رابطه هم‌نهشتی ـ خواص و کاربردهای آن در Z

(مورد استفاده دانش‌آموزان سال چهارم رشته ریاضی و سال سوّم ریاضیِ نظام جدید)

● حمیدرضا امیری

در این مقاله و به دنبال مقالهٔ قبل در برهان ۱۳ تحت عنوانِ رابطهٔ هم‌ارزی و... می‌خواهیم به بررسی وتجزیه و تحلیل یکی از همین رابطه‌های هم‌ارزی یعنی رابطهٔ هم‌نهشتی پرداخته و کاربردهای آن را در Z مورد بحث قرار دهیم.

در سرتاسر این مقاله از اثبات قضایایی که در کتابهای درسی اثبات شده‌اند خودداری شده و بیشتر روی بُعد کاربردهای قضایا و نتایج حاصل از آنها کار شده است در ضمن در لابه‌لای مقاله از تستهای متنوعی به همراه حل تشریحی آنها استفاده شده است.

در این مقاله هر کجا صحبت از عدد است منظور عدد صحیح می‌باشد حال چه قید کنیم و چه قید نکنیم، برای شروع ناچاریم رابطهٔ بخش‌پذیری یا عاد کردن را تعریف کنیم.

تعریف: طبق قضیهٔ تقسیم در تئوری اعداد هرگاه a و b اعدادی صحیح بوده و $b \neq 0$ در این صورت اعدادی صحیح و منحصر به فرد مانند r و q یافت می‌شوند به قسمی که $a = bq + r$ و $0 \leq r < |b|$، که a را مقسوم، b را مقسوم‌علیه، q را خارج‌قسمت و r را باقیماندهٔ تقسیم a بر b می‌نامند.

حال اگر در تقسیم a بر $b \neq 0$، باقیمانده صفر باشد یعنی $a = bq$ در این‌صورت می‌گوییم a بر b بخش‌پذیر است و می‌نویسیم $b|a$ و می‌خوانیم، «b عاد می‌کند a را» یا «b می‌شمارد a را» پس در حالت کلّی:

$$\boxed{b|a \Leftrightarrow a = bq}$$

خواص رابطهٔ عاد کردن

۱) رابطهٔ عاد کردن دارای خاصیت انعکاسی است زیرا:

$\forall a \in Z ; (a \neq 0)\ a = a \times 1 \Rightarrow a \mid a$

۲) رابطهٔ عاد کردن خاصیت تقارنی ندارد زیرا:

$2 \mid 4$ ولی $4 \nmid 2$

۳) رابطهٔ عاد کرد در Z خاصیت پاد تقارنی ندارد زیرا:

$4|-4$ و $-4 \mid 4$ ولی $4 \neq -4$

(این رابطه در N خاصیت پاد تقارنی دارد!)

۴) رابطهٔ عاد کردن خاصیت تعدی دارد زیرا:

فرض کنیم $a|b$ و $b|c \Rightarrow b = aq_1$ و $c = bq_2$

$\Rightarrow c = (aq_1)\, q_2 \Rightarrow c = a(q_1q_2) = aq_3$

$\Rightarrow q|c$

۵) $a|b \Rightarrow a|-b$ و $-a|b$ و $-a|-b$

یکی از حالتهای فوق را اثبات می‌کنیم:

$a|b \Rightarrow b = aq \Rightarrow b = (-a)\underbrace{(-q)}_{q_1} \Rightarrow -a|b$

۶) $a|b$ و $a|c \Rightarrow a|b \pm c$ و $a|bc$

۷) $a|b \Rightarrow a|mb$

۸) $a|b \Leftrightarrow a^n |b^n$

۹) $a|b \Rightarrow |a| \leq |b|$

۱۰) $a|b$ و $b|a \Rightarrow a = \pm b$

۱۱) $\forall a \in Z ; a|0 \qquad (a \neq 0)$

۱۲) $\forall a \in Z ; 1|a$

۱۳) $a|1 \Rightarrow a = \pm 1$

اثبات خواص فوق تقریباً آسان بوده و به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

حال به سراغ بحث اصلی خود یعنی رابطه هم‌نهشتی و خواص و کاربردهای آن برمی‌گردیم. لازم به تذکر است که قضایا و نتایجی که

اثبات آنها در کتاب درسی موجود است، فقط بیان و از آنها استفاده شده است.

تعریف. رابطهٔ $\overset{m}{\equiv}$ (هم‌نهشتی به سنج m) روی Z به شکل زیر تعریف می‌شود: $(m \in \mathbb{N})$

$$\forall a , b \in Z ; a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m|a - b \ \text{یا}\ a - b = mk$$

قضیه. رابطهٔ هم‌نهشتی به سنج m روی Z یک رابطهٔ هم‌ارزی است، یعنی:

$$۱) \forall a , b \in Z ; a \overset{m}{\equiv} a \ (\text{زیرا} \rightarrow m|\underbrace{a - a}_{0})$$

$$۲) \forall a , b \in Z ; a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow b \overset{m}{\equiv} a \ (\text{زیرا}\ m|a-b \Leftrightarrow m|b-a)$$

$$۳) \forall a , b , c \in Z ; (a \overset{m}{\equiv} b \wedge b \overset{m}{\equiv} c) \Rightarrow a \overset{m}{\equiv} c$$

$$(\text{زیرا} \rightarrow m|a - b \wedge m|b - c \rightarrow m|(a - b) + (b - c) \Rightarrow m|a - c)$$

نکته. چون رابطه $\overset{m}{\equiv}$ روی Z یک رابطه هم‌ارزی می‌باشد پس هر عضو Z مانند a دارای یک دسته هم‌ارزی یا یک کلاس هم‌ارزی است که به شکل [a] نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[a] = \{x \in Z \mid x \overset{m}{\equiv} a\}$$

مثلاً: در هم‌نهشتی به سنج ۴ داریم:

$$[2] = \{x \in Z \mid x \overset{4}{\equiv} 2\} = \{x \in Z | x - 2 = 4k\}$$
$$= \{x \in Z | x = 4k + 2\}$$
$$= \{..., -10 , -6 , -2 , 2 , 6 , 10 , 14 ,...\}$$

نکته. رابطهٔ هم‌نهشتی به سنج m دارای m دستهٔ هم‌ارزیِ [۰] و [۱] و ... و [m − ۱] می‌باشد. که این دسته‌های هم‌ارزی Z را افراز می‌کنند بنابراین خواص زیر برای دسته‌های هم‌ارزی به سنج m برقرار می‌باشد.

الف) $\forall\ 1 \leq k \leq m - 1 ، [k] \neq \phi$

ب) $\forall\ k_i$ و $k_j ، [k_i] \cap [k_j] = \phi$

ج) $[0] \cup [1] \cup ... \cup [m - 1] = Z$

د) $b \in [a] \Leftrightarrow [a] = [b]$

قضیه. هرگاه a و $b \neq 0$ دو عدد صحیح باشند و a را بر b تقسیم کنیم طبق قضیهٔ تقسیم داریم: $a = bq + r$ در این صورت همواره، $a \overset{b}{\equiv} r$

$$\text{زیرا} \rightarrow a = bq + r \Rightarrow a - r = bq \Rightarrow b|a - r \Rightarrow a \overset{b}{\equiv} r$$

نتیجه. هرگاه بخواهیم محاسبه کنیم که عدد a به سنج b با چه عددی هم‌نهشت است؛ کافی است a را بر b تقسیم کنیم، در این حالت باقی‌مانده تقسیم یعنی r عددی است که به دنبال آن بودیم.

