# نقش جبر در ریاضیات کاربردی چیست؟•

دیوید کاکس*

ترجمهٔ محمدمهدی ابراهیمی

وقتی در اواخر دههٔ ۱۹۶۰ برای اولین بار با جبر مجرد آشنا شدم، شیفتهٔ توانایی و زیبایی آن شدم. یکی از ویژگیهای «قیدوبندزدا»ی جبر این است که وقتی با ساختارهای جبری سروکار داریم، لزومی ندارد دغدغه‌ای دربارهٔ ماهیت اشیا داشته باشیم؛ بلکه رفتار آنهاست که اهمیت دارد. جبر زبان فوق‌العاده توانایی برای توضیح رفتار اشیای ریاضی است.

شیفتگی من نسبت به جبر مرا به سمت هندسهٔ جبری سوق داد، که در آن زمان مجردترین مبحث ریاضیات محض بود. در آن زمان به‌هیچ‌وجه پیش‌بینی نمی‌کردم که بیست و پنج سال بعد مقاله‌هایی با همکاری متخصصان رایانه می‌نویسم که در آنها از هندسهٔ جبری برای حل مسأله‌های مربوط به مدلسازی هندسی استفاده می‌شود. جبری که به‌عنوان موضوعی محض و مجرد آموخته بودم کاربردهای قابل‌توجهی پیدا کرد.

با توجه به اینها و کاربردهای دیگر چه چیزی دربارهٔ رابطهٔ بین جبر و ریاضیات کاربردی می‌توان گفت؟ هدف این مقاله کاوش در برخی از جنبه‌های این رابطه است با این امید که محرکِ مباحثات مفیدی بین ریاضیدانان محض و کاربردی باشد. در اینجا «ریاضیات کاربردی» نه‌تنها شامل موضوعاتی است که دانشجویان در رشته‌های ریاضی و ریاضیات کاربردی می‌آموزند، بلکه شامل ریاضیاتی هم که در رشته‌های علوم رایانه، مهندسی، و تحقیق در عملیات آموخته می‌شود هست.

در آغاز، برای نشان دادن کاربردهای ممکنِ جبر، مثالهایی از مدلسازی هندسی، اقتصاد، و اسپلاین می‌آورم. سپس دربارهٔ جبر رایانه‌ای بحث می‌کنم و مقاله را با ذکر نکاتی دربارهٔ نقش جبر در برنامهٔ درسی ریاضیات کاربردی به پایان می‌آورم.

## مدلسازی هندسی، دستور کرامر، و مدولها

اولین مثال من مربوط به کاربردی غیرمنتظره از دستور کرامر و قضیهٔ هیلبرت‌ـبورچ دربارهٔ ساختار برخی از تجزیه‌های آزاد است. گرچه با دستور کرامر آشنا هستید، تجزیه‌های آزاد (هرچه هستند) ممکن است نسبتاً مجرد به نظر آیند. همان‌طورکه خواهیم دید مسأله‌هایی در مدلسازی هندسی وجود دارند که این‌گونه مباحث به‌طور طبیعی در آنها مطرح می‌شوند.

مطلب را با تحقیقات تام سدربرگ و فالایی چن دربارهٔ خمهای پارامتری در صفحه آغاز می‌کنم. اگر چندجمله‌ایهای متباین درجهٔ $n$ای چون $a(t)$، $b(t)$، و $c(t)$ داده شده باشند، آنگاه معادله‌های پارامتری

$$x = \frac{a(t)}{c(t)} \quad \text{و} \quad y = \frac{b(t)}{c(t)} \tag{1}$$

نمایش خمی در صفحه هستند. سدربرگ و چن[۲۳]، با دیدگاهی هندسی، خطهایی را با معادلهٔ

$$A(t)x + B(t)y + C(t) = 0 \tag{2}$$

در نظر گرفتند، که در آن $A(t)$، $B(t)$، و $C(t)$ چندجمله‌ایهایی وابسته به پارامتر $t$ هستند. وقتی $t$ را تغییر می‌دهیم، خطها نیز تغییر می‌کنند، و از این‌رو نام خطهای متحرک به آنها داده شده است. هر خط متحرک از یک صورت پارامتری پیروی می‌کند اگر به‌ازای هر مقدار پارامتر، نقطهٔ حاصل بر خط نظیر آن پارامتر واقع شود. به عبارت دیگر، برای هر مقدار $t$، روابط (۱) جواب (۲) است. وقتی این جایگزینی را انجام دهیم و مخرج مشترک بگیریم، معادلهٔ

$$A(t)a(t) + B(t)b(t) + C(t)c(t) \equiv 0 \tag{3}$$

به‌دست می‌آید، که در آن نماد $\equiv$ به این معنی است که تساوی برای هر مقدار $t$ برقرار است، یعنی $A(t)a(t) + B(t)b(t) + C(t)c(t)$ چندجمله‌ای صفر است.

