رابطه ـ خواص رابطه‌ها

(قابل استفادهٔ دانش‌آموزان دوم ریاضی فیزیک و ریاضیات ۳ و جبر و احتمال سال سوم ریاضی نظام جدید)

● حمیدرضا امیری

در شمارهٔ ۱۱ «برهان» تعریف عمل حاصل ضرب‌دکارتی را بیان کرده و خواص این عمل را بررسی کردیم. بویژه دیدیم که برای هر دو مجموعهٔ دلخواه مانند: A و B،

$$(A \times B) = \{(x, y) \mid x \in A \;\&\; y \in B\}$$

همچنین مشاهده کردید که اگر A یک مجموعهٔ m عضوی و B یک مجموعهٔ k عضوی باشد، در این‌صورت $(A \times B)$ دارای mk عضو[1] خواهد بود که نتیجه می‌گیریم $(A \times B)$ دارای ۲^{mk} زیر مجموعه است. به عنوان مثال: اگر $n(A) = ۳$ و $n(B) = ۲$، آنگاه $n(A \times B) = ۶$، پس $(A \times B)$ دارای $۶۴ = ۲^{۶}$ زیر مجموعه است، که خودِ $(A \times B)$ و $\varnothing$ نیز جزو این زیرمجموعه‌ها هستند.
حال رابطه را تعریف می‌کنیم:

هرگاه A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، در این صورت هر زیر مجموعه از $(A \times B)$ را یک رابطه از A در B می‌نامند. پس طبق مطالب فوق اگر $(A \times B)$ دارای n عضو باشد، ۲^{n} زیرمجموعه دارد و بنابر تعریف رابطه به همین تعداد یعنی؛ ۲^{n} رابطه از A در B می‌توان تعریف کرد و $\varnothing$ نیز یکی از این رابطه‌ها است که به رابطهٔ مُمتنع معروف است.

مثال ۱ ـ فرض کنیم: $A = \{۲\}$ و $B = \{۴,۳\}$ بنابراین:

$$A \times B = \{(۲,۴) \text{ و } (۲,۳)\}$$

و بنابراین با توجه به تعریف رابطهٔ هریک از مجموعه‌های زیر، یک رابطه از A در B

$R_1 = \{(۲,۴)\}$ و $R_2 = \{(۲,۳)\}$ و $R_3 = \{(۲,۴), (۲,۳)\}$ و

$R_4 = \varnothing$

قرارداد ۱ ـ هرگاه رابطهٔ R از A در A تعریف شود یعنی؛ هرگاه $R \subset (A \times A)$ در این صورت می‌گوییم: رابطهٔ R روی A تعریف شده است.

قرارداد ۲ ـ هرگاه رابطهٔ R مفروض باشد و داشته‌باشیم $(x,y) \in R$ می‌توانیم از نماد xRy استفاده کنیم یعنی:

$$(x,y) \in R \iff xRy$$

$$(x,y) \notin R \iff x\not{R}y$$

مثال ۲ ـ رابطه‌ای چون R روی $IN^{۲} = IN \times IN$ تعریف کنید به شرطی که دارای ۳ عضو باشد.
طبق قرارداد ۱، رابطه روی $IN^{۲}$ یعنی؛ از $IN^{۲}$ در $IN^{۲}$ پس همواره باید $R \subset IN^{۲} \times IN^{۲}$ و بنابراین اعضای R می‌بایست زوج مرتبهایی باشند که مؤلّفهٔ آن خود یک زوج مرتب است زیرا،

$$IN^{۲} \times IN^{۲} = \{((x,y), (z,t)) \mid (x,y) \in IN^{۲}, (z,t) \in IN^{۲}\}$$

بنابراین مثلاً می‌توان نوشت:

$$R = \{((۱,۲),(۲,۱)),((۲,۶),(۷,۱۱)),((۵,۳),(۹۹,۱۵))\}$$

که R دارای ۳ عضو است و طبق قرار داد ۲ می‌توانیم بنویسیم:

$$(۱,۲)\ R\ (۲,۱) \text{ و } (۲,۶)\ R\ (۷,۱۱) \text{ و } (۵,۳)\ R\ (۹۹,۱۵)$$

طرح یک تست ـ هرگاه $n(A) = m$ در این صورت چند رابطه روی A می‌توان نوشت؟

۱) ۲^{m} ۲) $۲^{۲m}$ ۳) $۲^{۲^{m}}$ ۴) $۲^{m^{۲}}$

جواب ـ گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$n(A) = m \Rightarrow n(A \times A) = m^{۲}$$

پس $(A \times A)$ دارای $۲^{m^{۲}}$ زیر مجموعه است و به همین تعداد نیز می‌توان رابطه روی A تعریف کرد.