مثلاً: می‌خواهیم ببینیم که هم‌نهشتی $48 \overset{23}{\equiv} x$ برای چه x ای می‌تواند برقرار باشد، پس کافی است ۴۸ را بر ۲۳ تقسیم کنیم که باقی مانده تقسیم ۲ است بنابراین: $48 \overset{23}{\equiv} 2$.

قضیهٔ اساسی هم‌نهشتیها. شرط لازم و کافی برای آن‌که $a \overset{m}{\equiv} b$ آن است که باقی‌مانده تقسیم a بر m و b بر m ، برابر باشد.

تذکر. هرگاه $a < m$ در این‌صورت باقی مانده تقسیم a بر m با خودِ a برابر است. مثلاً باقی‌مانده تقسیم ۴ بر ۹ برابر است با ۴.

مثال. هرگاه $32 \overset{14}{\equiv} a$ ، باقی‌مانده تقسیم a بر ۱۴ را بیابید.

بنابر قضیهٔ اساسی و با توجه به این‌که $32 \overset{12}{\equiv} a$ ، کافی است باقی‌مانده تقسیم ۳۲ را بر ۱۴ بیابیم که $32 = 2 \times 14 + 4$ پس باقی‌مانده تقسیم a بر ۱۴ حتماً ۴ است.

خواص رابطهٔ هم‌نهشتی

الف) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c$

ب) $a \overset{m}{\equiv} b \rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$

ج) $a \overset{m}{\equiv} b \wedge c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bd \ (I) , a + c \overset{m}{\equiv} b + d \ (II)$

$$\left.\begin{array}{l} (\text{اثبات ج (I)})\ m|a - b \Rightarrow m|c(a - b) \Rightarrow m|ac - bc \\ m|c - d \Rightarrow m|b(c - d) \Rightarrow m|bc - bd \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow m|ac - bd$$

د) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$

نتیجه. هرگاه $a \overset{m}{\equiv} b$ می‌توان به یک طرف این رابطه عدد m یا هر مضربی از m را اضافه کرد و رابطه برقرار خواهد ماند، زیرا:

$$\text{می‌دانیم}\ m|km \Rightarrow m|km - 0 \Rightarrow km \overset{m}{\equiv} 0 \ \text{و}\ a \overset{m}{\equiv} b$$

$$\xRightarrow{\text{بنابر (ج)}} a + km \overset{m}{\equiv} b \ \text{یا}\ a \overset{m}{\equiv} b + km$$

(از این نتیجه در حل معادلات هم‌نهشتی استفاده خواهیم کرد.)

قضیه. هرگاه $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و $(m , c) = d$ در این‌صورت $a \overset{\frac{m}{b}}{\equiv} b$

مثلاً $4\times 9 \overset{12}{\equiv} 4\times 3$ پس $9 \overset{\frac{12}{4}}{\equiv} 3$ زیرا، ۴=(۴ و ۱۲)

نتیجه. هرگاه $ac \overset{m}{\equiv} bc$ و $(m , c) = 1$ دراین صورت $a \overset{m}{\equiv} b$.

تست. هرگاه باقی‌ماندهٔ تقسیم ۳۲ بر k برابر با یک باشد، باقی‌مانده تقسیم 2^{1374} بر k کدام است؟ (در صورتی‌که بدانیم $k>19$ باشد.)

۱) ۲ ۲) ۱۶ ۳) ۹ ۴) ۴

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$32 \overset{k}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^5 \overset{k}{\equiv} 1 \Rightarrow (2^5)^{274} \overset{k}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^{1370} \overset{k}{\equiv} 1 \Rightarrow$$

$$2^{1370}\times 2^4 \overset{k}{\equiv} 1\times 2^4 \Rightarrow 2^{1374} \overset{k}{\equiv} 16$$

و چون $k>19$ پس $k>16$ ابنابراین باقی ماندهٔ تقسیم ۱۶ بر k برابر با ۱۶ است که همان باقی‌مانده تقسیم 2^{1374} بر k است.

مثال. باقی‌مانده تقسیم $4\times(1000)^{451}$ را بر ۷ بیابید.

حل. در حقیقت باید محاسبه کنیم که معادله هم‌نهشتی $x \overset{7}{\equiv} 4\times(1000)^{451}$ برای چه x مثبت و کوچکتر از ۷ برقرار است.

ابتدا ۱۰۰۰ را بر ۷ تقسیم می‌کنیم که باقی‌مانده ۶ است پس $1000 \overset{7}{\equiv} 6$ و چون: $6 \overset{7}{\equiv} -1$ پس بنابر تعدی نتیجه می‌گیریم که $1000 \overset{7}{\equiv} -1$ پس $(1000)^{451} \overset{7}{\equiv} -1$ بنابراین:

$4\times(1000)^{451} \overset{7}{\equiv} -1\times 4$ یا $4\times(1000)^{451} \overset{7}{\equiv} -4$ و

چون $-4 \overset{7}{\equiv} 3$ پس $4\times(1000)^{451} \overset{7}{\equiv} 3$ پس باقی‌مانده تقسیم ۳ است.

مثال. نشان دهید $3^{113}+43$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

حل. باید نشان دهیم $3^{113}+43 \overset{13}{\equiv} 0$

$$3^3 = 27 \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow (3^3)^{37} \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{111} \overset{13}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow 3^{111}\times 3^2 \overset{13}{\equiv} 3^2$$

$$\Rightarrow 3^{113} \overset{13}{\equiv} 9 \text{ و } 43 \overset{13}{\equiv} 4 \Rightarrow 3^{113}+43 \overset{13}{\equiv} 9+4 \overset{13}{\equiv} 0$$

تست. عدد ۲۰۹ − به کدام دسته هم‌نهشتی به پیمانهٔ ۱۲ تعلق دارد؟ (سراسری ۷۱)

۱) $[-9]$ ۲) $[7]$ ۳) $[-7]$ ۴) $[9]$

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

باید x را چنان بیابیم که $-209 \overset{12}{\equiv} x$ لذا کافی است ۲۰۹− را بر ۱۲ تقسیم کرده و باقی‌مانده تقسیم همان x است.

$$-209 = 12\times(-17) - 5 \Rightarrow -209 \overset{12}{\equiv} -5 \text{ و } -5 \overset{12}{\equiv} 7 \Rightarrow$$

$$-209 \overset{12}{\equiv} 7$$

تست. دستهٔ هم‌نهشتی [۱۳۷۳] در Z_{16} مساوی با کدام دستهٔ هم‌نهشتی است.

۱) $[1]$ ۲) $[3]$ ۳) $[-13]$ ۴) $[-3]$

حل. باقی‌مانده تقسیم ۱۳۷۳ بر ۱۶ عبارت است از ۱۳، پس:

$$1373 \overset{16}{\equiv} 13 \text{ و } 13 \overset{16}{\equiv} -3 \Rightarrow 1373 \overset{16}{\equiv} -3$$

$$\Rightarrow [1373] = [-3]$$

نکته. هرگاه $a \overset{m}{\equiv} b$ و $a \overset{n}{\equiv} b$ و $(m , n) = 1$ آنگاه $a \overset{mn}{\equiv} b$.