کدام ساختارهای جبری در اینجا مطرح می‌شود؟ از آنجا که روی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ کار می‌کنیم، حلقهٔ چندجمله‌ایهای $R = \mathbb{R}[t]$ را داریم. در این‌صورت، خطهای متحرک $A(t)x + B(t)y + C(t) = 0$ که از (۱) پیروی می‌کنند متناظر با عضوهای مجموعهٔ

$$\begin{aligned} \{(A(t), B(t), C(t)) \in R^3 | \\ A(t)a(t) + B(t)b(t) + C(t)c(t) \equiv 0\} \end{aligned} \tag{4}$$

هستند. این مجموعه، $R$ـزیرمدولی از $R$ـمدول آزاد $R^3$ است. در جبر تعویض‌پذیر، می‌گوییم که (۳) سیزیجی و (۴) مدول سیزیجی است.

در اواسط دهۀ ۱۹۹۰، سدربرگ از من پرسید که آیا معادلۀ (۳) را قبلاً دیده‌ام یا نه. گفتم که «بله، این معادله معرف مدول سیزیجی $a(t)$، $b(t)$، و $c(t)$ است.» همان‌طورکه انتظار داشتم، تام معنی «سیزیجی» را پرسید. توضیح دادم که در اخترشناسی سیزیجی به حالتی اشاره دارد که سه جسم آسمانی بر یک خط مستقیم یا تقریباً مستقیم واقع می‌شوند. این واژه را سیلوستر در ۱۸۵۳ [۲۷] وارد ریاضیات کرد. امروزه، واژۀ سیزیجی را می‌توان به رابطه‌ای چندجمله‌ای بین ناورداها و یا رابطه‌ای خطی با ضرایب چندجمله‌ای مانند رابطۀ (۳) اطلاق کرد.

ولی تام بعداً سؤال غیرمنتظره‌ای مطرح کرد: او پرسید که «مدول» یعنی چه! ابتدا بسیار تعجب کردم که او معنی این واژۀ مقدماتی را نمی‌داند، ولی به یاد آوردم که مهندسان عمران هیچ درسی در جبر مجرد نمی‌گذرانند. (مدرک تحصیلی تام در مهندسی عمران است، گرچه حالا در علوم رایانه کار می‌کند.) بردارهای چندجمله‌ای در تحقیقات تام فراوان مطرح می‌شوند، و مدولهای روی حلقه‌های چندجمله‌ایها ابزاری طبیعی برای بررسی این اشیا هستند. با این حال تام هرگز واژۀ «مدول» را تا وقتی من عنوان کردم نشنیده بود.

این جریان باعث شد که متوجه شوم باید تصور خود از «جبر کاربردی» را توسعه دهیم. بعداً بیشتر در این باره صحبت می‌کنم، ولی ابتدا بگذارید داستان خطهای متحرک را تمام کنم. دیدگاه سدربرگ و چن این بود که وقتی دو خط متحرک از معادلات پارامتری (۱) پیروی می‌کنند، نقاط تلاقی آنها خمی تشکیل می‌دهند؛ و با نگاهی عمیق‌تر، همچنین متوجه شدند که همواره دو خط متحرک

$$\begin{aligned} p &:= A_1(t)x + B_1(t)y + C_1(t) = 0 \\ q &:= A_2(t)x + B_2(t)y + C_2(t) = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

وجود دارند که از صورت پارامتری داده شده پیروی می‌کنند و دارای ویژگیهای زیر هستند:

(الف) همۀ خطهای متحرکی که از صورت پارامتریِ داده شده پیروی می‌کنند حاصل از ترکیبهای خطی چندجمله‌ایِ $p$ و $q$ هستند، یعنی خطهایی متحرک به‌صورت $h_1p+h_2q=0$، که در آن $h_1$ و $h_2$ چندجمله‌ایهایی از $t$ هستند.

(ب) اگر درجۀ $a$، $b$، و $c$ نسبت به $t$ برابر با $n$ باشد، آنگاه درجۀ $p$ نسبت به $t$ برابر با $\mu$ و درجۀ $q$ برابر با $n-\mu$ است، که در آن $\mu$ عددی صحیح با ویژگی $0 \le \mu \le \lfloor n/2 \rfloor$ است.

(پ) چندجمله‌ایهای $a(t)$، $b(t)$، و $c(t)$ با تقریبی در حد مقداری ثابت و علامتهای مناسب، کهادهای ۲ × ۲ی ماتریس

$$\begin{pmatrix} A_1(t) & B_1(t) & C_1(t) \\ A_2(t) & B_2(t) & C_2(t) \end{pmatrix}$$

هستند.

(ت) معادلۀ خمْ حاصل از برایند چندجمله‌ایهاست:

$$\text{برایند}\,(p,q,t) = 0$$

خطهای متحرک $p$ و $q$ را $\mu$-پایه می‌نامیم. پس $\mu$-پایۀ هم صورت پارامتری را (به‌وسیلۀ ویژگی (پ)) و هم معادلۀ خم را (به‌وسیلۀ ویژگی (ت)) تعیین می‌کند. جزئیات را در [۷] ببینید.