دامنهٔ یک رابطه ـ اگر R رابطه‌ای از A در B باشد، مجموعهٔ حاصل از مؤلّفه‌های اوّلِ رابطهٔ R را دامنهٔ R می‌نامند و با D_R نمایش می‌دهند، که واضح است همواره $D_R \subset A$.

بُرد یک رابطه ـ مجموعهٔ حاصل از مؤلّفه‌های دوم رابطهٔ R را بُرد رابطهٔ R می‌نامند و با نماد R_R نمایش می‌دهند و همچنین واضح است که $R_R \subset B$ (رابطهٔ R از A در B تعریف شده است).

مثال ۳ ـ هرگاه $A = \{۲,۴,۶,۸\}$ و $B = \{۱,۹,۷\}$ و رابطهٔ $R = \{(۲,۱),(۴,۱),(۶,۷)\}$ از A در B تعریف شده باشد، در این صورت:

$$D_R = \{۲,۴,۶\} \subset A \quad \text{و} \quad R_R = \{۱,۷\} \subset B$$

◆ وارون یک رابطه

اگر R رابطه‌ای از A در B باشد، وارون رابطهٔ R که با $R^{-۱}$ نمایش داده می‌شود، رابطه‌ای است از B در A که با عوض کردنِ جای مؤلّفه‌های اوّل و دومِ R حاصل می‌شود، یعنی:

$$R^{-۱}=\{(a,b) \mid (b,a) \in R\} \ \text{یا} \ (x,y) \in R \Leftrightarrow (y,x) \in R^{-۱}$$

به عنوان مثال، با توجه به مثال ۳ داریم:

$$R^{-۱} = \{(۱,۲),(۱,۴),(۷,۶)\}$$

از طرفی با توجه به تعریف دامنه و بُرد و تعریف وارون یک رابطه همواره داریم:

$$D_R = R_{R^{-۱}} \quad \text{و} \quad R_R = D_{R^{-۱}}$$

در این قسمت با توجه به مطالب گفته شده، به طرح و حل چند مسألهٔ مهّم می‌پردازیم:

مسألهٔ ۱ ـ هرگاه $R_۱$ و $R_۲$ دو رابطه از A در B باشند ثابت کنید:

$$D_{R_۱ \cup R_۲} = D_{R_۱} \cup D_{R_۲}$$

حل ـ

فرض کنیم: $[x \in D_{R_۱ \cup R_۲} \Rightarrow \exists y \in B ; (x,y) \in (R_۱ \cup R_۲) \Rightarrow$

$(x,y) \in R_۱ \vee (x,y) \in R_۲ \Rightarrow x \in D_{R_۱} \vee x \in D_{R_۲} \Rightarrow$

$x \in (D_{R_۱} \cup D_{R_۲})] \Rightarrow D_{R_۱ \cup R_۲} \subset D_{R_۱} \cup D_{R_۲} \qquad (۱)$

حال فرض کنیم: $[x \in (D_{R_۱} \cup D_{R_۲}) \Rightarrow x \in D_{R_۱} \vee x \in D_{R_۲} \Rightarrow$

$\exists y_۱ , \exists y_۲ ; (x,y_۱) \in R_۱ \vee (x,y_۲) \in R_۲ \xRightarrow{R_۱ , R_۲ \subset R_۱ \cup R_۲}$

$(x,y_۱) \in (R_۱ \cup R_۲) \vee (x,y_۲) \in (R_۱ \cup R_۲) \Rightarrow$

$x \in D_{R_۱ \cup R_۲} \vee x \in D_{R_۱ \cup R_۲} \xRightarrow{P \vee P \equiv P} x \in D_{R_۱ \cup R_۲}] \Rightarrow$

$(D_{R_۱} \cup D_{R_۲}) \subset D_{R_۱ \cup R_۲} \quad (۲)$

$(۱),(۲) \Rightarrow D_{R_۱} \cup D_{R_۲} = D_{R_۱ \cup R_۲}$

مسألهٔ ۲ ـ با ذکر یک مثال (مثال نقض) نشان دهید که تساویِ مسألهٔ قبل برای اشتراک برقرار نیست یعنی نشان دهید:

$$D_{R_۱ \cap R_۲} \neq D_{R_۱} \cap D_{R_۲}$$

حل ـ

فرض کنیم: $A = \{۲,۴,۶,۸\}$ و $B = \{۳,۵,۷,۹\}$ و تعریف می‌کنیم:

