



رادیکال

(قسمت دوم)

● سید محمدرضا هاشمی موسوی

◀ اعمال روی عددها و عبارتهای رادیکالی

(۱) ضرب عددها و عبارتهای رادیکالی

می‌دانیم $\sqrt{400} = 20$ و $\sqrt{16 \times 25} = 4 \times 5 = 20$ ، بنابراین:

$$\sqrt{16 \times 25} = \sqrt{16 \times 25} = \sqrt{400} = 20$$

همچنین:

$$\sqrt{-64} = -4, \quad \sqrt{-8} \times \sqrt{8} = (-2) \times 2 = -4$$

بنابراین:

$$\sqrt{-8} \times \sqrt{8} = \sqrt{(-8) \times 8} = \sqrt{-64} = -4$$

به‌طور کلی: برای عددهای حقیقی a و b و عدد طبیعی n بزرگتر

یا مساوی $2 (n \geq 2)$ ، اگر n عددی فرد باشد:

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad (1)$$

و اگر n زوج باشد، a و b باید بزرگتر یا مساوی صفر باشند:

$$\sqrt[n]{|a|} \times \sqrt[n]{|b|} = \sqrt[n]{|ab|}$$

مثال ۸: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

۱) $\sqrt{2} \times \sqrt{18}$

۲) $\sqrt{14} \times \sqrt{7} \times \sqrt{2}$

۳) $\sqrt{9 - \sqrt{17}} \times \sqrt{9 + \sqrt{17}}$

۴) $\sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{6} \times \sqrt{\frac{5}{7}} \times \sqrt{14} \times \sqrt{10}$

۵) $\sqrt[5]{3} \times \sqrt[5]{9} \times \sqrt[5]{\frac{2}{5}} \times \sqrt[5]{\frac{5}{9}} \times \sqrt[5]{27}$

۶) $\sqrt{10 - \sqrt{19}} \times \sqrt{10 + \sqrt{19}}$

۷) $\sqrt{a^2 + b^2} \times \sqrt{a^2 + 2a^2b^2 + b^2}$

۸) $\sqrt[5]{x} \times \sqrt[5]{x^2} \times \sqrt[5]{x^2}$

۹) $\sqrt{a^2bc} \times \sqrt{ab^2c} \times \sqrt{c}$

۱۰) $\sqrt{a^2b^2} \times \sqrt{a^2b^2}$

۱۱) $\sqrt{a^2b^2c} \times \sqrt{a^2b^2c^2} \times \sqrt{a^2b^2c^2}$

۱۲) $\sqrt{a-b} \times \sqrt{a^2+ab+b^2} \times \sqrt{(a^2-b^2)^2}$

حل:

۱) $\sqrt{2} \times \sqrt{18} = \sqrt{2 \times 18} = \sqrt{36} = 6$

۲) $\sqrt{14} \times \sqrt{7} \times \sqrt{2} = \sqrt{14 \times 7 \times 2} = \sqrt{14 \times 14} = \sqrt{14^2} = 14$

۳) $\sqrt{9 - \sqrt{17}} \times \sqrt{9 + \sqrt{17}}$

$$= \sqrt{(9 - \sqrt{17})(9 + \sqrt{17})}$$

$$= \sqrt{9^2 - 17} = \sqrt{81 - 17} = \sqrt{64} = 8$$

۴) $\sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{6} \times \sqrt{\frac{5}{7}} \times \sqrt{14} \times \sqrt{10}$

$$\begin{aligned} ۵) \sqrt[2]{(a+b)^2} &= \sqrt[2]{(a+b)^2(a+b)} \\ &= \sqrt[2]{(a+b)^2} \times \sqrt[2]{(a+b)} = (a+b) \sqrt[2]{a+b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۶) \sqrt[5]{a^5 b^5 c^{10}} &= \sqrt[5]{a^5 a^2 \cdot b^5 \cdot b \cdot (c^2)^5} \\ &= \sqrt[5]{a^5 b^5 (c^2)^5} \times \sqrt[5]{a^2 b} = abc^2 \sqrt[5]{a^2 b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۷) \sqrt[7]{x^7 y^7 z^5} &= \sqrt[7]{x^7 \cdot x^2 \cdot y^7 \cdot y^2 \cdot z^5} \\ &= \sqrt[7]{x^7 \cdot y^7 \cdot z^5} \end{aligned}$$