از دیدگاه جبر تعویض‌پذیر، (الف) حاکی است که مدول سیزیجیْ آزاد با پایۀ $\{(A_i(t),B_i(t),C_i(t)) \mid i=1,2\}$ است. آنهایی که با نظریۀ مدولها روی دامنۀ ایده‌آل اصلی آشنا هستند از این مطلب تعجب نمی‌کنند. ولی محدودیت درجۀ مذکور در (ب) مطلبی کاملاً متفاوت است: طبق این گزاره در واقع با حالتی همگن سروکار داریم، که در آن چندجمله‌ایهای همگن $a(s,t)$، $b(s,t)$، و $c(s,t)$ از درجۀ $n$ را به جای $a(t)$، $b(t)$، و $c(t)$ قرار می‌دهیم. در این‌صورت ایده‌آل

$$I = \langle a(s,t), b(s,t), c(s,t)\rangle \subset S = \mathbb{R}[s,t]$$

به‌دست می‌آید، و همان‌طورکه در [۶] و [۷] نشان داده شده است، (الف) و (ب) به‌صورت تجزیۀ آزاد ایده‌آل $I$، یعنی

$$0 \to S(-n+\mu) \oplus S(-2n+\mu) \xrightarrow{\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix}} S(-n)^3 \xrightarrow{(a\ \ b\ \ c)} I \to 0 \tag{6}$$

تعبیر می‌شود (نماد $S(-n)$ نمایندۀ درجه است) و (پ) ایجاب می‌کند که $a$، $b$، و $c$ کهادهای ۲ × ۲ ماتریس ۲ × ۳ی مذکور در (۶) باشند. این مطلب حالت خاصی از قضیۀ هیلبرت–بورچ است ([۶] را ببینید).[1]

گرچه ممکن است این موضوع پیچیده به نظر آید، قسمتهایی از آن کاملاً قابل درک است. اگر معادلات خط متحرک (۵) را در نظر بگیریم و $x$ و $y$ را با استفاده از دستور کرامر به‌دست آوریم، داریم

$$\begin{aligned} x &= \frac{\det\begin{pmatrix} -C_1 & B_1 \\ -C_2 & B_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}} = \frac{\det\begin{pmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}} \\ y &= \frac{\det\begin{pmatrix} A_1 & -C_1 \\ A_2 & -C_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}} = \frac{-\det\begin{pmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}} \end{aligned} \tag{7}$$

اگر این عبارتها با صورت پارامتریِ اولیۀ (۱) مقایسه شوند، تعجب‌آور نیست که $a$، $b$، و $c$ کهادهای ۲ × ۲ی ماتریس تشکیل شده از $\mu$-پایه هستند. وقتی که سدربرگ و چن متوجۀ این نتیجۀ دستور کرامر شدند، می‌دانستند که

۱. این حالت خاص را فرانتس مِیِر در ۱۸۸۷ کشف کرد [۱۹]، و نتایج مشابهی را برای مدول سیزیجی $a_1,\ldots,a_n \in S$ حدس زد. هیلبرت، در مقالۀ مهم خود در ۱۸۹۰ [۱۶]، نظریه‌ای بنیادی ابداع کرد که امروزه آن را جبر تعویض‌پذیر می‌نامیم. اولین استفادۀ او از آن در مورد حدس مِیِر بود، که آن را با استفاده از صورت اولیۀ قضیۀ هیلبرت–بورچ اثبات کرد.

در مسیر درستی گام برمی‌دارند؛ هیلبرت نیز ممکن است با استدلالی مشابه به‌صورتی از قضیهٔ هیلبرت‌ـبورچ که خودش ارائه داده، رسیده باشد.

به یاد بیاورید که وقتی سدربرگ و چن این موضوع را در اواخر دههٔ ۱۹۹۰ حدس زدند، سدربرگ نمی‌دانست مدول چیست. به نظر من، از این موضوع برمی‌آید که مدولها می‌توانند جایی در برنامهٔ درسی ریاضیات کاربردی داشته باشند.