$R_۱ = \{(۲,۳),(۴,۷),(۶,۹)\} , R_۲ = \{(۲,۳),(۴,۵),(۷,۸)\}$

$D_{R_۱} = \{۲,۴,۶\} , D_{R_۲} = \{۲,۴,۸\}, D_{R_۱} \cap D_{R_۲} = \{۲,۴\}$

$(R_۱ \cap R_۲) = \{(۲,۳)\}, D_{R_۱ \cap R_۲} = \{۲\}$

$\Rightarrow D_{R_۱ \cap R_۲} \neq D_{R_۱} \cap D_{R_۲}$

مسألهٔ ۳ ـ اگر f و g رابطه‌هایی از A در B باشند ثابت کنید:

$(f \cup g)^{-۱} = f^{-۱} \cup g^{-۱}$

فرض کنیم: $[(x,y) \in (f \cup g)^{-۱} \xLeftrightarrow{\text{تعریف وارون}} (y,x) \in (f \cup g) \xLeftrightarrow{\text{تعریف اجتماع}}$

$(y,x) \in f \vee (y,x) \in g \xLeftrightarrow{\text{تعریف وارون}} (x,y) \in f^{-۱} \vee (x,y) \in g^{-۱}$

$\xLeftrightarrow{\text{تعریف اجتماع}} (x,y) \in (f^{-۱} \cup g^{-۱})] \Rightarrow (f \cup y)^{-۱} = f^{-۱} \cup g^{-۱}$

تمرین ـ ثابت کنید: $(f \cap g)^{-1} = f^{-1} \cap g^{-1}$، که f و g هر دو رابطه‌هایی از A در B هستند.

مسألهٔ ۴ ـ اگر f و g رابطه‌هایی از A در B باشند، ثابت کنید:

$$(f - g)^{-1} = f^{-1} - g^{-1}$$

فرض‌کنیم: $[(x,y) \in (f-g)^{-1} \overset{\text{تعریف تفاضل}}{\Longleftrightarrow} (y,x) \in (f-g)$

$(y,x) \in f \wedge (y,x) \notin g \Longleftrightarrow (x,y) \in f^{-1} \wedge (x,y) \notin g^{-1}$

$\Longleftrightarrow (x,y) \in (f^{-1} - g^{-1})] \Rightarrow (f-g)^{-1} = f^{-1} - g^{-1}$

◆ **تعریف رابطهٔ همانی**

رابطهٔ همانی روی یک مجموعهٔ ناتهی مانند A که آن را با I نمایش می‌دهند عبارت است از: تمام زوج مرتبهای متعلق به $A \times A$ که هر دو مؤلّفه با هم برابر باشند، یعنی:

$$I = \{(a,a) \mid a \in A\}$$

بنابراین با توجه به تعریف فوق اگر A یک مجموعهٔ m عضوی باشد، در این صورت رابطهٔ همانیِ تعریف شده روی A، یعنی I دارای m عضو است.

مثال ۴ ـ اگر $A = \{۲,۳,۷,۹\}$ در این صورت:

$$I = \{(۲,۲), (۳,۳), (۷,۷), (۹,۹)\}$$

■ انواع رابطه‌ها (خواص رابطه‌ها)

۱ ـ خاصیت بازتابی (انعکاسی):

اگر A مجموعه‌ای ناتهی باشد و رابطهٔ R روی A تعریف شده باشد، در این صورت می‌گوییم: رابطهٔ R دارای خاصیت بازتابی یا انعکاسی است، هرگاه هر عضو مجموعهٔ A مانند a، به صورت (a,a) در R وجود داشته باشد، یعنی:

رابطهٔ R خاصیت بازتابی دارد. $\Leftrightarrow \forall a \in A$ ، $(a,a) \in R$ یا aRa

توجه دارید که گفتیم: هر عضو مجموعهٔ A، به‌عبارت دیگر؛ اگر R رابطه‌ای بازتابی روی مجموعهٔ m عضوی A باشد، حداقل اعضایی که R می‌تواند داشته باشد، m است یعنی؛ رابطهٔ بازتابی R باید حداقل شامل رابطهٔ همانی در A باشد.

مثال ۵ ـ مجموعهٔ $A = \{۲,۴,۶\}$ مفروض است، در این صورت:

الف) $R_1 = \{(۲,۲), (۴,۴), (۲,۶), (۶,۲)\}$

R_1 خاصیت بازتابی ندارد زیرا، $۶ \in A$ ولی $(۶,۶) \notin R_1$ یا $۶ \not R ۶$.

ب) $R_2 = \{(۲,۲),(۴,۴),(۴,۲),(۶,۶)\}$

R_2 خاصیت بازتابی دارد و همان‌طور که مشاهده می‌کنید، $I \subset R_2$.

ج) $R_3 = \{(۲,۲),(۴,۴),(۶,۶)\}$

R_3 خاصیت بازتابی دارد، این رابطه همان رابطهٔ همانی است.