با فرض $x \geq 0$ و $y \geq 0$ ، می توان نوشت:

$$\sqrt[7]{x^7 y^7 z^5} = xy \sqrt[7]{x^2 y^2 z^5}$$

(زیرا از داخل رادیکال با فرجه زوج عدد منفی بیرون نمی آید)

$$\begin{aligned} ۸) \sqrt[6]{x^{12} y^{12} z^{18}} &= \sqrt[6]{x^{12} x^2 \cdot y^{12} \cdot y^2 \cdot z^{12} \cdot z^6} \\ &= \sqrt[6]{x^{12} y^{12} z^{12}} \times \sqrt[6]{x^2 y^2 z^6} \\ &= \sqrt[6]{(x^2)^6 (y^2)^6 (z^2)^6} \times \sqrt[6]{x^2 y^2 z^6} = x^2 y^2 z^2 \sqrt[6]{x^2 y^2 z^6} \end{aligned}$$

با توجه به تساویهای اخیر به این قانون پی می بریم که اگر بخواهیم در عبارت $\sqrt[2]{273}$ عدد ۲ که ضریب $\sqrt[2]{3}$ است را به داخل رادیکال ببریم، باید آن را به توان ۲ (فرجه رادیکال) برسانیم و سپس آن را در عدد زیر رادیکال ضرب کنیم.

مثال ۱۰:

$$۱) 2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \times 3} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{12}$$

$$۲) 2\sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2^5 \times 2} = \sqrt[5]{32 \times 2} = \sqrt[5]{64}$$

$$۳) 2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} = \sqrt[3]{8 \times 3} = \sqrt[3]{24}$$

$$۴) 3\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3^4 \times 3} = \sqrt[4]{81 \times 3} = \sqrt[4]{243}$$

$$۵) -5\sqrt{2} = -\sqrt{5^2 \times 2} = -\sqrt{50}$$

$$۶) -2\sqrt[3]{3} = -\sqrt[3]{2^3 \times 3} = -\sqrt[3]{24}$$

$$۷) x\sqrt[5]{x^5} = \sqrt[5]{x^5 \times x^5} = \sqrt[5]{x^{10}}$$

$$\begin{aligned} ۸) xy^2 \sqrt[5]{x^5 y^5} &= \sqrt[5]{(xy^2)^5 x^5 y^5} \\ &= \sqrt[5]{x^5 y^5 x^5 y^5} = \sqrt[5]{x^{10} y^{10}} \end{aligned}$$

$$۹) -a^2 \sqrt[3]{2a^3} = -\sqrt[3]{(a^2)^3 (2a^3)} = -\sqrt[3]{a^6 (2a^3)} = -\sqrt[3]{2a^9}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{2}{3} \times 6 \times \frac{5}{3} \times 12 \times 10} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 5 \times 2 \times 10} = \sqrt[3]{200} = 20$$

$$\begin{aligned} ۵) \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[5]{\frac{3}{5}} \times \sqrt[5]{\frac{5}{9}} \times \sqrt[3]{27} &= \sqrt[5]{3 \times 9 \times \frac{3}{5} \times \frac{5}{9} \times 27} = \sqrt[5]{3 \times 3^2 \times 3 \times 3} = \sqrt[5]{3^6} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۶) \sqrt[2]{100-19} \times \sqrt[2]{100+19} &= \sqrt{(100-19)(100+19)} \\ &= \sqrt{100^2 - 19^2} = \sqrt{81} = \sqrt{3^2} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۷) \sqrt{a^2+b^2} \times \sqrt{a^2+2a^2b^2+b^2} &= \sqrt{(a^2+b^2)(a^2+2a^2b^2+b^2)} \\ &= \sqrt{(a^2+b^2)(a^2+b^2)^2} = \sqrt{(a^2+b^2)^3} = (a^2+b^2) \sqrt{a^2+b^2} \end{aligned}$$

$$۸) \sqrt[5]{x} \times \sqrt[5]{x^2} \times \sqrt[5]{x^3} = \sqrt[5]{x \times x^2 \times x^3} = \sqrt[5]{x^6} = x$$

$$\begin{aligned} ۹) \sqrt{a^2bc} \times \sqrt{ab^2c} \times \sqrt{c} &= \sqrt{a^2bc \times ab^2c \times c} \\ &= \sqrt{a^2b^3c^3} = \sqrt{(abc)^2} = abc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۰) \sqrt[5]{a^2b^2} \times \sqrt[5]{a^3b^2} &= \sqrt[5]{a^2b^2 \times a^3b^2} \\ &= \sqrt[5]{a^5b^4} = \sqrt[5]{(ab)^5} = ab \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۱) \sqrt[3]{a^2b^2c} \times \sqrt[3]{a^2b^2c^2} \times \sqrt[3]{a^2b^2c^2} &= \sqrt[3]{a^2b^2c \times a^2b^2c^2 \times a^2b^2c^2} \\ &= \sqrt[3]{a^6b^6c^5} = \sqrt[3]{(abc)^6} = abc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۱۲) \sqrt{a-b} \times \sqrt{a^2+ab+b^2} \times \sqrt{(a^2-b^2)^2} &= \sqrt{(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-b^2)^2} \\ &= \sqrt{(a^2-b^2)^3} = (a^2-b^2) \sqrt{a^2-b^2} \end{aligned}$$

