رابطه‌های هم‌ارزی - کلاس‌های هم‌ارزی

برای دانش‌آموزان سال سوم ریاضی

یکی از مفاهیمی که بسیاری از دانش‌آموزان در شناخت آن دچار مشکل هستند، مفهوم کلاس‌های هم‌ارزی است. در این‌جا سعی می‌کنیم این مفهوم را با زبانی ساده برای شما روشن کنیم. ما در این شماره، مفهوم رابطهٔ هم‌ارزی را به‌طور دقیق شناسایی می‌کنیم و در شمارهٔ آینده به مفهوم کلاس‌های هم‌ارزی می‌پردازیم.

تعریف رابطه: هر زیر مجموعه از حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعهٔ A و B را یک رابطه از A روی B (یا از A در B) می‌نامیم. به عنوان مثال، اگر $A = \{a,b,c\}$ و $B = \{1,2,3\}$،

$$A \times B = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2),(c,3)\}$$

و چون $A \times B$، ۹ عضو دارد، بنابراین $512 = 2^9$ زیرمجموعه دارد. به هریک از این ۵۱۲ زیرمجموعه، یک رابطه از A به B می‌گوییم. به‌عنوان مثال، رابطه‌های R_1 و R_2 و R_3 را در نظر بگیرید:

$R_1 = \{(a,1),(b,1)\}$ و $R_2 = \{(a,2)\}$ و

$$R_3 = \{(b,1),(b,2),(c,1),(c,3)\}$$

همچنین رابطهٔ R را که از مجموعهٔ A به خودش تعریف شده باشد، رابطه‌ای روی A می‌نامیم. در حالت کلی رابطهٔ R از A به B را با نماد $R:A \longrightarrow B$ نمایش می‌دهیم. در مثال بالا می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} R_4 : A \longrightarrow B \\ R_4 = \{(a,1),(b,1),(c,1)\} \end{cases}$$ و

$$\begin{cases} R_5 : A \longrightarrow A \\ R_5 = \{(a,a),(a,b),(b,c)\} \end{cases}$$

سؤال: اگر مجموعهٔ A، n عضو داشته باشد، چند رابطه

هوشنگ شرقی

روی A می‌توان نوشت؟ اگر مجموعهٔ B، m عضو داشته باشد، چند رابطه از A در B می‌توان نوشت؟

انواع رابطه‌ها

۱. رابطهٔ انعکاسی

رابطهٔ R روی مجموعهٔ A را انعکاسی می‌نامیم؛ هرگاه:

برای هر $x \in A \Rightarrow xRx((x,x) \in R)$

به زبان ساده R یک رابطهٔ انعکاسی روی مجموعهٔ A است؛ هرگاه برای هر عضو x از A، زوج مرتب (x,x) در رابطهٔ R وجود داشته باشد.

مثال. رابطه‌های R_1 و R_2 در مجموعهٔ $A = \{1,2,3,4\}$ تعریف شده‌اند:

$R_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(4,4)\}$

$R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(4,3),(4,4)\}$

کدام‌یک از روابط فوق انعکاسی هستند؟

جواب: R_1 انعکاسی نیست؛ زیرا شامل (۳ و ۳) نیست؛ ولی R_2 انعکاسی است.

نتیجه: هر رابطه‌ای که روی مجموعهٔ A از مثال بالا تعریف شده و انعکاسی باشد، باید حتماً شامل چهار زوج مرتب (۱ و ۱) و (۲ و ۲) و (۳ و ۳) و (۴ و ۴) باشد و بدیهی است که می‌تواند شامل هر تعداد زوج مرتب دیگر هم باشد.

سؤال: در مجموعهٔ A (از مثال قبل) چند رابطهٔ انعکاسی می‌توان نوشت؟

جواب: چون A، ۴ عضو دارد، پس A^2، ۱۶ عضو (زوج مرتب) دارد. چهار تا از این زوج‌های مرتب، حتماً باید در رابطه‌های انعکاسی باشند. هریک از ۱۲ زوج مرتب دیگر؛ دو وضع دارند، می‌توانند در رابطهٔ انعکاسی باشند یا نباشند.

بنابراین ترکیب آنها 2^{12} حالت مختلف دارد و 2^{12} رابطه انعکاسی روی A می‌توان نوشت.