## اقتصاد، دستور کرامر، و جبر خطی نمادی

اخیراً با یکی از همکاران دربارهٔ نقش دستور کرامر در جبر خطی گفتگو می‌کردم. اگرچه دستور کرامر در پیشرفت تاریخی جبر خطی نقش مهمی ایفا کرده است، امروزه، بویژه با تأکید بر حل دستگاههای معادلات به روش حذفی گاوس، نقش کمتری دارد. به‌علاوه، وقتی محاسبهٔ دترمینان ماتریس ضرایب دستگاه معادلات دشوار باشد، دستور کرامر بی‌فایده است. به این دلایل، همکارم می‌خواست بداند که آیا نباید این مبحث را از درس حذف کرد؟ــ چرا فرمولی غیرلازم را بر دانشجویان تحمیل کنیم؟ من همیشه دستور کرامر را به خاطر زیبایی ذاتی‌اش دوست می‌داشته‌ام، ولی دانشجویانی که ترجیح می‌دهند از دیدگاهی کاربردی به ریاضیات بنگرند لزوماً چنین نمی‌اندیشند. پس از کمی تأمل متوجه شدم که گرچه دستور کرامر ممکن است در جبر خطی عددی بی‌فایده باشد، ولی در دنیای وسیع‌ترِ جبر خطی کاربردی جایگاهی معتبر دارد.

برای مشاهدهٔ تفاوت این دو دیدگاه، توجه کنید که استفاده از دستور کرامر در (۷) کاربردی است ــ یعنی جزئی از مدلسازی هندسی است ــ وعددی نیست. کاربرد غیرعددی دیگری از دستور کرامر، مثال مقدماتی زیر در اقتصاد است. مدل $IS$-$LM$، طبق ایده‌های جان مینارد کینز، تأثیر متقابل بین کل درآمد ملی و عرضهٔ پول را تحلیل می‌کند. همان‌طور که در [۲۴، صص. ۱۱۵ـ۱۱۷] توضیح داده شده است، می‌خواهیم رابطهٔ کمیتهای

$$Y = \text{کل تولید ملی}$$

و

$$r = \text{نرخ بهره}$$

را برحسب پارامترهای سیاستگذاری (مثلاً، عرضهٔ پول) و پارامترهای رفتاری (مثلاً، میل نهایی به پس‌انداز) دریابیم. با خطی‌سازی این مدل در نقطهٔ تعادل، معادلات

$$sY + ar = I^o + G$$
$$mY - hr = M_s - M^o$$

به‌دست می‌آیند، که در آن $s$، $a$، $m$، $h$، $I^o$، $G$، $M_s$، $M^o$ پارامترهای مثبت هستند (مثلاً، $M_s$ عرضهٔ پول و $s$ میل نهایی به پس‌انداز است). هدف این است که ببینیم با تغییر پارامترها، $Y$ و $r$ چگونه تغییر می‌کنند. در اینجا دستور کرامر خودنمایی می‌کند: فرمولهایی برای $Y$ و $r$ به‌دست می‌دهد که پاسخ دادن به این‌گونه سؤالها را آسان می‌سازد.

ارتباط بین این مثال و (۷) این است که در هر دو حالت دستور کرامر را در مورد معادلات وابسته به پارامترها به‌کار بردیم. از این‌رو جبر خطی کاربردی دارای هر دو جنبهٔ عددی و نمادی است. آیا دروس فعلیِ جبر خطی انصاف را در مورد هر دو رعایت می‌کند؟ در حال حاضر، محل اصلیِ ظهورِ پارامتری نمادی در چندجمله‌ای مشخصهٔ ماتریس $n\times n$ای چون $A$ یعنی $\det(A-\lambda I_n)$ است. همان‌طور که مثالهای بالا نشان می‌دهند، دترمینانهایِ با پارامترهای نمادی، حتی در سطحی مقدماتی، نقشی عمده‌تر ایفا می‌کنند.

وقتی به معنی جبریِ اِعمال روشهای جبر خطی روی پارامترها می‌اندیشیم ارتباط مذکور در بالا عمیق‌تر هم می‌شود. برای سادگی، فرض کنید که پارامترهای مستقل از هم $t_1$، ...، $t_n$ به‌صورت گویا (مثلاً غیررادیکالی و غیر نمایی) در معادلات ظاهر شده‌اند. چون در جبر خطی به یک میدان نیاز داریم، طبیعی است که روی میدان توابع گویا یعنی $K = \mathbb{R}(t_1, \ldots, t_n)$ کار کنیم. ولی در بسیاری مواردْ پارامترها به‌صورت چندجمله‌ای هستند و مخرجها مشکل ایجاد می‌کنند. این مطلب به این معنی است که روشهای جبر خطی را روی حلقهٔ چندجمله‌ایهای $R = \mathbb{R}[t_1, \ldots, t_n]$ اجرا کنیم. در این‌صورت «بردارها» بردارهایی از چندجمله‌ایها می‌شوند، یعنی عضوهایی از یک مدول آزاد روی $R$. برای مثال، به‌ازای $a, b, c \in R = \mathbb{R}[t]$ جوابهایِ چندجمله‌ای $(A, B, C) \in R^3$ برای معادلهٔ خطی $Aa + Bb + Cc = 0$، مدول سیزیجی (۴) را تشکیل می‌دهند.