توجه داشته باشید که از رابطه (۱) می توان برای ساده کردن عددها و عبارتهای رادیکالی و یا بیرون آوردن عواملی از زیر رادیکال استفاده کرد:

مثال ۹:

$$۱) \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$۲) \sqrt[5]{64} = \sqrt[5]{32 \times 2} = \sqrt[5]{32} \times \sqrt[5]{2} = \sqrt[5]{2^5} \times \sqrt[5]{2} = 2\sqrt[5]{2}$$

$$۳) \sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \times 3} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3} \times \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3}$$

$$۴) \sqrt[4]{243} = \sqrt[4]{81 \times 3} = \sqrt[4]{81} \times \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3^4} \times \sqrt[4]{3} = 3\sqrt[4]{3}$$

$$= 6\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[3]{4}$ با $\sqrt[3]{2}$ ، یعنی:

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{2}$$

داریم:

$$6\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} = 6\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = (6+1)\sqrt[3]{2} = 7\sqrt[3]{2}$$

$$۳) ۳\sqrt[3]{۴۰۰۵} + ۵\sqrt[3]{۵} - ۲\sqrt[3]{۸۰} + ۴\sqrt[3]{۵} - \sqrt[3]{۴۰۰۵} + \sqrt[3]{۸۰}$$

$$= (۳-۱)\sqrt[3]{۴۰۰۵} + (۵+۴)\sqrt[3]{۵} + (-۲+۱)\sqrt[3]{۸۰}$$

$$= ۲\sqrt[3]{۳^۳ \times ۵} + ۹\sqrt[3]{۵} - \sqrt[3]{۲^۳ \times ۵}$$

$$= ۲ \times ۳\sqrt[3]{۵} + ۹\sqrt[3]{۵} - ۲\sqrt[3]{۵}$$

$$= (۶+۹-۲)\sqrt[3]{۵}$$

$$= ۱۳\sqrt[3]{۵}$$

$$۴) \sqrt[3]{a^۷} - ۲\sqrt[3]{a^۴} + ۵\sqrt[3]{a^۴} - \sqrt[3]{a^{۱۰}} + ۳\sqrt[3]{a^۴} + \sqrt[3]{a^{۱۰}} - \sqrt[3]{a^۷}$$

$$= (۱-۱)\sqrt[3]{a^۷} + (-۲+۵+۳)\sqrt[3]{a^۴} + (-۱+۱)\sqrt[3]{a^{۱۰}}$$

$$= (۰)\sqrt[3]{a^۷} + ۶\sqrt[3]{a^۴} + (۰)\sqrt[3]{a^{۱۰}}$$

$$= ۶a\sqrt[3]{a}$$

$$۵) \sqrt[۵]{a^۶b^۶} - ۲b\sqrt[۵]{a^۶b} - ۵\sqrt[۵]{a^۶b^۶} + ۳a\sqrt[۵]{ab^۶} + ۳ab\sqrt[۵]{ab}$$

$$= (۱-۵)\sqrt[۵]{a^۵b^۵} \cdot ab - ۲b\sqrt[۵]{a^۵} \cdot ab + ۳a\sqrt[۵]{ab^۵} \cdot b + ۳ab\sqrt[۵]{ab}$$

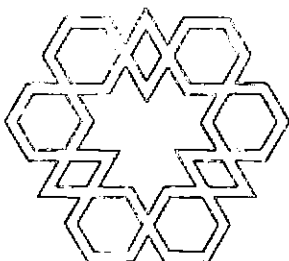
$$= -۴ab\sqrt[۵]{ab} - ۲ab\sqrt[۵]{ab} + ۳ab\sqrt[۵]{ab} + ۳ab\sqrt[۵]{ab}$$

$$= (-۴-۲+۳+۳)ab\sqrt[۵]{ab}$$

$$= (۰)ab\sqrt[۵]{ab}$$

$$= ۰$$

* تذکر: جمع دو عدد $\sqrt{5}$ و $\sqrt{3}$ به صورت $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ نوشته می‌شود. همچنین دو عدد $\sqrt{2}$ و $\sqrt{2}$ به صورت $\sqrt{2} + \sqrt{2}$ نوشته می‌شود.