مثال ۶ ـ رابطه‌های تساوی و کوچکتر یا مساوی در اعداد حقیقی دارای خاصیت بازتابی هستند، زیرا هر عدد مساوی خودش است و نیز هر عدد کوچکتر یا مساوی خودش است یا به عبارت دیگر:

$\forall a \in \mathbb{R} ; a = a$ و $\forall a \in \mathbb{R}$ ، $a \le a$

مثال ۷ ـ رابطهٔ جزئیت (زیر مجموعه بودن) در مجموعهٔ، زیر مجموعه‌های A دارای خاصیت بازتابی است زیرا، هر مجموعه زیرمجموعهٔ خودش است، یعنی؛

$\forall B \in p(A)$ ، $B \subseteq B$

مثال ۸ ـ رابطهٔ بخش‌پذیری در مجموعهٔ اعداد طبیعی (IN) خاصیت بازتابی دارد، زیرا هر عدد طبیعی برخود بخش‌پذیر است، یعنی:

$\forall a \in \mathbb{N}$ ، $\frac{a}{a} = ۱$ یا $a = ۱a$

تذکر ـ برای اینکه ثابت کنیم، رابطه‌ای چون R روی A، دارای خاصیت بازتابی نیست کافی است تنها یک عضو از A مانند a بیابیم به طوری که $a \not R a$.

در این قسمت و قبل از بیان بقیّهٔ خواص رابطه‌ها به ذکر این نکته مهّم می‌پردازیم که گاهی اوقات تعریف یک رابطه را به صورت و با نماد ریاضی بیان می‌کنند، در حقیقت ارتباط بین مؤلّفه‌های هر زوج مرتب را با نماد ریاضی نمایش می‌دهند، به عنوان مثال: رابطهٔ بخش‌پذیری را در IN به صورت زیر می‌توان نشان داد:

$\forall a,b \in \mathbb{N} ; aRb \Leftrightarrow \frac{a}{b} = k$ یا $a = kb$

که در تعریف فوق $k \in \mathbb{N}$ بوده و داریم:

$R = \{(۱,۱), (۲,۱), (۲,۲), (۳,۱), (۳,۳),...\}$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، مؤلّفهٔ هر زوج، مضربی از مؤلّفهٔ

دوم آن است و برعکس. یعنی؛ اگر عددی طبیعی مضربی از یک عدد طبیعی دیگر باشد، آن دو عدد به صورت یک زوج مرتب در رابطهٔ مزبور وجود خواهد داشت، مثلاً:

$۸ = ۲ \times ۴ \Rightarrow (۸,۲) \in R$ یا $۸R۲$

مثال ۹ ـ رابطهٔ R روی مجموعهٔ اعداد صحیح (Z) به صورت زیر تعریف شده است، نشان دهید این رابطه خاصیت بازتابی دارد.

$\forall x , y \in Z$ ، $xRy \Longleftrightarrow x - y = ۴k \ (k \in Z)$

برای نشان دادن این مطلب، ابتدا ضابطه‌ای که براساس آن رابطهٔ R تعریف شده را بررسی می‌کنیم. برطبق این ضابطه زوج مرتبهایی در رابطهٔ R موجود هستند که تفاضل مؤلّفهٔ اوّل و دوم آنها مضرب صحیحی از ۴ باشد، مثلاً:

$$\left.\begin{array}{l} ۸ - ۴ = ۴ = ۱ \times ۴ \ (k = ۱) \\ ۱۲-(-۴)=۱۶= ۴ \times ۴ (k= ۴) \end{array}\right\} \Rightarrow ۸R۴ \ , \ ۱۲R(-۴)$$

یا مثلاً؛

$[۲ - ۲ = ۰ = ۴ \times ۰ (k = ۰)] \Rightarrow ۲R۲$

بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$\forall x \in Z ; x - x = ۰ = ۴ \times ۰ \Rightarrow xRx$

ثابت شد: $\forall x \in Z$ ، xRx

بنابراین رابطهٔ R طبق تعریف دارای خاصیت بازتابی است.

با توجه به تعریف رابطهٔ همانی و تعریف خاصیت بازتابی برای یک رابطه دیدیم هر رابطه که خاصیت بازتابی داشته باشد باید شامل رابطهٔ همانی یعنی؛ I باشد و برعکس یعنی اگر R شامل I باشد، حتماً خاصیت بازتابی دارد بنابراین می‌توان نوشت:

$I \subset R \Longleftrightarrow$ رابطهٔ R روی مجموعهٔ A خاصیت بازتابی دارد.