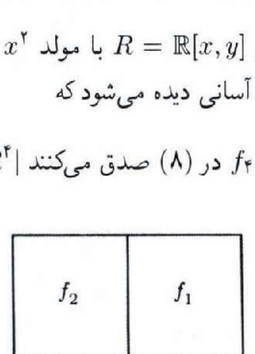
## اسپلاین و مدولها

برای اینکه مثالی دیگر از چگونگی ارتباط جبر خطی با مدولها آورده باشیم، به مطالعهٔ اسپلاینِ چندمتغیری می‌پردازیم. اسپلاینی را که در شکل ۱ نشان داده شده در نظر بگیرید. در اینجا مربعی به مرکز مبدأ مختصات، همراه با اسپلاینی که از چندجمله‌ایهای $f_1, f_2, f_3, f_4 \in R = \mathbb{R}[x, y]$ ساخته شده است داریم. در عمل، درجه‌های چندجمله‌ایها از قبل معین می‌شوند، ولی ما این کار را به تعویق می‌اندازیم تا ساختار جبری زیربنایی را آشکار کنیم. برای اینکه یک $C^1$ـاسپلاین به‌دست آوریم، چندجمله‌ایها باید در شرایط زیر صدق کنند

$$\begin{aligned} f_1 - f_2, f_3 - f_4 &\in \langle x^2 \rangle \\ f_2 - f_3, f_1 - f_4 &\in \langle y^2 \rangle \end{aligned} \tag{8}$$

که در آن $\langle x^2 \rangle$ ایده‌آل $R = \mathbb{R}[x, y]$ با مولد $x^2$ است، و $\langle y^2 \rangle$ نیز به همین صورت. آنگاه به آسانی دیده می‌شود که

$$\{(f_1, \ldots, f_4) \in R^4 \mid \text{در (۸) صدق می‌کنند } f_1، f_2، f_3، f_4\} \tag{9}$$




**شکل ۱** اسپلاین چندجمله‌ای

زیرمدول $R^۴$ است. به‌علاوه، می‌توان نشان داد که (تمرین ۵ از [۶، بخش ۳.۸] را ببینید) این زیرمدول با پایهٔ

$$(۱, ۱, ۱, ۱), (۰, x^۲, x^۲, ۰), (y^۲, y^۲, ۰, ۰), (x^۲, y^۲, ۰, ۰)$$

آزاد با رتبهٔ چهار است. به عبارت دیگر، هر اسپلاین در (۹) را می‌توان به‌گونهٔ یکتا به‌صورت یک ترکیب خطی چندجمله‌ای از چهار اسپلاین بالا نوشت.

برای اینکه ببینیم این مطلب چه ارتباطی با جبر خطی دارد، $C^۱$ـاسپلاینی از درجهٔ نا بیشتر از $k$ را در نظر می‌گیریم. به‌آسانی می‌توان (۸) را به دستگاهی از معادلات خطی حاصل از ضرایب $f_۱$، $f_۲$، $f_۳$، $f_۴$ تبدیل کرد. حل این معادلات به روشهای متداول روش خوبی برای پیدا کردنِ اسپلاین‌ها به‌دست می‌دهد. ولی چون مدول (۹) را می‌شناسیم، بلافاصله می‌توانیم به این سؤال پاسخ دهیم: اسپلاین‌های از درجهٔ نابیشتر از $k$ به‌گونه‌ای یکتا به‌صورت

$$g_۱ \cdot (۱, ۱, ۱, ۱) + g_۲ \cdot (۰, x^۲, x^۲, ۰) + g_۳ \cdot (y^۲, y^۲, ۰, ۰) + g_۴ \cdot (x^۲, y^۲, ۰, ۰)$$

مشخص می‌شوند که درجه‌های $g_۱$، $g_۲$، $g_۳$، و $g_۴$، به‌ترتیب، حداکثر برابر $k$، $k-۲$، $k-۲$، و $k-۴$ است. از آنجا که بعد فضای چندجمله‌ایهای از درجهٔ نابیشتر از $k$ برحسب $x$، $y$ برابر با $\binom{k+۲}{۲}$ است، نتیجه می‌گیریم که بعد فضای $C^۱$ـاسپلاین‌های چندجمله‌ای از درجهٔ نابیشتر از $k$ برای شکل ۱ برابر است با

$$\binom{k+۲}{۲} + ۲\binom{k}{۲} + \binom{k-۲}{۲} \qquad (۱۰)$$

در حالت کلی‌تر، استرانگ [۲۶] در سال ۱۹۷۳ فرمولی برای بعد فضای $C^r$ـاسپلاین‌های چندجمله‌ای در مورد یک مثلث‌بندی مفروض صفحه حدس زد. این فرمول را بیلرا [۱] در سال ۱۹۸۸ با استفاده از روشهای بالا اثبات کرد. درآمدی بر اسپلاین‌ها از دیدگاه مدول در [۶] آمده است.