زیرا: طبق قضیه‌ای در تئوری اعداد اگر $a|c$ و $b|c$ و $(a , b) = 1$ در این‌صورت $ab|c$ یعنی اگر عددی بر دو عدد بخش‌پذیر باشد و آن دو عدد نسبت به هم اول باشند یا بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک آنها ۱ باشد، در این‌صورت آن عدد بر حاصل‌ضربِ آنها نیز بخش‌پذیر است پس در این نکته داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a\overset{m}{\equiv}b \Rightarrow m|a-b \\ a\overset{n}{\equiv}b \Rightarrow n|a-b \end{array}\right\} \overset{(m,n)=1}{\Rightarrow} mn|a-b \Rightarrow a\overset{mn}{\equiv}b$$

مثلاً: $8 \overset{3}{\equiv} 2$ و $8 \overset{2}{\equiv} 2$ و چون: $(3 , 2) = 1$ پس $8 \overset{6}{\equiv} 2$.

نکته. اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ و $n|m$ $(n \in \mathbb{N})$ در این‌صورت $a \overset{n}{\equiv} b$. زیرا:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b ,\ n|m \overset{\text{تعدی}}{\Longrightarrow} n|a-b \Rightarrow a \overset{n}{\equiv} b$$

قواعد مربوط به یافتن باقیماندهٔ تقسیم

۱. باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۲، ۵ و ۱۰ عبارت است از: باقی‌مانده تقسیم رقم یکان آن عدد بر ۲، ۵ و یا ۱۰. مثلاً باقی‌مانده تقسیم ۴۵۳۶ به ترتیب بر ۲ و ۵ و ۱۰ عبارت است از: صفر و ۱ و ۶.

زیرا اگر عدد $A = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0$ یک عدد n رقمی باشد می‌توان A را به شکل زیر در مبنای اعشاری (مبنای ده دهی) بسط داد.

$$A = 10^{n-1}a_{n-1} + 10^{n-2}a_{n-2} + \dots + 10a_1 + a_0$$

از طرفی می‌دانیم $10 \overset{10}{\equiv} 0$ و $10 \overset{5}{\equiv} 0$ و $10 \overset{2}{\equiv} 0$ پس،

$۱۰^k \overset{۲}{\equiv} ۰$ و $۱۰^k \overset{۵}{\equiv} ۰$ و $۱۰^k \overset{۱۰}{\equiv} ۰$ ، $\forall k \in \mathbb{N}$

مثلاً برای بخش‌پذیری بر ۵ و مشخص کردن باقی‌مانده داریم:

$$۱۰^{n-۱} \overset{۵}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۰^{n-۱}a_{n-۱} \overset{۵}{\equiv} ۰$$

$$۱۰^{n-۲} \overset{۵}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۰^{n-۲}a_{n-۲} \overset{۵}{\equiv} ۰$$

$$۱۰ \overset{۵}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۰a_۱ \overset{۵}{\equiv} ۰$$

$$\text{و} \quad a_۰ \overset{۵}{\equiv} a_۰$$

(با جمع طرفین هم‌نهشتی‌ها)

$$A \overset{۵}{\equiv} a_۰$$

پس طبق قضیهٔ اساسی هم‌نهشتی‌ها باقیماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۵ برابراست با باقیمانده تقسیم رقم یکان آن بر ۵ و به همین قیاس برای ۲ و ۱۰ نیز روابط و نتیجه‌گیریِ فوق صادق می‌باشد.

نتیجه. چون رقم‌یکان هر عدد همواه از ۱۰ کوچکتر است، باقی‌مانده تقسیم آن بر ۱۰ همان رقم یکان می‌باشد، بنابراین برای یافتن رقم یکان هر عدد کافی است باقی‌ماندهٔ تقسیم آن عدد را بر ۱۰ بیابیم یا تحقیق کنیم که آن عدد به سنج ۱۰ با چه عددی هم‌نهشت است و به همین قیاس برای تعیین دو رقم یا سه رقم سمت راستِ یک عدد، هم‌نهشتی به سنج ۱۰۰ و ۱۰۰۰ را مورد بررسیِ قرار می‌دهیم.

طریقهٔ محاسبهٔ رقم یکان اعداد توانی به شکل a^n

نکتهٔ ۱. هرگاه عدد a به ۱ یا ۵ یا ۶ یا ۰ ختم شود، هر توان آن نیز به ترتیب به ۱ یا ۵ یا ۶ یا ۰ ختم می‌شود.

نکتهٔ ۲. (قضیهٔ نیوتن) هر عدد که به توان برسد هر چهار بار یک مرتبه رقم سمت راست توانهای آن تکرار می‌شود.

نکتهٔ ۳. هرگاه بخواهیم باقی‌ماندهٔ تقسیم a^n را بر ۱۰ بیابیم، یعنی: رقم سمت راستش راتعیین کنیم؛ کافی است ابتدا باقی‌ماندهٔ توان یعنی n را بر ۴ بیابیم، اگر این باقی‌مانده صفر شود: یعنی $n = ۴k$ ، آن را برابر با ۴ در نظرگرفته و رقم یکان a را به‌توان ۴ می‌رسانیم و رقم یکان عدد حاصل همان رقم یکان a^n خواهد بود و اگر باقی‌مانده r باشد که $۴ > r > ۰$ در این‌صورت نیز رقم یکان a را به توان r می‌رسانیم و رقم یکان عدد حاصل همان رقم یکانِ a^n است و...

مثال. رقم یکان $A = (۴۹۳۶۲۳)^{۴۹۳۸}$ را بیابید.

$$۴۹۳۶۲۳ \overset{۱۰}{\equiv} ۳ \Rightarrow (۴۹۳۶۲۳)^{۴۹۳۸} \overset{۱۰}{\equiv} ۳^{۴۹۳۸}$$

$$۴۹۳۸ = ۱۲۳۴ \times ۴ + ۲ \Rightarrow r = ۲$$

پس A به ۹ ختم می‌شود. $۹ = ۳^۲ \to$ رقم یکان = رقم یکان A

نکته. هرگاه عددی به ۹ ختم شود در این‌صورت رقم یکانِ توانهای زوج آن به یک ختم شده و رقم یکان توانهای فرد آن بـه ۹ ختم می‌شوند زیرا:

$$۹ \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \Rightarrow \begin{cases} ۹^k \overset{۱۰}{\equiv} ۱ & \text{(K زوج باشد)} \\ ۹^k \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \overset{۱۰}{\equiv} ۹ & \text{(K فرد باشد)} \end{cases}$$

نکته. هرگاه عددی به ۴ ختم شود، رقم یکان توانهای زوج آن به ۶ و رقم یکانِ توانهای فرد آن به ۴ ختم می‌شود، زیرا:

$$۴^۲ \overset{۱۰}{\equiv} ۶ \Rightarrow (۴^۲)^k \overset{۱۰}{\equiv} ۶^k \overset{۱۰}{\equiv} ۶ \Rightarrow ۴^{۲k} \overset{۱۰}{\equiv} ۶ \;\text{و}\; ۴^{۲k}\times ۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۲۴ \overset{۱۰}{\equiv} ۴$$

$$\Rightarrow ۴^{۲k+۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۴$$

تست. رقم سمت راست عبارت $۴^{۷۶۲} \times ۷$ کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) ۲   ۲) ۴   ۳) ۶   ۴) ۸