تمرین. در حالت کلی، روی یک مجموعهٔ n عضوی چند رابطهٔ انعکاسی می‌توان نوشت؟

مثال. آیا رابطهٔ زیر که در مجموعهٔ اعداد حقیقی نوشته شده، انعکاسی است؟

$$\begin{cases} R:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ xRy \Leftrightarrow x+y\le 2\end{cases}$$

حل: فرض کنیم R انعکاسی باشد، در این صورت داریم:

$$xRx \Rightarrow x+x\le 2 \Rightarrow 2x\le 2 \Rightarrow x\le 1$$

ولی نابرابری فوق برای همهٔ اعضای $\mathbb{R}$ برقرار نیست. به عنوان مثال، $2\not R 2$؛ زیرا $2+2>2$ و درنتیجه R انعکاسی نیست. اما با توجه به شرط فوق، اگر دامنه و برد تعریف رابطه را از $\mathbb{R}$ به بازهٔ $(-\infty,1]$ محدود کنیم، یعنی رابطهٔ زیر:

$$\begin{cases} R:(-\infty,1]\to(-\infty,1]\\ xRy \Leftrightarrow x+y\le 2\end{cases}$$

یک رابطهٔ انعکاسی خواهد بود.

تمرین ۱. کدام یک از روابط زیر، خاصیت انعکاسی دارند؟

الف) $\begin{cases} R:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\\ xRy \Leftrightarrow xy\ge 0\end{cases}$

ب) $\begin{cases} R:Z\to Z\\ xRy \Leftrightarrow x|y\end{cases}$

ج) $\begin{cases} R:N\to N\\ xRy \Leftrightarrow x+y\le xy\end{cases}$

مثال. آیا رابطهٔ موازی بودن در مجموعه خطوط صفحه، خاصیت انعکاسی دارد؟

حل: ابتدا توجه می‌کنیم که مفهوم این رابطه یعنی چه؟ اگر این رابطه را با نماد ریاضی نمایش دهیم، با فرض آن‌که A مجموعه خطوط صفحه باشد، می‌نویسیم:

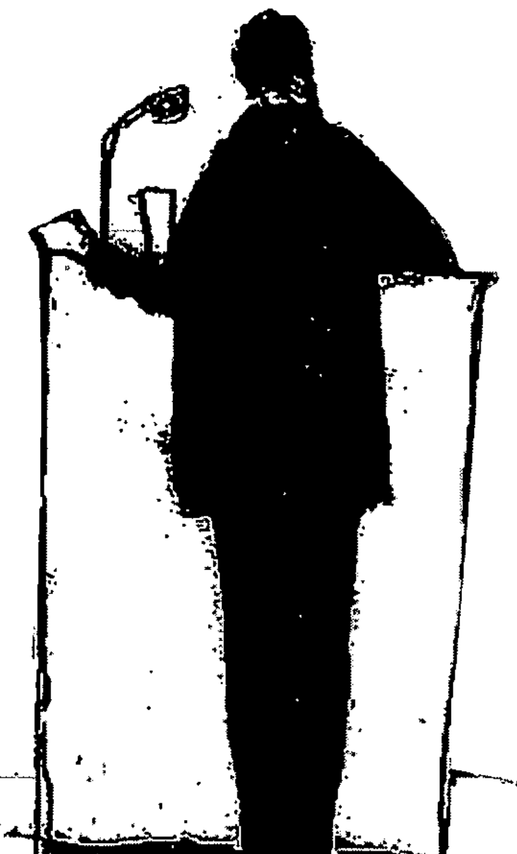
$$\begin{cases} R:A\to A\\ d_1Rd_2 \Leftrightarrow d_1\parallel d_2\end{cases}$$

و این رابطهٔ انعکاسی است؛ زیرا طبق قرارداد، هر خط با خودش موازی است:

$$d_1Rd_1 \Leftrightarrow d_1\parallel d_1$$

سؤال. آیا رابطهٔ همشهری بودن در مجموعهٔ انسان‌ها، یک رابطهٔ انعکاسی است؟

رابطهٔ دوستی چطور؟



۲. رابطهٔ تقارنی

رابطهٔ R در مجموعهٔ A تقارنی است، اگر و فقط اگر از xRy نتیجه شود yRx؛ یعنی داشته باشیم:

$$(x,y)\in R \Leftrightarrow (y,x)\in R$$

مثال: آیا رابطه‌های $R_۱$ و $R_۲$ که در مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ به صورت زیر تعریف شده‌اند، تقارنی هستند؟

$$R_۱=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳)\}$$
$$R_۲=\{(۱,۲),(۲,۱),(۳,۳)\}$$

حل: $R_۱$ تقارنی نیست؛ زیرا $(۲,۳)\in R_۱$ ولی $(۳,۲)\notin R_۱$، اما $R_۲$ تقارنی است.