از همین نکته استفاده کرده و ثابت می‌کنیم:

الف ـ اگر f و g دو رابطهٔ روی مجموعهٔ ناتهی A بوده و انعکاسی باشند در این صورت $(f \cup g)$ و $(f \cap g)$ نیز انعکاسی هستند ولی $(f - g)$ دیگر دارای خاصیت انعکاسی نیست.

ب ـ رابطهٔ مُمتنع $(\varnothing)$ انعکاسی نیست.

(اثبات الف) $\left\{\begin{array}{l} f \text{ انعکاسی} \Rightarrow I \subseteq f \\ g \text{ انعکاسی} \Rightarrow I \subseteq g \end{array}\right\} \Rightarrow I \subseteq (f \cap g)$

و چون همواره $(f \cap g) \subseteq (f \cup g)$ لذا $I \subset (f \cup g)$ و حکم ثابت است.

از طرفی: $I \subseteq f \ , \ I \subseteq g \Rightarrow I \nsubseteq (f - g)$

اثبات ب) فرض کنیم رابطهٔ تُهی انعکاسی باشد، بنابراین می‌بایست $I \subseteq \varnothing$ و این ممکن نیست، جز آنکه $I = \varnothing$ و این با ناتهی بودنِ مجموعهٔ A تناقض دارد، پس رابطهٔ تهی انعکاسی نیست.

مثال ۱۰ ـ با ذکر یک مثال نقض نشان می‌دهیم؛ رابطهٔ زیر که روی اعدادِ حقیقی (IR) تعریف شده است، خاصیت انعکاسی ندارد.

$\forall x , y \in IR ; xRy \Leftrightarrow ۲x + ۳y = ۹$

$۳ \in IR$ ولی $\rightarrow ۲ \times ۳ + ۳ \times ۳ = ۱۵ \neq ۹ \Rightarrow ۳ \not R \ ۳$

۲ـ خاصیت تقارنی

می‌گوییم رابطهٔ R روی مجموعهٔ ناتهی A خاصیت تقارنی دارد هرگاه، هر زوج مرتب مانند (x , y) که در R موجود باشد، (y , x) نیز در R موجود باشد به عبارت دیگر:

رابطهٔ R متقارن است $\Leftrightarrow \forall x,y \in A ; [(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R]$

تذکر: از تعریف فوق چنین برمی‌آید که در صورت وجودِ زوج مرتبی چون (x,y) می‌بایست (y,x) هم در R باشد و اگر زوج مرتبی چون (z,t) در R نبود دیگر به دنبال (t,z) نیستیم و **نمی‌توان** ادعا کرد که رابطهٔ تقارنی نیست. در ضمن توجه دارید که چون در تعریف خاصیت تقارنی از سور عمومی (به ازای هر) استفاده شده نیازی به رابطهٔ دو شرطی نداریم.

مثال ۱۱ ـ مجموعهٔ $A = \{۲,۴,۶,۸\}$ را در نظر می‌گیریم در این‌صورت:

الف) $R_۱ = \{(۲,۴),(۶,۲),(۴,۲),(۲,۶),(۸,۸)\}$

رابطهٔ $R_۱$ متقارن است زیرا هر زوج مرتب در آن که در نظر گرفته

شود، دارای وارونی در R_1 است.

ب) $R_2 = \{(۲,۴),(۴,۲),(۸,۶)\}$

رابطهٔ R_2 خاصیت تقارنی ندارد زیرا $۸R۶$ ولی $۶\not R۸$.

ج) $R_3 = \{(۲,۲),(۴,۴),(۶,۶),(۸,۸)\}$

رابطهٔ R_3 نیز دارای خاصیت تقارنی است در واقع رابطهٔ همانی رابطه‌ای متقارن است.

مثال ۱۲ ـ رابطهٔ کوچکتر یا مساوی در IR خاصیت تقارنی ندارد، زیرا:
مثلاً $۲ \leq ۳$ ولی $۳ \not\leq ۲$.

مثال ۱۳ ـ رابطهٔ بخش‌پذیری در IN متقارن نیست، زیرا مثلاً عدد ۴ بر ۲ بخش‌پذیر است (خارج قسمتِ تقسیم، عددی صحیح و باقی‌مانده صفر است) ولی عدد ۲ بر ۴ بخش‌پذیر نیست.