در مدلسازی هندسی، ایدهٔ ثابت در نظرگرفتن درجهٔ خط یا سطح متحرک نیز مفید واقع می‌شود؛ مقالهٔ مروری [۵] را ببینید. در حالت کلی، ارتباط جالبی بین کارکردن با چندجمله‌ایهای از درجهٔ مشخص (که به کمک جبر خطی مطالعه می‌شوند) و چندجمله‌ایهای از درجهٔ دلخواه (که به‌کمک مدولها مطالعه می‌شوند) وجود دارد. این ارتباط به مفاهیم توابع هیلبرت و چندجمله‌ایهای هیلبرت منجر می‌شود. برای مثال، تابع هیلبرت مدول اسپلاین‌های (۹) به‌صورت (۱۰) است، که یک چندجمله‌ای از $k$ به‌ازای $k \geq ۲$ است.

مثالهایی که تاکنون بررسی شده‌اند، برای نشان دادن این موضوع انتخاب شدند که چگونه تساویهای

نظریهٔ مدولها روی حلقه‌های چندجمله‌ایها

= جبر خطی پارامتری

= جبر خطی نمادی

در زمینه‌های کاربردی گوناگون به‌طور طبیعی پیش می‌آیند. این موضوع جنبهٔ نظری پرباری نیز دارد که از ابزارهای پیچیدهٔ هندسهٔ جبری و جبر تعویض‌پذیر استفاده می‌کند، و در عین حال، مسألهٔ اصلی آن حل معادلات خطی روی حلقهٔ چندجمله‌ایهاست. بیانی روشن از این جنبهٔ نظری در مقدمهٔ کتاب اخیر ایزنباد، هندسهٔ سیزیجی‌ها [۱۲، ص. xii] آمده است.

## جبر رایانه‌ای و جبر کاربردی

در چهل سال گذشته شاهد ظهور قدرت محاسباتیِ عظیم رایانه وکشف (وگاهی کشف مجدد) الگوریتمهای اساسی برای محاسبهٔ نمادی بوده‌ایم. این پیشرفتهای به‌هم پیوسته منجر به تحقیقات بسیار زیادی، هم محض و هم کاربردی، شده است. کتابهای نوشته شده در این زمینه، قلمرو وسیعی از کتابهای درسی کارشناسی تا تک‌نگاشتهای تکنیکی را دربرمی‌گیرد، برخی برای پژوهشگران هندسهٔ جبری و جبر تعویض‌پذیر و برخی برای طیف متنوع‌تری از مخاطبان.

جبر رایانه‌ای موضوعات بسیار متنوعی، از جمله شمارش هم‌مجموعه‌ها، نظریهٔ گالوا، حساب پیمانه‌ای، انتگرال‌گیری نمادی، مجموعیابی نمادی، معادلات تفاضلی، سریهای توانی، و توابع خاص را دربرمی‌گیرد. همان‌طور که انتظار می‌رود، چندجمله‌ایها نقش مهمی در جبر رایانه‌ای، درآنجاکه الگوریتمهایی برای بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک، تجزیه، پایه‌های گروبنر، برایندها، مجموعه‌های مشخصه، حذف سور، و تجزیهٔ جبری استوانه‌ای می‌یابیم، ایفا می‌کنند. از جمله کتابهای مقدماتی در جبر رایانه‌ای، کتاب مروری [۲]، و کتابهای درسی [۳]، [۴]، [۹]، [۱۳]، [۱۴]، [۲۰]، [۲۸]، و [۲۹] است. از جبر رایانه‌ای می‌توان برای حل مسأله‌های روباتیک، اسپلاین، برنامه‌ریزی با اعداد صحیح، معادلات دیفرانسیل، آمار، نظریهٔ کدگذاری، شیمی محاسباتی، طراحی هندسی به کمک رایانه، اثبات هندسی قضیه‌ها، و دستگاههای معادلات چندجمله‌ای استفاده کرد. اینها وکاربردهای دیگر درکتابهای [۲]، [۶]، [۸]، [۱۰]، [۱۵]، و [۲۸] شرح داده شده‌اند. فهرست مراجع این کتابها مجموعهٔ بزرگی از متونِ مربوط به کاربردهای جبر رایانه‌ای را معرفی می‌کنند.

جبر رایانه‌ای چه رابطه‌ای با کاربردهای جبر چندجمله‌ایها که قبلاً در این مقاله شرح داده شد دارد؟ برای قسمتهایی از حوزهٔ ریاضیات کاربردی که ابزارهایِ محاسباتی در آنها اهمیت بسزایی دارند، کتابهای جبر رایانه‌ای مذکور در بالا ممکن است پاسخِ این سؤال را به‌دست دهند. (البته نه پاسخ کامل را، زیرا این کتابها اغلب زبانِ جبر مجرد را به‌طورکامل به‌کار نمی‌برند، و آنهایی که به‌کار می‌برند گاهی مطالب زیادی را مفروض می‌گیرند یا آموزش تند و سریعی را می‌طلبند.) ولی در بسیاری از زمینه‌های کاربردی، ابزارهای محاسباتی موضوع اصلی نیستند، بلکه توجه اصلی معطوف به درک کلی ساختار مسائلِ مورد مطالعه است. اینجاست که زبان جبر می‌تواند مفید واقع شود. به این دلیل است که دست‌اندرکاران ریاضیات کاربردی بهتر است به این فکر باشند که چگونه دسترسی بهتر به جبر را به دانشجویان بیاموزند.