مثال. رابطه‌های $R_۱$، $R_۲$، $R_۳$ و $R_۴$ را در مجموعهٔ A از مثال قبل چنان بنویسید که $R_۱$ انعکاسی باشد و تقارنی نباشد، $R_۲$ تقارنی باشد و انعکاسی نباشد، $R_۳$ نه تقارنی باشد و نه انعکاسی، و $R_۴$ هم تقارنی باشد و هم انعکاسی.

حل:

$$R_۱=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۱,۴)\}$$
$$R_۲=\{(۲,۳),(۳,۲),(۳,۳),(۴,۴)\}$$
$$R_۳=\{(۱,۱),(۲,۳),(۴,۱)\}$$
$$R_۴=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۴,۲),(۲,۴),(۲,۳),(۳,۲)\}$$

مثال. آیا رابطهٔ R که در مجموعهٔ اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف شده، تقارنی است؟

$$\begin{cases} R: \mathbb{R}\to \mathbb{R} \\ xRy \Leftrightarrow x+y\geq ۲ \end{cases}$$

حل. برای بررسی خاصیت تقارنی در مورد روابطی که با ضابطه بیان شده‌اند، نتایج xRy و yRx را می‌نویسیم (یعنی در ضابطه، جای x و y را با هم عوض می‌کنیم). اگر این دو، یکدیگر را نتیجه بدهند، رابطهٔ فوق تقارنی است و در غیر این صورت، تقارنی نیست. به عنوان مثال، در مورد رابطهٔ بالا می‌توان نوشت:

$$xRy \Leftrightarrow yRx$$
$$x+y\geq ۲ \Leftrightarrow y+x\geq ۲$$

و گزارهٔ دو شرطی فوق، همواره درست است، لذا رابطهٔ R تقارنی است.

مثال. آیا رابطهٔ زیر در مجموعهٔ اعداد حقیقی تقارنی است؟

$$\begin{cases} R: \mathbb{R}\to \mathbb{R} \\ xRy \Leftrightarrow x^۲+y^۳=۹ \end{cases}$$

حل.

$$xRy \Leftrightarrow yRx$$
$$x^۲+y^۳=۹ \overset{?}{\Leftrightarrow} y^۲+x^۳=۹$$

واضح است که گزارهٔ دو شرطی بالا همواره درست نیست. به‌عنوان **مثال**، اگر $x=۱$ و $y=۲$ باشد، تساوی سمت چپ درست است؛ ولی تساوی سمت راست درست نیست. پس این رابطه، تقارنی نیست.

تمرین ۲. کدام یک از روابط ذکر شده در تمرین ۱، خاصیت تقارنی دارند؟

مثال. آیا رابطهٔ موازی بودن در مجموعهٔ خط های صفحه، خاصیت تقارنی دارد؟ رابطهٔ عمود بودن چطور؟

حل: رابطهٔ موازی بودن، خاصیت تقارنی دارد؛ زیرا: $d_۱\parallel d_۲ \Leftrightarrow d_۲\parallel d_۱$، و رابطهٔ عمود بودن نیز خاصیت تقارنی دارد؛ زیرا بدیهی است که: $d_۱\perp d_۲ \Leftrightarrow d_۲\perp d_۱$.

مثال. آیا رابطهٔ دوستی در مجموعهٔ انسان‌ها، خاصیت تقارنی دارد؟ رابطهٔ برادری چطور؟

حل: رابطهٔ دوستی خاصیت تقارنی دارد؛ زیرا بدیهی است که اگر x دوست y باشد، y هم دوست x است (دوستی دو طرفه است؛ توجه کنید که رابطهٔ دوستی با رابطهٔ دوست‌داشتن، اشتباه نشود). اما رابطهٔ برادری تقارنی نیست؛ زیرا اگر x برادر y باشد، لزومی ندارد که y برادر x باشد (ممکن است y خواهر x باشد).