حل. گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

۷۶۲ زوج است. $\to ۴^{۷۶۲} \overset{۱۰}{\equiv} ۶ \Rightarrow ۷ \times ۴^{۷۶۲} \overset{۱۰}{\equiv} ۷ \times ۶ =$

$$۴۲ \overset{۱۰}{\equiv} ۲$$

تست. مانده تقسیم عدد $۳۷۹^۳ - ۳۸۷^۳$ بر ۵ برابر است با: (کنکور سراسری)

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

حل. گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} ۳۸۷ \overset{۵}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۳۸۷^۳ \overset{۵}{\equiv} ۲^۳ \overset{۵}{\equiv} ۳ \\ ۳۷۹ \overset{۵}{\equiv} ۴ \Rightarrow ۳۷۹^۳ \overset{۵}{\equiv} ۴^۳ \overset{۵}{\equiv} ۴ \end{array}\right\} \Rightarrow ۳۸۷^۳ - ۳۷۹^۳ \overset{۵}{\equiv} ۳ - ۴ \overset{۵}{\equiv} ۴$$

تست. بـاقی‌مانده تـقسیم $۲^{۳n+۱} + ۱۳^{۲n+۱}$ بـر ۷ کـدام است؟ $(n\in\mathbb{N})$ (کنکور سراسری)

۱) ۳   ۲) ۱   ۳) ۵   ۴) ۶

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} ۲^۳ = ۸ \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^{۳n} \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^{۳n+۱} \overset{۷}{\equiv} ۲ \\ ۱۳ \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۱۳^{۲n} \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۱۳^{۲n+۱} \overset{۷}{\equiv} ۱۳ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow ۲^{۳n+۱} + ۱۳^{۲n+۱} \overset{۷}{\equiv} ۱۵ \overset{۷}{\equiv} ۱$$

تست. رقم یکان $((۱۹)^۲)^{۷۰}$ برابر است با: (کنکور سراسری)

۱) ۹   ۲) ۱   ۳) صفر   ۴) هیچ‌کدام

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$((۱۹)^{۲})^{۷۰} = (۱۹)^{۱۴۰} \overset{۱۰}{\equiv} ۹^{۱۴۰} \Rightarrow ۹^{\overset{\text{زوج است}}{۱۴۰}} \overset{۱۰}{\equiv} ۱$$

تست. باقی‌مانده تقسیم $۶۵^{۴۰}$ بر عدد ۹ کدام است؟

(کنکور سراسری)

۱) ۷　　۲) ۳　　۳) ۴　　۴) ۲

حل. گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$۶۵ \overset{۹}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۶۵^{۳} \overset{۹}{\equiv} ۲^{۳} \overset{۹}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۶۵^{۳})^{۱۳} \overset{۹}{\equiv} -۱^{۱۳} = -۱$$

$$\Rightarrow ۶۵^{۳۹} \overset{۹}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۶۵^{۴۰} \overset{۹}{\equiv} -۶۵ \overset{۹}{\equiv} -۲ \overset{۹}{\equiv} ۷$$

تست. رقم یکان عدد حاصل از: $A = ۱^{۱۰۱} + ۲^{۱۰۱} + ۳^{۱۰۱} + ۴^{۱۰۱}$ کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) صفر　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۳

حل. گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

می‌دانیم $۱۰۱ = ۴ \times ۲۵ + ۱ \Rightarrow r = ۱$

$$\Rightarrow ۲^{۱۰۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۲^{۱} \text{ و } ۳^{۱۰۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۳^{۱} \text{ و } ۴^{۱۰۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۴^{۱} \text{ و } ۱^{۱۰۱} \overset{۱۰}{\equiv} ۱$$

$$\Rightarrow A \overset{۱۰}{\equiv} ۱ + ۲ + ۳ + ۴ = ۱۰ \overset{۱۰}{\equiv} ۰$$

مثال. اگر باقی‌مانده‌های تقسیم عددهای ۶۸ و ۱۴۵ بر m مساوی باشند، و $m \neq ۱$ باقی‌مانده تقسیم ۱۶۰ بر m کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) صفر　　۲) ۶　　۳) ۷　　۴) ۱۱

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\text{با توجه به فرض و قضیه اساسی} \Rightarrow \left.\begin{matrix} ۶۸ \overset{m}{\equiv} r \\ ۱۴۵ \overset{m}{\equiv} r \end{matrix}\right\} \Rightarrow ۱۴۵ - ۶۸ \overset{m}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۷۷ \overset{m}{\equiv} ۰$$

$$\Rightarrow ۲ \times ۷۷ \overset{m}{\equiv} ۲ \times ۰ \Rightarrow ۱۵۴ \overset{m}{\equiv} ۰ \Rightarrow ۱۵۴ + ۶ \overset{m}{\equiv} ۰ + ۶$$

$$\Rightarrow ۱۶۰ \overset{m}{\equiv} ۶$$

مثال. اگر باقی‌مانده‌های تقسیم a و b بر ۳۷ به‌ترتیب برابر ۱۵ و ۲۹ باشد، باقی‌مانده تقسیم $a - b$ بر ۳۷ کدام است؟ (کنکور سراسری)

۱) ۲۸　　۲) ۲۳　　۳) ۱۴　　۴) ۷

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$\text{با توجه به قضیه اساسی} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a \overset{۳۷}{\equiv} ۱۵ \\ b \overset{۳۷}{\equiv} ۲۹ \end{matrix}\right\} \Rightarrow a - b \overset{۳۷}{\equiv} -۱۴ \overset{۳۷}{\equiv} ۲۳$$

۲. باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۳ و ۹ برابر است با باقی‌ماندهٔ مجموع ارقام آن عدد بر ۳ و یا ۹.

۳. باقی‌مانده تقسیم هر عدد بر ۴ برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم ۲ برابر رقم دهگان به علاوهٔ رقم یکانِ آن عدد، بر ۴.

$$۴۹۳۶۶۷ \overset{۴}{\equiv} ۲ \times ۶ + ۷ \overset{۴}{\equiv} ۱۹ \overset{۴}{\equiv} ۳$$

۴. باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۸ برابر است با باقی‌ماندهٔ تقسیم ۴ برابر رقم صدگان به علاوهٔ ۲ برابر رقم دهگان به علاوهٔ رقم یکان آن عدد، بر ۴:

$$۵۴۸۳۹۱ \overset{۸}{\equiv} ۴ \times ۳ + ۲ \times ۹ + ۱ \overset{۸}{\equiv} ۳۱ \overset{۸}{\equiv} ۷$$

۵. برای یافتن باقی‌ماندهٔ تقسیم هر عدد بر ۷ و ۱۳ از سمت راست سه رقم سه رقم جدا کرده و یک درمیان از هم کم و با هم جمع می‌کنیم، عددی حاصل می‌شود که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن عدد بر ۷ یا ۱۳ همان باقی‌ماندهٔ مطلوب است.

مثال: $۶۴۸۲۳۴۵۹ \overset{۷}{\equiv} ۴۵۹ - ۸۲۳ + ۶۴$

$$= -۳۰۰ \overset{۷}{\equiv} -۴۲ \times ۷ - ۶ \Rightarrow -۳۰۰ \overset{۷}{\equiv} -۶ \overset{۷}{\equiv} ۱$$

پس باقی‌مانده تقسیم ۱ است.

۶. برای محاسبهٔ باقی‌مانده تقسیم یک عدد بر ۱۱ کافی است ارقام آن را از رقم یکان به‌صورت یک در میان از هم کم و با هم جمع کنیم و باقی‌ماندهٔ عدد حاصل را بر ۱۱ بیابیم.