## برنامهٔ درسی جبر

دانشجوی ریاضیات کاربردی درکجا جبر را می‌آموزد؟ این سؤال می‌تواند پاسخهای متفاوتی داشته باشد:

- برخی از دانشجویان جبر را در دورهٔ کارشناسی رشتهٔ ریاضی می‌آموزند.
- برخی جبر را در درسی در دورهٔ کارشناسی ارشد می‌آموزند.

- برخی جبر را در دروس خاصی از یک گرایشِ ریاضیات کاربردی که به جبر وابسته است می‌آموزند.
- برخی جبر را بعداً در دوران کار پژوهشی خود می‌آموزند.
- برخی هرگز به جبر نیاز پیدا نمی‌کنند.

حالت آخر مبین این واقعیت است که ریاضیات کاربردی موضوع وسیعی است. با وجود اعتقادی که به ارزش جبر مجرد دارم، لازم نمی‌بینم که همهٔ ریاضیدانان کاربردی این موضوع را بیاموزند.

اکنون برای هر یک از چهار حالت اول، نکاتی را دربارهٔ نقش جبر متذکر می‌شوم.

اصولاً همهٔ دانشجویان کارشناسی رشتهٔ ریاضی دروسی در جبر مجرد می‌گذرانند. گرچه به نظر می‌رسد که به این ترتیب مسأله برای این دسته از دانشجویان حل می‌شود، باید متذکر شوم که در ایالات متحدهٔ امریکا در این درسها مدولها به‌ندرت مورد بحث قرار می‌گیرد، و اغلب دربارهٔ حلقه‌های چندجمله‌ایهایِ چند متغیره چندان صحبتی نمی‌شود (توجه اصلی معطوف به حالت یک متغیره است). به‌علاوه، مجرد بودن مطالب ممکن است درس را در نظر دانشجویانی که به ریاضیات کاربردی علاقه دارند کم‌ربط جلوه دهد. با آگاهی از این مسأله، توجه برخی از کتابهای درسی جبر معطوف به کاربردها شده است (یکی از نمونه‌های جدید آن، کتاب [۱۷] است) و برخی از کتابهای «محض» شامل مثالهای کاربردی بسیاری هستند و اندکی از آنها (مثلاً [۱۸] و [۲۲]) بخشهایی دربارهٔ پایه‌های گروبنر دارند. ولی درس جبر دورهٔ کارشناسی هر چه باشد، مشکل این است که بسیاری از ریاضیدانان کاربردی در رشته‌هایی چون فیزیک، مهندسی، یا تحقیق در عملیات تحصیل کرده‌اند و چنین درسی نگذرانده‌اند.

درس جبر مجرد در دورهٔ کارشناسی ارشد با احتمال بیشتری شامل مدولها و حلقه‌های چندجمله‌ایهایِ چندمتغیره است، و کتابهای درسی کارشناسی ارشد مانند [۱۱] و [۲۱] بخشهایی دربارهٔ پایه‌های گروبنر دارند. ولی آیا چنین درسی برای دانشجویان ریاضیات کاربردی مناسب است؟ یا اینکه تنها برای امتحان جامع به آن نیاز دارند؟[۱] مشکل دیگر این است که مطالب جبری بیشتری وجود دارد که لازم است افراد آنها را بدانند. برای مثال، با توجه به اهمیت فزایندهٔ ساختارهای تعویض‌ناپذیر (مثلاً، جبرهای رأسی) این نگرانی وجود دارد که کتابهای درسی جبری ممکن است فضای بیش از اندازه‌ای به حالت تعویض‌پذیر اختصاص دهند. لذا ممکن است فرصتی برای بررسی موضوعهایی چون پایه‌های گروبنر، حتی اگر در کتاب آمده باشند، به‌دست نیاید. حدس من این است که برای اینکه دروس جبر نیازهای همه دانشجویان را برآورده کند باید توجه بیشتری به مثالهایی شود که مفید بودن جبر را به‌عنوان زبانی برای توصیف اشیای ریاضی در حالتهای محض و کاربردی نشان می‌دهند. ولی، همان‌طور که در بالا گفته شد، دانشجویان ریاضیات کاربردی هرگز چنین درسهایی را نمی‌گذرانند مگر اینکه در یک گروه آموزشی تحصیل کنند که شامل هر دو گرایش ریاضیات محض و کاربردی باشد. در گروههای آموزشی ریاضیات

۱. یک پاسخ این است که در امریکا بسیاری از ریاضیدانان کاربردی کالجهای چهارساله‌ای را طی کرده‌اند، که در آنجا دروس متنوعی را، اغلب شامل جبر مجرد، تدریس می‌کنند.