۳. رابطهٔ تعدی (تراگذری یا ترایایی)

رابطهٔ R در مجموعهٔ A را تعدی گوییم؛ اگر و فقط اگر هرگاه xRy و yRz، آن‌گاه حتماً داشته باشیم: xRz و یا این‌که: $(x,y)\in R$ و $(y,z)\in R \Rightarrow (x,z)\in R$.

از این‌جا روشن است که رابطهٔ تعدی هیچ‌گونه شرطی را به صورت ابتدا به ساکن به رابطه تحمیل نمی‌کند (برخلاف رابطهٔ انعکاسی)؛ بلکه می‌گوید اگر زوج‌های مرتب (x,y) و (y,z) متعلق به R بود (اگر بود)، آن‌گاه حتماً زوج مرتب (x,z) هم باید باشد.

مثال. کدام یک از روابط زیر که روی مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ تعریف شده‌اند، دارای خاصیت تعدی هستند؟

$R_۱=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۱,۳),(۳,۴),(۱,۴)\}$

$R_۲=\{(۱,۲),(۲,۱),(۱,۱)\}$

$R_۳=\{(۱,۲),(۳,۲),(۴,۴)\}$

$R_۴=\{(۲,۴),(۴,۲),(۲,۲),(۴,۴),(۱,۱)\}$

$R_۵=\{(۲,۳)\}$

حل: رابطهٔ $R_۱$ دارای خاصیت تعدی نیست؛ زیرا به عنوان مثال: ۲R۴ و ۳R۴ و ۲R۳ (یک مثال نقض کافی است).

رابطهٔ $R_۲$ نیز تعدی نیست؛ زیرا: ۲R۲ و ۱R۲ و ۲R۱، اما با اضافه شدن زوج (۲ و ۲) این رابطه به رابطه‌ای تعدی تبدیل خواهد شد.

رابطهٔ $R_۳$ تعدی است؛ زیرا چنانچه مشاهده می‌کنید، مؤلفهٔ دوم هیچ کدام از زوج‌های مرتب این رابطه، خود مؤلفهٔ اول زوج‌های مرتب دیگر نیستند؛ یعنی هیچ مثال نقضی برای تعدی بودن رابطهٔ فوق وجود ندارد.

رابطهٔ $R_۴$ نیز تعدی است؛ زیرا برای هر x، y و z که $xR_۴y$ و $yR_۴z$ داریم: $xR_۴z$ درواقع چند زوج مرتب داریم که مؤلفهٔ دوم آنها، مؤلفهٔ اول زوج مرتب دیگر است و در مورد آنها شرط تعدی برقرار است:

$۲R_۴۴$ و $۴R_۴۲ \Rightarrow ۲R_۴۲$ و $۴R_۴۲$ و $۲R_۴۴ \Rightarrow ۴R_۴۴$ و ...

رابطهٔ $R_۵$ نیز تعدی است. (چرا؟)

مثال. روی مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ رابطه‌هایی بنویسید که به ترتیب:

۱) تعدی باشد و تقارنی و انعکاسی نباشد.

۲) تعدی و تقارنی باشد و انعکاسی نباشد.

۳) تقارنی باشد و انعکاسی و تعدی نباشد.

۴) انعکاسی باشد و تقارنی و تعدی نباشد.

۵) تعدی و انعکاسی باشد و تقارنی نباشد.

۶) انعکاسی، تقارنی و تعدی باشد.

حل: به ترتیب می‌توان نوشت:

$R_۱=\{(۱,۲),(۳,۴)\}$

$R_۲=\{(۱,۳),(۳,۳),(۳,۱),(۱,۱)\}$

$R_۳=\{(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱),(۱,۴)\}$

$R_۴=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۲,۳),(۳,۴)\}$

$R_۵=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۲,۳)\}$

$R_۶=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۱,۲),(۲,۱),(۳,۴),(۴,۳)\}$

مثال. کدام یک از رابطه‌های زیر تعدی هستند:

$$\begin{cases} R_۱: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ xR_۱y \Leftrightarrow x^۲-y^۲=x-y \end{cases} \qquad \begin{cases} R_۲: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ xR_۲y \Leftrightarrow x+y\geq ۲ \end{cases}$$