مثال: $۲۳۴۹۶۸ \overset{۱۱}{\equiv} ۸ - ۶ + ۹ - ۴ + ۳ - ۲ = ۸ \overset{۱۱}{\equiv} ۸$

اثبات ۵ و ۶: باقی‌ماندهٔ تقسیم $۱۰^{۳}$ بر ۷ و ۱۳ به‌ترتیب ۶ و ۱۲ می‌باشد یعنی:

$$۱۰^{۳} \overset{۷}{\equiv} ۶ \Rightarrow ۱۰^{۳} \overset{۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow \begin{cases} (۱۰^{۳})^{k} \overset{۷}{\equiv} ۱ & (\text{زوج } k) \\ (۱۰^{۳})^{k} \overset{۷}{\equiv} -۱ & (\text{فرد } k) \end{cases}$$

$$۱۰^{۳} \overset{۱۳}{\equiv} ۱۲ \Rightarrow ۱۰^{۳} \overset{۱۳}{\equiv} -۱$$

از طرفی عدد $A = \overline{a_{n-۱}\, a_{n-۲} \dots a_{۲}\, a_{۱}\, a_{۰}}$ را در مبنای اعشاری می‌توان به‌صورت $A = \overline{a_{۲}a_{۱}a_{۰}} + ۱۰^{۳}\overline{a_{۵}a_{۴}a_{۳}} + ۱۰^{۶}\overline{a_{۸}a_{۷}a_{۶}} + \dots$ بسط داد بنابراین با توجه به مطالب فوق‌الذکر داریم:

$$A \overset{۷}{\equiv} \overline{a_{۲}a_{۱}a_{۰}} - \overline{a_{۵}a_{۴}a_{۳}} + \overline{a_{۸}a_{۷}a_{۶}} - \dots$$

و به همین ترتیب برای بخش‌پذیری بر ۱۳ و یافتن باقی‌مانده کافی است سه رقم سه رقم جدا کرده و یک درمیان از هم کم و با هم جمع کنیم و باقیماندهٔ عدد حاصل را بر ۱۳ بیابیم.

اثبات قسمتهای ۲ و ۳ و ۴ به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.

مثال. ثابت کنید هر عدد به صورت $A = \overline{abcabc}$ همواره بر ۷ و ۱۳ و ۱۱ بخش‌پذیر است.

$A \overset{7}{\equiv} abc - abc = 0$ و $A \overset{13}{\equiv} abc - abc = 0$ و

$A \overset{11}{\equiv} a - b + c - a + b - c = 0$

مثلاً عدد (۴۷۲۴۷۲) همواره بر ۷ و ۱۳ و ۱۱ بخش‌پذیر است.

نکته. هرگاه a و b اعداد صحیح و مثبت باشند، داریم:

الف) $(a + b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$

ب) $(a - b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n - b^n$ اگر n فرد باشد

ج) $(a - b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$ اگر n زوج باشد

اثبات الف) $(a + b)^n$

$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + b^n$$

چون همهٔ جملات به جز جملهٔ اول و آخر، عامل ab دارند پس:

$$\Rightarrow (a + b)^n = a^n + abQ + b^n$$

$$\Rightarrow (a + b)^n - (a^n + b^n) = abQ \Rightarrow (a + b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$$

تست. باقی‌ماندهٔ تقسیم $(13^n - 7^n - 6^n) + 2$ بر ۴۲ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۸

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

با توجه به نکتهٔ قبل اگر قرار دهیم a = ۷ و b = ۶ داریم:

$$(7 + 6)^n \overset{42}{\equiv} 7^n + 6^n \Rightarrow 13^n - 7^n - 6^n \overset{42}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow (17^n - 7^n - 6^n) + 2 \overset{42}{\equiv} 2$$

تعریف دستهٔ کامل مانده‌ها به سنج m

دیدیم که رابطهٔ هم‌نهشتی به سنج m روی Z یک رابطهٔ هم‌ارزی بوده و دارای m دستهٔ هم‌ارزی $[0]$ و $[1]$ و ... و $[m-1]$ می‌باشد. حال اگر از هر دستهٔ هم‌ارزیِ یک عدد صحیح انتخاب کرده و در یک مجموعه قرار دهیم، مجموعهٔ حاصل که دارای m عضو می‌باشد یک دستهٔ کامل مانده‌ها (د.ک.م.) به سنج m است.

مثلاً: مجموعهٔ $\{0,1,2,3,4\}$ یک د.ک.م. به سنج ۵ است.

قضیه. هرگاه $A = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ و هیچ دو عضو A به سنج m با یکدیگر هم‌نهشت نباشند، A یک د.ک.م. به سنج m است و برعکس.

قضیه. اگر $A = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ یک د.ک.م. به سنج m باشد و $(a, m) = 1$ و $b \in Z$، در این‌صورت $B = \{ac_1 + b, ac_2 + b, \dots, ac_m + b\}$ نیز یک د.ک.م. به سنج m است.

نتیجه. اگر در قضیه بالا $b = 0$ در این‌صورت $B = \{ac_1, ac_2, \dots, ac_m\}$ یک د.ک.م. به سنج m خواهد بود. ($(a,m) = 1$).

تست. کدام مجموعه یک دستگاه کامل مانده‌ها به سنج ۴ است؟

۱) $\{0,2,6,5\}$ ۲) $\{1,2,3,5\}$

۳) $\{2,4,6,8\}$ ۴) $\{1,6,3,0\}$

حل. گزینهٔ (۴) صحیح است، زیرا:

در گزینهٔ (۱) $6 \overset{4}{\equiv} 2$ و در گزینهٔ (۲) $5 \overset{4}{\equiv} 1$ و در گزینهٔ (۳) $8 \equiv 4$ ولی در مجموعهٔ مربوط به گزینهٔ (۴) هیچ دو عضوی به سنج ۴ با یکدیگر هم‌نهشت نیستند.

قضیهٔ فرما. اگر p عددی اوّل بوده و $p \nmid a$ یا $(p, a) = 1$ در این‌صورت:

$$\boxed{a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1}$$

نتیجهٔ قضیهٔ فرما. به ازای هر عدد صحیح مانند a و عدد اوّل p داریم:

$a^p \overset{p}{\equiv} a$

اثبات: فرض کنیم p عددی اول بوده و $a \in Z$، در این‌صورت برای p و a دو حالت در نظر می‌گیریم و در هر دو حالت قضیه اثبات می‌شود:

I) اگر $p \nmid a$ پس $(p, a) = 1$ لذا طبق قضیهٔ فرما $a^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$ و اگر طرفین رابطهٔ هم‌نهشتیِ اخیر را در a ضرب کنیم خواهیم داشت:

$$\boxed{a^p \overset{p}{\equiv} a}$$

II) اگر $p|a$ پس باید $p|a\underbrace{(a^{p-1} - 1)}_{m}$، بنابراین $p|a^p - a$ و طبق تعریف هم‌نهشتی داریم، $a^p \overset{p}{\equiv} a$.

