج باشد، باید $a\geq0$)

مثال: $(\sqrt[3]{-4})^5=-8\sqrt[3]{2}$

حالت خاص: به مثالهای زیر توجه کنید :

۱) $(\sqrt{2})^2=\sqrt{2^2}=2$ ۲) $(\sqrt[5]{7})^5=\sqrt[5]{7^5}=7$

۳) $(\sqrt[3]{4})^3=\sqrt[3]{4^3}=4$ ۴) $(\sqrt[4]{3})^4=\sqrt[4]{3^4}=3$

> به‌طورکلی : برای عدد حقیقی a و عدد طبیعی n بزرگتر یا برابر ۲($n \geq 2$)، اگر n عددی فرد باشد :
>
> $$\sqrt[n]{a^n} = a \qquad (5)$$
>
> و اگر n عددی زوج باشد :
>
> $$\sqrt[n]{a^n} = |a| \ , \ (\sqrt[n]{|a|})^n = |a|$$

ریشهٔ مثبت یک عدد و یا عبارت رادیکالی

به مثالهای زیر توجه کنید :

$$1)\ \sqrt[2]{\sqrt[2]{81}} = \sqrt[2]{9} = 3$$

و

$$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

بنابراین :

$$\sqrt[2]{\sqrt[2]{81}} = \sqrt[4]{81}$$

همچنین

$$2)\ \sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

و

$$\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

بنابراین :

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[6]{64}$$

در مثال ۱، ملاحظه می‌شود که ریشهٔ دوم $\sqrt[2]{81}$ برابر با ریشهٔ چهارم ۸۱ است.

در مثال ۲، مشاهده می کنید که ریشهٔ سوم $\sqrt{64}$ برابر با ریشهٔ ششم ۶۴ است.

> به‌طورکلی :
>
> $$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \qquad (6)$$
>
> ریشهٔ mام $\sqrt[n]{a}$ ، برابر با ریشهٔ mnام a است.
>
> m و n عددهای طبیعی و $m \geq 2$ و $n \geq 2$ می‌باشند و $a \in \mathbb{R}$ است.
>
> اگر m یا n و یا هر دو زوج باشند، a نمی‌تواند منفی باشد.

نکته: در حالت کلی، اگر $a \geq 0$ و تعداد رادیکالها n باشد :

$$\underbrace{\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\ldots\sqrt{a}}}}}_{\text{n مرتبه}} = \sqrt[2^n]{a^{2^n-1}} \qquad (a \geq 0)$$

مثال:

$$1)\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}} = \sqrt[2^4]{2^{2^4-1}} = \sqrt[16]{2^{16-1}} = \sqrt[16]{2^{15}}$$

$$2)\ \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}}}} = \sqrt[2^6]{3^{2^6-1}} = \sqrt[64]{3^{63}}$$

با توجه به مثالهای اخیر، در حالت کلی خواهیم داشت :

$$\sqrt[k]{\sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}}}} = \sqrt[kpqmn]{a}$$

m،n، q ،p و k عددهای طبیعی بزرگتر یا برابر ۲ می‌باشند ؛ که اگر لااقل یکی از آنها زوج باشد، a نمی‌تواند منفی باشد. برای مثال داریم :

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{75}}}}}} = \sqrt[1800]{75} \ , \ \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt{2}}}}} = \sqrt[120]{2}$$

توجه: می‌دانیم :

$$\sqrt[2\times2]{4^{1\times2}} = \sqrt[4]{4^2} = \sqrt[4]{2^4} = 2 \ , \ \sqrt{4^1} = 2$$

بنابراین :

$$\sqrt{4} = \sqrt[2\times2]{4^{1\times2}}$$

همچنین $\sqrt[5]{a^5} = a$ و $a = \sqrt[15]{a^{15}} = \sqrt[5\times3]{(a^5)^3}$ ، بنابراین :

$$\sqrt[5]{a^5} = \sqrt[5\times3]{a^{5\times3}}$$

> به‌طورکلی :برای عدد حقیقی a و عدد طبیعی n بزرگتر یا برابر ۲($n \geq 2$)، اگر p عددی فرد باشد :
>
> $$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \qquad (7)$$
>
> اگر n زوج باشد، a^m نمی‌تواند منفی باشد.
>
> و اگر p عددی زوج باشد : $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{|a|^m}$

یعنی: عدد فرجهٔ رادیکال و توان عبارت زیر رادیکال را می‌توانیم در یک عدد طبیعی ضرب یا بر یک عدد طبیعی تقسیم کنیم.