مثال ۱۴ ـ نشان دهید رابطهٔ زیر که روی Z تعریف شده دارای خاصیت تقارنی است.

$$\forall x,y \in Z \text{ ، } xRy \Leftrightarrow x - y = ۴k \qquad (k \in Z)$$

برای اثبات چنین مسائلی همیشه برای شروع خودمان فرض می‌کنیم، (x,y) ای دلخواه در رابطهٔ R موجود است و در نهایت باید ثابت کنیم (y,x) نیز در R است و با توجه به دلخواه بودنِ (x,y) حکم به اثبات می‌رسد، بنابراین داریم:

$$\text{فرض کنیم}(x,y) \in R \Rightarrow x-y = ۴k_1 \xRightarrow{\text{در منفی ضرب می‌کنیم}} y - x = ۴(-k_1)$$
$$\xRightarrow{-k_1 = k_2} y - x = ۴k_2 \Longrightarrow (y,x) \in R$$

تمرین: نشان دهید رابطهٔ زیر متقارن است:

$$\forall x,y \in IR \text{ ; } xRy \Leftrightarrow x + y = ۹$$

قضیه: هرگاه R رابطه‌ای روی مجموعهٔ ناتهی A باشد، شرط لازم و کافی برای آنکه R تقارنی باشد آن است که $R = R^{-1}$.
اثبات شرط لازم: فرض کنیم رابطهٔ R متقارن باشد ثابت می‌کنیم: $R = R^{-1}$.

برای اثبات به‌روش عضوگیری دلخواه از R استفاده می‌کنیم:

$$[\text{فرض کنیم}: (x,y)\in R \xRightarrow{R \text{ تقارنی}} (y,x)\in R \xRightarrow{\text{تعریف وارون}} (x,y)\in R^{-1}] \Rightarrow R = R^{-1}$$

اثبات شرط کافی: فرض کنیم: $R = R^{-1}$، ثابت می‌کنیم: R متقارن است:

$$[\text{فرض کنیم}: (x,y) \in R \xRightarrow{R = R^{-1}} (x,y) \in R^{-1} \xRightarrow{\text{تعریف وارون}} (y,x) \in R\,] \Rightarrow R \text{ متقارن است}$$

تذکر: از قضّیهٔ فوق می‌توان در اثبات متقارن بودنِ رابطه‌ها استفاده کرد، یعنی برای اثبات اینکه رابطهٔ R متقارن است کافی است ثابت کنیم: $R = R^{-1}$

مسألهٔ ۵ ـ هرگاه R_1 و R_2 رابطه‌هایی روی A باشند و هر دو دارای خاصیت تقارنی باشند ثابت کنید:

$(R_1 \cap R_2)$، $(R_1 - R_2)$ و $(R_1 \cup R_2)$ نیز متقارن هستند.

$(R_1 \cap R_2)^{-1} = (R_1 \cap R_2) \rightarrow$ کافی است ثابت کنیم
$(R_1 - R_2)^{-1} = (R_1 - R_2)$ و $(R_1 \cup R_2)^{-1} = (R_1 \cup R_2)$ و

چون R_1 و R_2 متقارن هستند، پس طبق قضّیهٔ قبل $R_1 = R_1^{-1}$ و $R_2 = R_2^{-1}$ بنابراین داریم:

$$(R_1 \cup R_2)^{-1} = (R_1^{-1} \cup R_2^{-1}) = (R_1 \cup R_2) \text{(طبق مسألهٔ ۳)}$$

$$(R_1 \cap R_2)^{-1} = (R_1^{-1} \cap R_2^{-1}) = (R_1 \cap R_2)$$

$$(R_1 - R_2)^{-1} = (R_1^{-1} - R_2^{-1}) = (R_1 - R_2) \text{(طبق مسألهٔ ۴)}$$

مسألهٔ ۶ ـ رابطهٔ R روی IR^2 تعریف شده آیا این رابطه متقارن است؟

$$\forall (x,y) , (z,t) \in IR^2 \text{ ، } (x,y)\ R\ (z,t) \Leftrightarrow x^2 + t^2 = y^2 + z^2$$

حل ـ با توجه به اینکه رابطه روی IR^2 تعریف شده واضح است که $R \subset IR^2 \times IR^2$ (به مثال ۲ مراجعه کنید) و نظیر آنچه در قبل گفتیم عمل می‌کنیم، یعنی؛ به صورت دلخواه زوج مرتبی از رابطه فرض کرده و ثابت می‌کنیم وارون آن زوج نیز در رابطه موجود است یعنی:

فرض کنیم: $[(x,y)R(z,t) \Longrightarrow (x^۲ + t^۲ = y^۲ + z^۲)$ جابه‌جایی عمل جمع $\Longrightarrow$

$(z^۲+y^۲=t^۲+x^۲) \Longrightarrow (z,t)\ R\ (x,y)] \Rightarrow$ رابطهٔ R متقارن است

توجه دارید که، $(x,y)\ R\ (z,t)$ معادل است با اینکه $((x,y),(z,t))\in R$ و $(z,t)\ R\ (x,y)$ معادل است با اینکه $((z,t)\ ,\ (x,y))\in R$.