قضیهٔ ویلسون. هرگاه p عددی اول باشد در این‌صورت:

$$(p - 1)! \overset{p}{\equiv} -1$$

تست. باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 1^{12} + 2^{12} + \dots + 12^{12}$ بر ۱۳ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۴

حل. گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} (۱۳ \text{ و } ۱) = ۱ \xRightarrow{\text{فرما}} ۱^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \\ (۱۳ \text{ و } ۲) = ۱ \xRightarrow{\text{فرما}} ۲^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \\ \vdots \\ (۱۳ \text{ و } ۱۲) = ۱ \xRightarrow{\text{فرما}} ۱۲^{۱۲} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow A \overset{۱۳}{\equiv} \overbrace{۱+۱+\ldots+۱}^{\text{۱۲ بار}} = ۱۲$$

تست. باقی‌مانده تقسیم عدد $A = ۱^{۱۳} + ۲^{۱۳} + \ldots + ۱۳^{۱۳}$ بر ۱۳ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

حل. گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$\left.\begin{array}{l} ۱^{۱۳} \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \\ ۲^{۱۳} \overset{۱۳}{\equiv} ۲ \\ \vdots \\ ۱۲^{۱۳} \overset{۱۳}{\equiv} ۱۲ \\ ۱۳^{۱۳} \overset{۱۳}{\equiv} ۱۳ \end{array}\right\} \Rightarrow A \overset{۱۳}{\equiv} ۱ + ۲ + \ldots + ۱۳$$

$$= \frac{۱۳ \times (۱۳+۱)}{۲} = ۱۳ \times ۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۰$$

تست. باقی‌مانده تقسیم $۵۶۳^{۱۷}$ بر ۱۷ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

حل. گزینهٔ (۳) صحیح است، زیرا

۱۷ اوّل است $\Rightarrow ۵۶۳^{۱۷} \overset{۱۷}{\equiv} ۵۶۳ = ۳۳ \times ۱۷ + ۲ \overset{۱۷}{\equiv} ۲$

تست. باقی‌ماندهٔ تقسیم $۳^{۴۰۱}$ بر ۱۰۱ کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

حل. گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

۱۰۱ اوّل است و $(۳,۱۰۱) = ۱ \xRightarrow{\text{فرما}} ۳^{۱۰۰} \overset{۱۰۱}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۳^{۴۰۰} \overset{۱۰۱}{\equiv} ۱$

$\Rightarrow ۳^{۴۰۱} \overset{۱۰۱}{\equiv} ۳$

حل معادلات خطی و دو مجهولی در Z ـ حل معادلات هم‌نهشتی

قضیه. شرط لازم و کافی برای آن‌که معادله $ax + by = c$ در Z دارای جواب باشد، ($x_۰$ و $y_۰$ای در Z یافت شوند به قسمی که $ax_۰ + by_۰ = c$) آن است که بزرگترین شمارندهٔ مشترک a و b، c را بشمارد یعنی: $(a , b)|c$ (منظور از (a , b) همان ب.م.م. است)

نتیجه. اگر $(a , b) = ۱$ در این صورت معادله $ax + by = c$ همواره در Z دارای جواب است.

مثال. معادله $۱۲x - ۷y = ۸$ را حل کنید. (یکی از دسته جوابها را بیابید.)

معادله دارای جواب است $\leftarrow ۸ \mid ۱ = (۱۲ , ۷)$

$$۱۲x - ۷y = ۸ \Rightarrow y = \frac{۱۲x - ۸}{۷} = \frac{۱۴x - ۲x - ۷ - ۱}{۷}$$

$$= ۲x - ۱ - \frac{(۲x+۱)}{۷}$$

از طرفی چون $y \in Z \Rightarrow \frac{۲x + ۱}{۷} = t$

$$\Rightarrow ۲x + ۱ = ۷t \Rightarrow x = \frac{۷t - ۱}{۲} \Rightarrow x = \frac{۶t + t - ۱}{۲}$$

$$= ۳t + \frac{t - ۱}{۲}$$

چون $x \in Z \Rightarrow \frac{t - ۱}{۲} = k \Rightarrow t = ۲k + ۱$

اگر $k = ۰ \rightarrow t = ۱ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow y = ۴$

قضیه. هرگاه $x_۰$ و $y_۰$ جوابهایی برای معادله $ax + by = c$ باشند و $(a , b) = d$ در این‌صورت بقیهٔ جوابهای معادلهٔ فوق از رابطه‌های زیر به دست خواهند آمد:

$$\begin{cases} x = x_۰ - k\dfrac{b}{d} \\ y = y_۰ - k - \dfrac{a}{d} \end{cases}$$

نکته. همواره هر معادلهٔ هم‌نهشتی‌مانند: $ax \overset{m}{\equiv} b$ را می‌توان به شکل یک معادلهٔ خطی و به‌صورت $ax + my = b$ نوشت.

قضیه. (با توجه به نکته قبل و قضیهٔ قبل) شرط لازم و کافی برای آن‌که معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ در Z دارای جواب باشد آن است که $(a.m)|b$.

نتیجه. در صورتی که $(a , m) = ۱$ معادلهٔ هم‌نهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$ همواره در Z جواب خواهد داشت.

تست. به ازای کدام مقدار b معادلهٔ $(۱۵ + b)x + by = ۲۰$ در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب دارد؟ (سراسری ۷۱)

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۱۵ ۴) ۳۰

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

شرط جواب: $(۱۵ + b , b) \mid ۲۰ \xRightarrow{b = ۵} (۵ \text{ و } ۲۰) = ۵ \mid ۲۰$

نکته. دیدیم که اگر $(a , m) = ۱$ معادلهٔ $ax \overset{m}{\equiv} b$ همواره دارای

جواب است. برای حل این گونه معادلات هرگاه بتوانیم معادلهٔ هم‌نهشتی را به‌صورت: $ax \overset{m}{\equiv} ak$ در آوریم با توجه به این‌که $(a\ ,\ m) = ۱$ به‌راحتی می‌توان a را از طرفین حذف کرده و جوابی برای x به‌صورت $x \overset{m}{\equiv} k$ به‌دست آوریم.

تست. جواب کلی معادلهٔ $۵x \overset{۶}{\equiv} ۲$ کدام است؟ $(k \in Z)$

۱) $x = ۶k + ۴$ ۲) $x = ۶k - ۴$

۳) $x = ۶k + ۳$ ۴) $x = ۴k + ۶$

حل. گزینهٔ (۱) صحیح است، زیرا:

$$۵x \overset{۶}{\equiv} ۲ \Rightarrow ۵x \overset{۶}{\equiv} \underset{۱۸ \overset{۶}{\equiv} ۰}{۱۸} + ۲ \Rightarrow ۵x \overset{۶}{\equiv} ۵ \times ۴ \Rightarrow x \overset{۶}{\equiv} ۴$$

$$\Rightarrow x - ۴ = ۶k \Rightarrow x = ۶k + ۴$$

تست. معادلهٔ $۹۱x - ۶۵y = ۱۱$ در مجموعهٔ اعداد صحیح: (کنکور سراسری)

۱) فقط یک جواب دارد ۲) جواب ندارد

۳) بی‌شمار جواب دارد ۴) دو جواب دارد

حل. گزینهٔ (۲) صحیح است، زیرا:

$$(۹۱ \text{ و } ۶۵) = ۱۳ \nmid ۱۱$$

مثال. باقی‌مانده تقسیم $۵ \times ۱۸!$ را بر ۱۹ بیابید.