مثال:

۱) $\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[7\times3]{2^{7\times2}}=\sqrt[21]{2^{14}}$

۲) $\sqrt[4]{2x^2}=\sqrt[2\times4]{(2x^2)^2}=\sqrt[8]{4x^4}$

۳) $\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[3\times4]{3^4}=\sqrt[3]{3}$

۴) $\sqrt[15]{\sqrt[3]{a^9}}=\sqrt[45]{a^9}=\sqrt[9\times5]{a^9}=\sqrt[5]{a}$

نکتهٔ مهم

در مورد تقسیم فرجهٔ رادیکال و توان عبارت زیر رادیکال بر یک عدد زوج یا ضرب فرجهٔ رادیکال و توان عدد زیر رادیکال در یک عدد زوج، توجه به علامت عدد زیر رادیکال بسیار ضروری است.

مثال:

۱) $\sqrt[4]{(-9)^2}=\sqrt[4]{81}=3$ یا $\sqrt[4]{(-9)^2}=\sqrt{|-9|}=\sqrt{9}=3$

یعنی: $\sqrt[4]{(-9)^2}\neq\sqrt{-9}$

۲) $\sqrt[3]{-27}=-3$

همچنین: $\sqrt[3]{-27}\neq\sqrt[3\times2]{(-27)^2}$

از خاصیتهای اخیر، برای ضرب یا تقسیم عبارتهای رادیکالی با فرجه‌های نابرابر استفاده می‌کنند؛ بدین ترتیب که ابتدا فرجه‌های رادیکالها را به فرجهٔ مشترک تبدیل کرده و سپس عمل ضرب یا تقسیم را انجام می‌دهیم.

مثال:

۱) $\sqrt[4]{2}\times\sqrt{2}=\sqrt[4]{2}\times\sqrt[2\times2]{2^2}=\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{4}$

$=\sqrt[4]{2\times4}=\sqrt[4]{8}$

۲) $2\sqrt[3]{-4}\times3\sqrt{2}=-2\sqrt[3]{4}\times3\sqrt{2}$

$=-2\sqrt[3\times2]{4^2}\times3\sqrt[2\times3]{2^3}$

$=-2\sqrt[6]{4^2}\times3\sqrt[6]{2^3}=-6\sqrt[6]{4^2\times2^3}$

$=-6\sqrt[6]{2^4\times2^3}=-6\sqrt[6]{2^7}$

$=-6\sqrt[6]{2^6\times2}=-6\times2\sqrt[6]{2}=-12\sqrt[6]{2}$

۳) $\sqrt[3]{4}\div\sqrt[5]{8}=\sqrt[3\times5]{4^5}\div\sqrt[5\times3]{8^3}=\sqrt[15]{4^5}\div\sqrt[15]{8^3}$

$=\sqrt[15]{4^5\div8^3}=\sqrt[15]{2^{10}\div2^9}$

$=\sqrt[15]{2^{10-9}}=\sqrt[15]{2}$

۴) $\sqrt[4]{36}\div\sqrt{3}=\sqrt[4]{36}\div\sqrt[2\times2]{3^2}=\sqrt[4]{36}\div\sqrt[4]{9}$

$=\sqrt[4]{36\div9}=\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2}$

۲) $5\sqrt{2}\times2\sqrt[3]{-2}$

۳) $\sqrt[5]{8}\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2}$

۴) $5\sqrt[3]{25}\times2\sqrt{3\sqrt{4}}$

۵) $\sqrt{15}\div\sqrt[3]{5}$

۶) $\sqrt[4]{225}\div\sqrt{25}$

۷) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\times\sqrt[3]{a^2\sqrt[5]{a}}$

۸) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\div\sqrt[7]{a^3}}{\sqrt[21]{a^{12}}}$

حل:

۱) $\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2}=\sqrt[3\times2]{4^2}\times\sqrt[2\times3]{2^3}=\sqrt[6]{4^2}\times\sqrt[6]{2^3}$

$=\sqrt[6]{4^2\times2^3}=\sqrt[6]{2^4\times2^3}$

$=\sqrt[6]{2^7}=\sqrt[6]{2^6\times2}=2\sqrt[6]{2}$

۲) $5\sqrt{2}\times2\sqrt[3]{-2}=-5\sqrt{2}\times2\sqrt[3]{2}=-5\sqrt[6]{2^3}\times2\sqrt[6]{2^2}$

$=-10\sqrt[6]{2^3\times2^2}$

$=-10\sqrt[6]{2^5}=-10\sqrt[6]{32}$

۳) $\sqrt[5]{8}\times\sqrt[3]{4}\times\sqrt{2}=\sqrt[30]{8^6}\times\sqrt[30]{4^{10}}\times\sqrt[30]{2^{15}}$