$$= (۵+۲+۴)\sqrt[3]{۵} + (-۱۴+۱)\sqrt[3]{۱۲۵}$$

$$= ۱۱\sqrt[3]{۵} - ۱۳\sqrt[3]{۱۲۵}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[3]{۱۲۵}$ با $\sqrt[3]{۵}$ ، یعنی:

$$\sqrt[3]{۱۲۵} = \sqrt[3]{۵^3} = \sqrt[3]{۵}$$

داریم:

$$۱۱\sqrt[3]{۵} - ۱۳\sqrt[3]{۱۲۵} = ۱۱\sqrt[3]{۵} - ۱۳\sqrt[3]{۵}$$

$$= (۱۱-۱۳)\sqrt[3]{۵} = -۲\sqrt[3]{۵}$$

توجه داشته باشید که در جمع جبری عبارتهای رادیکالی ابتدا باید عواملی که توان کامل فرجه رادیکال هستند را از زیر رادیکال بیرون آورد و سپس عبارت را ساده کرد.

مثال ۱۳: حاصل عبارتهای زیر را حساب کنید.

$$۱) \sqrt{۵۴} + ۳\sqrt{۶} - ۵\sqrt{۲۴} + ۴\sqrt{۶} - \sqrt{۲۴} + \sqrt[3]{۳۶}$$

$$۲) ۲\sqrt[3]{۱۶} - ۷\sqrt[3]{۲} + ۵\sqrt[3]{۱۶} - \sqrt[3]{۵۴} + ۴\sqrt[3]{۲} - \sqrt[3]{۱۶} + \sqrt[3]{۴}$$

$$۳) ۳\sqrt[3]{۴۰۰۵} + ۵\sqrt[3]{۵} - ۲\sqrt[3]{۸۰} + ۴\sqrt[3]{۵} - \sqrt[3]{۴۰۰۵} + \sqrt[3]{۸۰}$$

$$۴) \sqrt[3]{a^۷} - ۲\sqrt[3]{a^۴} + ۵\sqrt[3]{a^۴} - \sqrt[3]{a^{۱۰}} + ۳\sqrt[3]{a^۴} + \sqrt[3]{a^{۱۰}} - \sqrt[3]{a^۷}$$

$$۵) \sqrt[۵]{a^۶b^۶} - ۲b\sqrt[۵]{a^۶b} - ۵\sqrt[۵]{a^۶b^۶} + ۳a\sqrt[۵]{ab^۶} + ۳ab\sqrt[۵]{ab}$$

حل:

$$۱) \sqrt{۵۴} + ۳\sqrt{۶} - ۵\sqrt{۲۴} + ۴\sqrt{۶} - \sqrt{۲۴} + \sqrt[3]{۳۶}$$

$$= \sqrt{۹ \times ۶} + (۳+۴)\sqrt{۶} + (-۵-۱)\sqrt{۴ \times ۶} + \sqrt[3]{۳۶}$$

$$= ۳\sqrt{۶} + ۷\sqrt{۶} - ۶ \times ۲\sqrt{۶} + \sqrt[3]{۳۶}$$

$$= (۳+۷-۱۲)\sqrt{۶} + \sqrt[3]{۳۶}$$

$$= -۲\sqrt{۶} + \sqrt[3]{۳۶}$$

با توجه به معادل بودن عدد $\sqrt[3]{۳۶}$ با $\sqrt{۶}$ ، یعنی:

$$\sqrt[3]{۳۶} = \sqrt[3]{۶^2} = \sqrt{۶}$$

داریم:

$$-۲\sqrt{۶} + \sqrt[3]{۳۶} = -۲\sqrt{۶} + \sqrt{۶} = (-۲+۱)\sqrt{۶} = -\sqrt{۶}$$

$$۲) ۲\sqrt[3]{۱۶} - ۷\sqrt[3]{۲} + ۵\sqrt[3]{۱۶} - \sqrt[3]{۵۴} + ۴\sqrt[3]{۲} - \sqrt[3]{۱۶} + \sqrt[3]{۴}$$

$$= (۲+۵-۱)\sqrt[3]{۱۶} + (-۷+۴)\sqrt[3]{۲} - \sqrt[3]{۵۴} + \sqrt[3]{۴}$$

$$= ۶\sqrt[3]{۲^۳ \times ۲} - ۳\sqrt[3]{۲} - \sqrt[3]{۳^۳ \times ۲} + \sqrt[3]{۴}$$

$$= ۶ \times ۲\sqrt[3]{۲} - ۳\sqrt[3]{۲} - ۳\sqrt[3]{۲} + \sqrt[3]{۴}$$

$$= (۱۲-۳-۳)\sqrt[3]{۲} + \sqrt[3]{۴}$$