حل. طبق قضیهٔ ویلسون داریم:

$$۱۸! = (۱۹-۱)! \overset{۱۹}{\equiv} -۱ \Rightarrow ۵ \times ۱۸! \overset{۱۹}{\equiv} -۵ \overset{۱۹}{\equiv} ۱۴ \rightarrow r = ۱۴$$

حل چند مسأله نمونه

۱ـ هرگاه یک‌سال با روز سه‌شنبه آغاز شود در این‌صورت:

الف) اول مهرماه همان سال چه روزی است؟

ب) ۲۲ بهمن همان سال چه روزی است؟

حل. برای حل این‌گونه مسائل همواره ۶ ماه اول سال را ۳۱ روز و ۵ ماهِ بعد را ۳۰ روز و ماهِ اسفند را ۲۹ روز در نظر می‌گیریم و برای شروع به حل ابتدا، روزِ تعیین شده در فرض مسأله را مبدأ گرفته (متناظر با عدد صفر) و بقیهٔ روزهای هفته را به‌ترتیب با اعداد ۱ ، ۲ ، ۳ ، ... ، ۶ متناظر می‌گیریم و سپس فاصلهٔ تاریخ داده شده و تاریخ موردِ سؤال را محاسبه کرده و هم‌نهشتی عددِ حاصل را به سنج ۷ به‌دست آورده و در جدول، روز متناظر با آن عدد همان روزِ مطلوب مسأله خواهد بود.

حل الف) چون سال نو با سه‌شنبه آغاز شده پس:

دوشنبه	یکشنبه	شنبه	جمعه	پنج‌شنبه	چهارشنبه	سه‌شنبه
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

از اول فروردین تا اول مهرماه (و خود اول مهرماه) $(۱ + ۳۱ \times ۵ + ۳۰)$ روز است بنابراین:

$$۳۰ + ۵ \times ۳۱ + ۱ = ۱۸۶ \overset{۷}{\equiv} ۴$$

که عدد ۴ در جدول متناظر با شنبه است یعنی اول مهرماه شنبه خواهد بود.

ب)

$$\text{فاصلهٔ اول‌فروردین تا ۲۲ بهمن} = (۲۲ + ۳۰ \times ۴ + ۳۱ \times ۵ + ۳۰) = ۳۲۷$$

$$\text{و } ۳۲۷ \overset{۷}{\equiv} ۵$$

یعنی ۲۲ بهمن روز یکشنبه خواهد بود.

۲ـ ثابت کنید اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ در این‌صورت برای $c \in Z$ داریم:

$$ac \overset{m}{\equiv} bc$$

حل: طبق فرض داریم:

$$a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m | a - b \Rightarrow m | c(a - b)$$

$$\Rightarrow m | ac - bc \Rightarrow ac \overset{m}{\equiv} bc$$

۳ـ باقیمانده تقسیم $۴^{۱۳۷۵}$ را بر ۷ بیابید.

حل:

$$۴^{۳} = ۶۴ \overset{۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۴^{۳} \overset{۷}{\equiv} ۱$$

حال ۱۳۷۵ را بر ۳ تقسیم می‌کنیم:

$$۱۳۷۵ = ۴۵۸ \times ۳ + ۱$$

$$\Rightarrow (۴^{۳})^{۴۵۸} \times ۴ \overset{۷}{\equiv} ۱^{۴۵۸} \times ۴ \Rightarrow ۴^{۱۳۷۵} \overset{۷}{\equiv} ۴$$

پس باقیمانده تقسیم ۴ است.

۴ـ رقمهای سمت راستِ $(۱۳)^{۱۹۹۶}$ و $(۲۷)^{۱۴۱۷}$ را بیابید.

حل: براساس مطالبِ گفته شده کافی است باقیماندهٔ تقسیم توانهایِ اعداد داده شده را بر عدد ۴ بیابیم و رقم یکانِ پایه را به توان باقیمانده برسانیم (اگر $r = ۰$ آن را برابر با ۴ فرض می‌کنیم):

$$۱۹۹۶ = ۴ \times ۴۹۹ \Rightarrow r = ۰$$

$$۱۳^{۱۹۹۶} \overset{۱۰}{\equiv} ۳^{۴} = ۸۱ \overset{۱۰}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۱۳^{۱۹۹۶} \overset{۱۰}{\equiv} ۱$$

$$۱۴۱۶ = ۳۵۴ \times ۴ + ۱ \Rightarrow r = ۱$$

$$۲۷^{۱۴۱۷} \overset{۱۰}{\equiv} ۷^{۱} \Rightarrow (۲۷)^{۱۴۱۷} \overset{۱۰}{\equiv} ۷$$

۵ـ نشان دهید باقیماندهٔ تقسیم عدد $A = 6^{37} - 12$ بر ۱۳، ۷ است.

حل: چون ۱۳ اوّل بوده و ۱ = (۱۳و۶) پس طبق قضیهٔ فرما داریم:

$$6^{12} \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow (6^{12})^3 \overset{13}{\equiv} 1 \Rightarrow 6^{36} \times 6 \overset{13}{\equiv} 6$$

$$\Rightarrow 6^{37} \overset{13}{\equiv} 6 \Rightarrow 6^{37} - 12 \overset{13}{\equiv} -6 \overset{13}{\equiv} 7 \Rightarrow 6^{37} - 12 \overset{13}{\equiv} 7$$

۶ـ ثابت کنید $2^{6n} - 1$ بر ۷ بخش‌پذیر است.

حل: ۷ اول بوده و ۱=(۷ و ۲) پس طبق قضیهٔ فرما داریم:

$$2^6 \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow (2^6)^n \overset{7}{\equiv} 1^n \Rightarrow 2^{6n} \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^{6n} - 1 \overset{7}{\equiv} 0$$

۷ـ به روش استقراء ثابت کنید $A = 2^{2n} + 6n - 1 \overset{9}{\equiv} 0$.

حل:

(گام اول) $p(1): 2^{2\times 1} + 6 \times 1 - 1 = 9 \overset{9}{\equiv} 0 \Rightarrow p(1) \equiv T$

فرض استقراء $p(k) \equiv T \rightarrow 2^{2k} + 6k - 1 \overset{9}{\equiv} 0$ (گام دوم)

حکم استقراء $p(k+1): 2^{2k+2} + 6k + \underbrace{6-1}_{5} \overset{9}{\equiv} 0$ (گام سوّم)

طرفین فرض استقراء را در 2^2 ضرب می‌کنیم

$$\Rightarrow 2^{2k+2} + 24k - 4 \overset{9}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow 2^{2k+2} + 6k + 18k + 5 - 9 \overset{9}{\equiv} 0$$

$$\Rightarrow 2^{2k+2} + 6k + 5 \overset{9}{\equiv} 9 - 18k$$

و چون $9 - 18k = 9(1 - 2k) \overset{9}{\equiv} 0$:

$$\Rightarrow 2^{2k+2} + 6k + 5 \overset{9}{\equiv} 0$$

۸ـ ثابت کنید اگر n مضرب ۳ نباشد عدد $A = 17^{2n} + 17^n + 1$ بر ۳۰۷ بخش‌پذیر است. $(17^{2n} + 17^n + 1 \overset{307}{\equiv} 0)$

حل: اگر n مضرب ۳ نباشد دو حالت ممکن است:

I) $n = 3k + 1$ که در این حالت داریم:

$$A = 17^{6k+2} + 17^{3k+1} + 1 = (17^3)^{2k} \times 17^2 + (17^3)^k \times 17 + 1$$

از طرفی چون $17^3 \overset{307}{\equiv} 1$ و $17^2 \overset{307}{\equiv} -18$ پس،

$$A \overset{307}{\equiv} (1)^{2k}(-18) + (1)^k \times 17 + 1 = -18 + 17 + 1 = 0$$

II) اگر $n = 3k + 2$ در این حالت داریم:

$$A = 17^{6k+4} + 17^{3k+2} + 1 = (17^3)^{2k} \times 17^3 \times 17 + (17^3)^k \times 17^2 + 1 \Rightarrow A \overset{307}{\equiv} (1)^{2k} \times 1 \times 17 + (1)^k \times (-18) + 1 = 17 - 18 + 1 = 0$$

۹ـ رقم یکان عدد $A = 4^{4k+2} + 17^{8k+3}$ را بیابید.