حل: برای تشخیص وجود یا عدم وجود خاصیت تعدی در یک رابطه، به کمک ضابطهٔ آن، مفاهیم xRy و yRz را می‌نویسیم. اگر از ترکیب این دو بتوان نتیجه xRz را گرفت، رابطه مزبور تعدی است؛ مانند رابطهٔ $R_۱$:

$$xR_۱y,\ \ yR_۱z \overset{?}{\Rightarrow} xR_۱z$$

$$\begin{array}{l} +\begin{cases} x^۲-y^۲=x-y \\ y^۲-z^۲=y-z \end{cases} \\ \hline x^۲-z^۲=x-z \Rightarrow xR_۱z \end{array}$$

ولی در رابطهٔ $R_۲$ چنین نیست:

$$xR_۲y,\ \ yR_۲z \overset{?}{\Rightarrow} xR_۲z$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y\geq ۲ \\ y+z\geq ۲ \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} x+z\geq ۲$$

بدیهی است که نتیجهٔ بالا درست نیست؛ زیرا مثلاً:

$(1,1/5) \in R_2(1+1/5 \geq 2)$, $(1/5,0/7) \in R_2(1/5+0/7 \geq 2)$,

$(1,0/7) \notin R_2(1+0/7 < 2)$

تمرین. کدام یک از رابطه‌های تمرین ۱ خاصیت تعدی دارند؟

مثال. آیا رابطهٔ موازی بودن در مجموعه خطوط صفحه، یک رابطهٔ تعدی است؟ رابطهٔ عمود بودن چطور؟

حل: رابطهٔ موازی بودن، یک رابطهٔ تعدی است؛ زیرا:

$d_1 \| d_2, d_2 \| d_3 \Rightarrow d_1 \| d_3$

ولی رابطهٔ عمود بودن تعدی نیست؛ زیرا از هندسه می‌دانیم:

$d_1 \perp d_2$ و $d_2 \perp d_3 \Rightarrow d_1 \| d_3$

(و نتیجه نمی‌شود که: $d_1 \perp d_3$)

مثال. آیا رابطهٔ دوستی در مجموعهٔ انسان‌ها، یک رابطهٔ تعدی است، رابطهٔ برادری چطور؟

حل: رابطهٔ دوستی تعدی نیست؛ زیرا واضح است که اگر x دوست y و y دوست z باشد، لزومی ندارد که x دوست z باشد؛ ولی رابطهٔ برادری خاصیت تعدی دارد؛ زیرا اگر x برادر y و y برادر z باشد، x برادر z است (z می‌تواند دختر یا پسر باشد).

سؤال. آیا رابطهٔ همشهری بودن در مجموعهٔ انسان‌ها، یک رابطهٔ تعدی است؟

رابطهٔ هم‌قد بودن یا هم‌وزن بودن چطور؟

اکنون می‌توانیم یک مفهوم اساسی را در ریاضی تعریف کنیم:

رابطهٔ هم‌ارزی

رابطه‌ای که سه خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی را با هم داشته باشد، یک رابطهٔ هم‌ارزی می‌نامیم. به عنوان مثال، رابطهٔ موازی بودن در مجموعه خط‌های صفحه همان‌گونه که دیدیم، هر سه خاصیت انعکاسی، تقارنی و تعدی را داشت، یک رابطهٔ هم‌ارزی می‌باشد؛ ولی رابطهٔ دوستی در مجموعهٔ انسان‌ها چون خاصیت تعدی ندارد، یک رابطهٔ هم‌ارزی نیست.

تمرین ۴. وجود یا عدم وجود هریک از خواص انعکاسی، تقارنی و تعدی را در مورد هریک از روابط زیر تحقیق کنید. روابط هم‌ارزی را در میان این روابط مشخص کنید:

۱) $\left\{R_1:\{1,2,3,4,5\} \longrightarrow \{1,2,3,4,5\}\right.$

$R_1 = \{(1,1),(2,5),(3,2),(2,2)\}$

۲) $\begin{cases} R_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xR_2y \Leftrightarrow x+y<2 \end{cases}$

۳) $\begin{cases} R_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xR_3y \Leftrightarrow 2x+y=5 \end{cases}$

۴) $\begin{cases} R_4: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xR_4y \Leftrightarrow x^2+y^2+xy=1 \end{cases}$

۵) $\begin{cases} R_5:\{-1,2,3,4,5\} \longrightarrow \{-1,2,3,4,5\} \\ R_5 = \{(-1,4),(2,3),(4,5),(3,5),(3,4),(2,5),(2,4),(-1,5)\} \end{cases}$

۶) $\begin{cases} R_6: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xR_6y \Leftrightarrow |x-y|<1 \end{cases}$