مسأله ۷ ـ ثابت کنید، هرگاه R رابطه‌ای دلخواه روی A باشد در این‌صورت $(R\cup R^{-۱})$ متقارن است.

حل ـ با توجه به قضیهٔ قبل اگر $R = R^{-۱}$ آنگاه R متقارن است

بنابراین، کافی است نشان دهیم، $(R\cup R^{-۱})^{-۱} = (R\cup R^{-۱})$

$$(R\cup R^{-۱})^{-۱} = (R^{-۱}\cup R) = (R\cup R^{-۱})$$

توجه دارید که از تساوی $(R^{-۱})^{-۱} = R$ استفاده کرده‌ایم.

تمرین: ثابت کنید، اگر R رابطه‌ای دلخواه روی مجموعهٔ A باشد، در این صورت $(R\cap R^{-۱})$ متقارن است.

مسألهٔ ۸ ـ ثابت کنید، رابطهٔ مُمتنع (رابطهٔ تهی) متقارن است.

حل ـ (برهان خلف)، فرض کنیم رابطهٔ تهی متقارن نباشد، پس طبق تعریف می‌بایست (x,y) ای در رابطهٔ تهی باشد ولی (y,x) در آن نباشد و این ممکن نیست، زیرا تهی عضوی ندارد. پس رابطهٔ تهی متقارن است.

۳ ـ خاصیت تراگذری یا ترایایی یا تعدی

فرض‌کنیم رابطهٔ R روی مجموعهٔ A تعریف شده باشد، حال اگر با فرض $(x,y)\in R$ و $(y,z)\in R$، بتوانیم ثابت‌کنیم، $(x,z)\in R$، در این صورت می‌گوییم: R خاصیت تعدی دارد یا رابطه‌ای متعدی است. به بیان ریاضی می‌توان نوشت:

رابطهٔ R خاصیت‌تعدی‌دارد $\Longleftrightarrow \forall x,y,z\in A, [xRy \wedge yRz]\Rightarrow xRz$

تذکر: همان‌طور که در تعریف خاصیت تعدی مشخص است، اثبات برقراری این خاصیت برای رابطه‌ای چون R، مستلزم آن است که درستی گزارهٔ شرطیِ ذکر شده در تعریف، اثبات شود و می‌دانید گزاره شرطی $(p\Rightarrow q)$ در ۳ حالت درست و فقط در حالتی که مقدم درست و تالی نادرست باشد، ارزش نادرست دارد. بنابراین، اگر مقدمِ گزارهٔ شرطیِ مزبور که ترکیبی عطفی از دو گزارهٔ xRy و yRz است، نادرست باشد در کلّ گزارهٔ شرطی ارزش درست داشته و در اصطلاح می‌گوییم: به انتفای مقدم گزاره درست بوده و رابطه متعدی است.

مثال ۱۵ ـ مجموعهٔ $A = \{۲,۵,۶,۷\}$ مفروض است. در این صورت:

الف) $R_۱ = \{(۲,۵), (۵,۲)\ ,\ (۲,۲)\}$

$R_۱$ متعدی نیست زیرا:

$۵R۲ \wedge ۲R۵$ ولی $۵R۵$

ب) $R_۲ = \{(۲,۶)\}$

$R_۲$ متعدی است زیرا گزارهٔ شرطی زیر به انتفای مقدم درست است:

$$\underset{T}{(۲R۶} \wedge \underset{F}{۶Rx)} \Rightarrow ۲Rx \qquad (x\in A)$$

ج) $R_۳ = \{(۲,۵),(۵,۶),(۲,۶),(۶,۲),(۲,۲)\}$

رابطهٔ $R_۳$ متعدی نیست، زیرا:

$(۵,۶)\in R \wedge (۶,۲)\in R$ ولی $(۵,۲)\notin R$

د) $R_۴ = \{(۲,۲)\ ,\ (۵,۵)\ ,\ (۶,۶)\ ,\ (۷,۷)\}$

رابطهٔ $R_۴$ خاصیت تعدی دارد (به انتفای مقدم).

مثال ۱۶ ـ رابطهٔ «کوچکتر یا مساوی» روی مجموعهٔ اعداد حقیقی متعدی است زیرا، با فرض $a\le b$ و $b\le c$ می‌توان نتیجه گرفت $a\le c$.

مثال ۱۷ ـ رابطهٔ بخش‌پذیری روی Z متعدی است زیرا، اگر فرض کنیم a بر $b \neq 0$ بخش‌پذیر و b نیز بر $c \neq 0$ بخش‌پذیر باشد، داریم:

$$a = bq_1 \text{ و } b = cq_2 \Longrightarrow a = (cq_2)q_1$$
$$\Longrightarrow a = c(q_2q_1) \Longrightarrow a = cq_3$$

یعنی نتیجه گرفتیم a بر $c \neq 0$ بخش‌پذیر است.