$=\sqrt[30]{8^6\times4^{10}\times2^{15}}$

$=\sqrt[30]{2^{18}\times2^{20}\times2^{15}}=\sqrt[30]{2^{53}}$

$=\sqrt[30]{2^{30}\times2^{23}}=2\sqrt[30]{2^{23}}$

۴) $5\sqrt[3]{25}\times2\sqrt{3\sqrt{4}}=5\sqrt[3]{25}\times2\sqrt{3\times2}$

$=5\sqrt[3]{25}\times2\sqrt{6}$

$=5\sqrt[6]{25^2}\times2\sqrt[6]{6^3}=10\sqrt[6]{25^2\times6^3}$

$=10\sqrt[6]{135000}$

۵) $\sqrt{15}\div\sqrt[3]{5}=\sqrt[6]{15^3}\div\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[6]{15^3\div5^2}$

$=\sqrt[6]{\frac{5^3\times3^3}{5^2}}=\sqrt[6]{5\times3^3}=\sqrt[6]{5\times27}$

$=\sqrt[6]{135}$

۶) $\sqrt[4]{225}\div\sqrt{25}=\sqrt[4]{225}\div\sqrt[4]{25^2}=\sqrt[4]{225\div25^2}$

$$=\sqrt[4]{\frac{5^2\times 3^2}{5^4}}=\sqrt[4]{\frac{3^2}{5^2}}=\sqrt[4]{\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{0/6}$$

۷) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\times\sqrt[3]{a^2\sqrt[5]{a}}=\sqrt[3]{a^3\sqrt[3]{a}\times\sqrt[5]{a}}$

$$=a\sqrt[3]{\sqrt[15]{a^5}\times\sqrt[15]{a^3}}$$

$$=a\sqrt[3]{\sqrt[15]{a^5.a^3}}=a\sqrt[3]{\sqrt[15]{a^8}}$$

$$=a\sqrt[45]{a^8}$$

۸) $\frac{\sqrt[3]{a^2}\div\sqrt[7]{a^3}}{\sqrt[21]{a^{12}}}=\frac{\sqrt[21]{(a^2)^7}\div\sqrt[21]{(a^3)^3}}{\sqrt[21]{a^{12}}}$

$$=\sqrt[21]{\frac{a^{14}\div a^9}{a^{12}}}=\sqrt[21]{\frac{a^5}{a^{12}}}=\sqrt[21]{\frac{1}{a^7}}$$

$$=\sqrt[21]{\left(\frac{1}{a}\right)^7}=\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$$

مسأله مسابقه‌ای

(ابن هیثم قرن یازدهم، فیبوناتچی اوایل قرن سیزدهم).
از سبدی هر بار ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ عدد تخم‌مرغ بیرون می‌آوریم. اما در هر بار، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ عدد تخم‌مرغ در سبد می‌ماند. اگر هر بار، ۷ تخم‌مرغ را بیرون بیاوریم، تخم‌مرغی در سبد نمی‌ماند. حداقل، چند تخم‌مرغ ممکن است در سبد باشد.

حل مسائل مسابقه‌ای برهان ۲۹

مسأله: باقیماندهٔ تقسیم عدد زیر را بر ۵ حساب کنید:

$$S=1^n+2^n+3^n+4^n+5^n+6^n+7^n+8^n$$

حل: می‌دانیم اگر n فرد باشد x^n+y^n بر $x+y$ بخش‌پذیر است. پس 2^n+8^n ، 3^n+7^n و 6^n+4^n بترتیب به ۸+۲ ، ۷+۳ و ۶+۴، یعنی ۱۰ بخش‌پذیرند. پس ماندهٔ تقسیم S بر ۵ مساوی است با 1^n، یعنی ۱.

اگر n زوج باشد فرض می‌کنیم $n=2k$ ، آن‌گاه داریم:

$$S=1+4^k+9^k+16^k+25^k+36^k+49^k+64^k$$

اولاً اگر k زوج باشد هریک از جمله‌ها به صورت $(5m+1)$ هستند بجز 25^k؛ پس ماندهٔ تقسیم S بر ۵ مساوی است با ماندهٔ تقسیم: $7=1+1+1+1+1+1+1$ بر ۵، یعنی ۲.

ثانیاً اگر k فرد باشد عددهای 4^k ، 9^k، 49^k و 64^k به صورت $(5m-1)$ و عددهای 16^k و 36^k به صورت $(5m+1)$ می‌باشند در نتیجه ماندهٔ تقسیم S بر ۵ مساوی است با:

$$1-1-1+1+0+1-1-1=-1$$

و یا: $4=(-1)+5$