۷) $\begin{cases} R_7: Z \to Z \\ xR_7y \Leftrightarrow x-y=7k \end{cases}$

۸) $\begin{cases} R_8: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xR_8y \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor \end{cases}$

۹) $\begin{cases} R_9: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ xR_9y \Leftrightarrow x^3-y^3=x^2-y^2 \end{cases}$

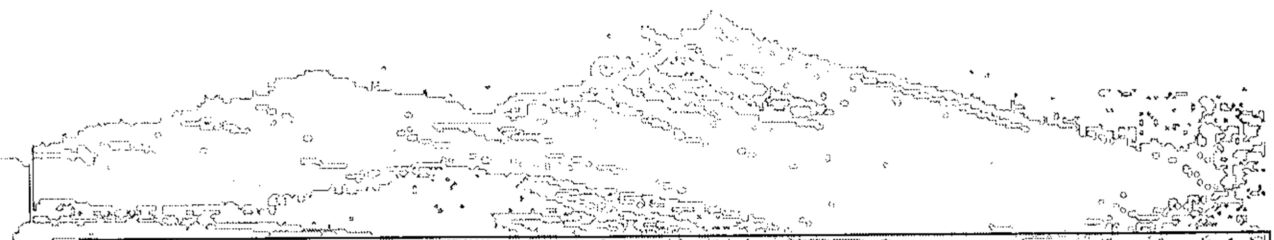
تمرین ۵. روابطی روی مجموعهٔ $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ بنویسید که:

الف) انعکاسی باشد و تقارنی و تعدی نباشد.

ب) تقارن و تعدی باشد و انعکاسی نباشد.

ج) تقارنی و تعدی باشد و انعکاسی نباشد.

د) هم‌ارزی باشد.



اشاره

در شمارهٔ قبل مسائلی را عنوان کردیم که برای آن‌ها راه‌حل‌هایی از حساب را آورده بودیم که آن راه‌حل‌ها نسبت به راه‌های جبری جالب‌تر بود و ملاحظه گردید که حساب در برخی حالت‌ها، کارآمدتر از جبر است. اکنون ادامهٔ مطلب را در پی می‌آوریم:

حل برخی معادله‌های نامتعارف

از همان زمانی که با نوشتن کتاب «جبر و مقابله» توسط خوارزمی در سده‌های سوم و چهارم هجری، جبر وارد در ریاضیات شد، به حل معادله‌ها پرداخته شد. خود واژهٔ جبر به معنای جبران کردن و مقابله به معنای رو به رو قرار دادن دو سوی برابری است. نام «جبر» از همان زمان باقی مانده است، تنها وقتی این واژه به اروپا رفت، آن را برای عموم در زبان فرانسوی «آلجبر» خواندند؛ یعنی «آل» که در زبان عربی به اول «جبر» اضافه شده بود و امروز هم در تمام جهان به صورت‌های مختلف همان «الجبر» می‌خوانند. البته سده‌ها طول کشید تا «جبر حرفی» معمول شد و به صورت امروزی درآمد. ولی هستهٔ اصلی جبر همچنان حل معادله‌هاست. اگرچه امروز «جبر جدید» پیدا شده است که به کلی انتزاعی و غیر از «جبر رسمی» است، ولی این افتخار برای ایران باقی مانده است که نامی که خوارزمی روی این دانش گذاشت، به همهٔ جهان به ارث رسیده است.

ولی در جبر رسمی، گاهی با معادله‌هایی رو به رو می‌شویم که تا حدی «نامتعارف‌اند» و ما در این‌جا به برخی از آن‌ها می‌پردازیم.

مسألهٔ ۱. مقدار تقریبی جواب این معادله را پیدا کنید و دقت تقریب جواب مثبت را معین کنید:

$$۰/۰۰۰۰۰۲x^{۲}+۴x-۱=۰$$

حل: اگر در معادلهٔ $ax^{۲}+bx+c=۰$، ضریب a به سمت صفر میل کند، یکی از ریشه‌ها به سمت $-\frac{c}{b}$ و دیگری از لحاظ قدرمطلق به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. بنابراین با توجه به کوچک بودن ضریب $x^{۲}$ نسبت به دو ضریب دیگر (از نظر قدرمطلق)، یکی از ریشه‌ها به $\frac{۱}{۴}$ نزدیک است. می‌توانستیم