نکته: همان‌طور که مشاهده کردید، برای اثبات خاصیت تعدیِ رابطهٔ R می‌بایست با فرض xRy و yRz ثابت کنیم xRz.

مثال ۱۸ ـ رابطهٔ R را روی Z به شکل زیر تعریف می‌کنیم. ثابت کنید، رابطهٔ R متعدی است.

$$\forall x,y \in Z \text{ ، } xRy \Longleftrightarrow x - y = 4k \;\; (k \in Z)$$

فرض کنیم: $xRy \wedge yRz \Rightarrow x - y = 3k_1 \wedge y - z = 3k_2$

$$\xrightarrow{\text{جمع طرفین}} (x - y) + (y - z) = 3(\underbrace{k_1 + k_2}_{k_3})$$
$$\Longrightarrow x - z = 3k_3 \Longrightarrow xRz$$

مسألهٔ ۹ ـ رابطهٔ R روی IR^2 به‌صورت زیر تعریف شده. ثابت کنید این رابطه خاصیت تراگذری (تعدی) دارد.

$$\forall (x,y)\,,\,(z,t) \in IR^2 \text{ ، } (x,y)\,R\,(z,t) \Leftrightarrow x^2 + t^2 = y^2 + z^2$$

حل:

فرض کنیم $(x,y)\,R\,(z,t) \wedge (z,t)\,R\,(u,v)$
$$\Rightarrow x^2 + t^2 = y^2 + z^2 \wedge z^2 + v^2 = t^2 + u^2$$

$$\Rightarrow x^2 + \cancel{t^2} + \cancel{z^2} + v^2 = y^2 + \cancel{z^2} + \cancel{t^2} + u^2$$
$$\Rightarrow x^2 + v^2 = y^2 + u^2 \Rightarrow (x,y)\,R\,(u,v)$$

مسألهٔ ۱۰ ـ هرگاه R_1 و R_2 رابطه‌هایی روی مجموعهٔ A بوده و هر دو دارای خاصیت تعدی باشند، ثابت کنید: $(R_1 \cap R_2)$ نیز متعدی است. آیا $(R_1 \cup R_2)$ نیز متعدی است؟

حل:

فرض کنیم: $(x,y) \in (R_1 \cap R_2) \wedge (y,z) \in (R_1 \cap R_2)$

$$\xrightarrow{\text{تعریف اشتراک}} \left.\begin{array}{l} (x,y)\in R_1 \wedge (y,z)\in R_1 \xrightarrow{R_1 \text{ متعدی}} (x,z)\in R_1 \\ (x,y)\in R_2 \wedge (y,z)\in R_2 \xrightarrow{R_2 \text{ متعدی}} (x,z)\in R_2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تعریف اشتراک}}$$
$$(x,z) \in (R_1 \cap R_2)$$

در مورد $(R_1 \cup R_2)$ حکم بالا در حالت کلّی برقرار نیست که می‌توان این موضوع را با یک مثال نمایش داد. اگر فرض کنیم:

$$A = \{2,4\}$$

و $R_1 = \{(2,4)\}$ و $R_2 = \{(4,2)\}$. واضح است که R_1 و R_2 هر دو بنابر انتفای مقدم متعدی هستند ولی $(R_1 \cup R_2) = \{(2,4),(4,2)\}$ متعدی نیست زیرا، $(2,2) \notin (R_1 \cup R_2)$.

* * *

تذکّر مهم: اگر رابطهٔ R روی مجموعهٔ A، تک عضوی باشد از طریق برهان خلف نیز می‌توان ثابت کرد که رابطهٔ R خاصیت تعدی دارد: فرض کنیم $R = \{(a,b)\}$. فرض کنیم R خاصیتِ تعدی نداشته باشد (فرض خلف) بنابراین طبق تعریفِ خاصیتِ تعدی و با توجه به اینکه $(a,b)\in R$ باید $(b,x) \in R$ ای $(x \in A)$ باشد به قسمی که $(a,x)\notin R$ و وجودِ (b,x) در R یک تناقض است، زیرا فقط $(a,b)\in R$ بنابراین، فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

در انتها و با تشکر از اینکه با حوصله تا آخر مقاله پیش آمدید، لازم می‌دانم که بحثِ راجع به رابطه‌های هم‌ارزی و کلاسهای هم‌ارزی را به علت حجم زیاد آن به شمارهٔ بعدیِ مجله موکول کنم، إن‌شاءا... مفید واقع شده باشد.