حل: چون توان عدد ۴ زوج است طبق مطالب گفته شده همواره عدد 4^{4k+2} به ازای هر $k \in IN$ به ۶ ختم می‌شود و از طرفی چون توان ۱۷ را می‌توان به شکل $4k + 3$ نوشت پس رقم یکان 17^{8k+3} برابر است با رقم یکان 7^3 که ۳ است (باقیماندهٔ تقسیم $8k + 3$ بر ۴، ۳ است) بنابراین:

$$A = 4^{4k+2} + 17^{8k+3} \overset{10}{\equiv} 6 + 3 = 9$$

یعنی همواره عدد A به ۹ ختم می‌شود.

۱۰ـ ثابت کنید عدد $A = 5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ بر ۲۳ بخش‌پذیر است.

$$5^2 \overset{23}{\equiv} 2 \Rightarrow (5^2)^n \overset{23}{\equiv} 2^n \Rightarrow 5^{2n+1} \overset{23}{\equiv} 2^n \times 5$$

$$\Rightarrow A \overset{23}{\equiv} 2^n \times 5 + 2^n \times 16 + 2^n \times 1 = 23 \times 2^n \overset{23}{\equiv} 0$$

قضیه. رابطهٔ هم‌نهشتی به سنج m روی Z یک رابطهٔ هم‌ارزی است،

$1)\ \forall a, b \in Z ; a \overset{m}{\equiv} a$ (زیرا $\rightarrow m|\underbrace{a - a}_{0}$)

$2)\ \forall a, b \in Z ; a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow b \overset{m}{\equiv} a$ (زیرا $m|a-b \Leftrightarrow m|b-a$)

مثلاً: می‌خواهیم ببینیم که هم‌نهشتی $x \overset{23}{\equiv} 48$ برای چه xای می‌تواند تقسیم 2^{1374} بر k کدام است؟ (در صورتی‌که بدانیم $k > 19$ باشد.)

$$2^{1370} \times 2^4 \overset{k}{\equiv} 1 \times 2^4 \Rightarrow 2^{1374} \overset{k}{\equiv} 16$$

و چون $k > 19$ پس $k > 16$ بنابراین باقی ماندهٔ تقسیم ۱۶ بر k برابر با ۱۶ است که همان باقی‌مانده تقسیم 2^{1374} بر k است.

$$\left.\begin{array}{l} 287 \overset{5}{\equiv} 2 \Rightarrow 287^3 \overset{5}{\equiv} 2^3 \overset{5}{\equiv} 3 \\ 279 \overset{5}{\equiv} 4 \Rightarrow 279^3 \overset{5}{\equiv} 4^3 \overset{5}{\equiv} 4 \end{array}\right\} \Rightarrow 287^3 - 279^3 \overset{5}{\equiv} 3 - 4 \overset{5}{\equiv} 4$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^3 = 8 \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^{3n} \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^{3n+1} \overset{7}{\equiv} 2 \\ 13 \overset{7}{\equiv} -1 \Rightarrow 13^{2n} \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow 13^{2n+1} \overset{7}{\equiv} 13 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow 2^{3n+1} + 13^{2n+1} \overset{7}{\equiv} 15 \overset{7}{\equiv} 1$$

$$((19)^2)^{70} = (19)^{140} \overset{10}{\equiv} 9^{140} \overset{\text{۱۴۰ زوج است}}{\Rightarrow} 9^{140} \overset{10}{\equiv} 1$$

تست. باقی‌مانده تقسیم 65^{40} بر عدد ۹ کدام است؟
(کنکور سراسری)

$$\left.\begin{array}{l} 68 \overset{m}{\equiv} r \\ 145 \overset{m}{\equiv} r \end{array}\right\} \Rightarrow \text{با توجه به فرض و قضیه اساسی}$$

$$\Rightarrow 145 - 68 \overset{m}{\equiv} 0 \Rightarrow 77 \overset{m}{\equiv} 0$$

$$\left.\begin{array}{l} a \overset{37}{\equiv} 15 \\ b \overset{37}{\equiv} 29 \end{array}\right\} \Rightarrow a-b \overset{37}{\equiv} -14 \overset{37}{\equiv} 23 \quad \text{با توجه به قضیه اساسی} \Rightarrow$$

چون همهٔ جملات به جز جملهٔ اول و آخر عامل ab دارند پس:

$B = \{ac_1 + b , ac_2 + b ,..., ac_m + b\}$ نیز یک د.ک.م. به سنج m است.

$$\left.\begin{array}{l} (1 \text{ و } 13) = 1 \overset{\text{فرما}}{\Rightarrow} 1^{12} \overset{13}{\equiv} 1 \\ (2 \text{ و } 13) = 1 \overset{\text{فرما}}{\Rightarrow} 2^{12} \overset{13}{\equiv} 1 \\ \vdots \\ (12 \text{ و } 13) = 1 \overset{\text{فرما}}{\Rightarrow} 12^{12} \overset{13}{\equiv} 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A \overset{12}{\equiv} \overbrace{1+1+...+1}^{\text{۱۲ بار}} = 12$$

شرط جواب: $(15 + b , b) \mid 20 \overset{b=5}{\Longrightarrow} (5 \text{ و } 20) = 5 \mid 20$

تست. جواب کلی معادلهٔ $5x \overset{6}{\equiv} 2$ کدام است؟ $(k \in Z)$

$$2^6 \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow (2^6)^n \overset{7}{\equiv} 1^n \Rightarrow 2^{6n} \overset{7}{\equiv} 1 \Rightarrow 2^{6n} - 1 \overset{7}{\equiv} 0$$

حکم استقراء $p(k+1): 2^{2k+2} + 6k + \frac{6-1}{5} \equiv 0$ (گام سوّم)

ادب ریاضی

عملاً، ریشه‌های تمام ریاضیاتی که با آن آشنایید به طریقی به طبیعت مربوط می‌شود. حساب و جبر به‌علت احتیاج بشر به شمارش تکامل یافته‌اند، مدیریت مالی و دیگر عملیات سادهٔ زندگی روزمره، هندسه و مثلثات از مسائل اندازه‌گیری زمین پیشرفت کرده‌اند، و مساحی، و نجوم، و حساب جامع و فاضل برای کمک به حل مسائل معینی در فیزیک اختراع شده‌اند. در سالهای اخیر اشکال جدیدی از ریاضیات برای کمک به: «از عهدهٔ مسائلی در علوم اجتماعی، تجاری، زیست‌شناسی، و جنگی برآمدن» ، اختراع شدند و مطمئناً از سایر مطالب ناشی از کوششهای بشر، موضوعات ریاضی جدیدی به‌وجود خواهند آمد. در این صورت تمام این سرچشمه‌های مفاهیم ریاضی را روی هم می‌ریزیم و آنها را طبیعت می‌خوانیم.

اصول ریاضی: غلامرضا یاسی‌پور