کاربردی، مهندسی، یا تحقیق در عملیات، احتمال نمی‌رود که دانشجویان درسی عمومی در جبر مجرد بگذرانند. به‌علاوه، وقتی این دانشجویان درس جبر مجرد را در گروه آموزشی ریاضی محض اختیار می‌کنند، با احتمال زیاد به‌صورتی از درس برمی‌خورند که برای جبردانان آینده طراحی شده است.

ارائهٔ دروس ویژه در گرایشهای ریاضیات کاربردی ممکن است یکی از بهترین روشها برای آشنا کردن دانشجویان با جبرِ مناسب برای پژوهشهایشان باشد. این روش در گرایشهایی از ریاضیات کاربردی که استفاده از جبر در آنها فایدهٔ روشن و سابقهٔ خوبی دارد بسیار مناسب است. ولی اولین کسی که چنین درسی را تدریس کرد چه کسی بود؟ او جبر را از کجا آموخت؟ همچنین، اگر این دروس منبع اصلی جبر در ریاضیات کاربردی بشوند، آنگاه این احتمال وجود دارد که کاربردهای جبر به این مطالب محدود شوند.

برخی از جالب‌ترین کاربردهای جبر، کاربردهای غیرمنتظرهٔ آن هستند. این یکی از عواملی است که ریاضیات را این‌قدر جالب و خوشایند کرده است. همان‌طور که در مورد سدر برگ اتفاق افتاد، ریاضیدانان کاربردی گاهی متوجه می‌شوند که جبر برای مسأله‌ای که روی آن کار می‌کنند مناسب است، گاهی ابزارهای جبری مسألهٔ آنها را حل می‌کند، و گاهی هم زبانِ جبر موضوعها و ساختارهای مطرح‌شده را روشن می‌سازد و به پژوهشگر کمک می‌کند که توجه خود را روی مطالب اساسی متمرکز کند (و این امر به‌نوبهٔ خود می‌تواند مسأله‌های نابی برای جبردانان مطرح کند که به دنبال حل آنها باشند). ولی پژوهشگر چگونه متوجه شود که جبر برای کارش مناسب است؟ به نظر من می‌تواند به دو روش زیر به این موضوع پی ببرد:

- با ریاضیدانی صحبت کنید که جبر می‌داند. در اینجا مشکل به جنبهٔ محض ریاضیات مربوط می‌شود: آیا جبردانان به‌گونه‌ای آموزش دیده‌اند که بتوانند با غیرمتخصص‌ها صحبت کنند و مقصودشان را به آنها برسانند؟ با توجه به اهمیت آنچه در امریکا «انتقال فناوری» نامیده می‌شود، چگونه دانشجویان ریاضیات محض را آموزش دهیم تا بهتر بتوانند با افرادِ خارج از تخصصشان گفتگو کنند؟
- برخی از مطالب جبری را که قبلاً آموخته‌اید به‌خاطر بیاورید. علاوه بر دروس جبر یا دروس ویژه که در بالا مورد بحث قرار گرفتند، ریاضیدانان کاربردی می‌توانند با گذراندن برخی از دروس کاربردی با جبر آشنا شوند و فرصت استفاده از زبان جبر را به‌دست آورند. این آشنایی را می‌توان در یک درس جبر خطی کاربردی که به جنبه‌های عددی و نمادی موضوع بپردازد یا در یک درس آنالیز عددی که به مباحثی از کتاب اخیر استتر با عنوان جبر عددی چندجمله‌ایها [۲۵]، بپردازد، به‌دست آورد.[۱]

این مطالب، به طریقی، به ارتباط دادن ریاضیات محض و کاربردی منجر می‌شود. مقدار زیادی کار در این زمینه انجام شده است، ولی به کارهای بیشتری نیاز است.

سؤالها و پیشنهادهای مطرح‌شده در این مقاله مقدماتی‌اند و نباید خیلی

۱. گفتن این مطلب آسان‌تر از انجام دادن آن است، زیرا مانند ریاضیات محض، مطالب بسیاری وجود دارد که دانشجویان ریاضیات کاربردی لازم است بدانند. به هر حال، به فکر کردن درباره‌اش می‌ارزد.

کامل و دقیق قلمداد شوند. هدف اصلی مقالهٔ برانگیختن بحث و گفتگو دربارهٔ نقش صحیح جبر در ریاضیات کاربردی است. من عمیقاً معتقدم که جبر حرفهای زیادی برای گفتن دارد به شرط اینکه ما، به‌طور دسته‌جمعی، بهترین راه را برای استفاده از این زبان شگفت‌انگیز بیابیم.

## مراجع

1. L. BILLRA, Homology of smooth splines: Generic triangulations and a conjecture of Strang, *Trans. Amer. Math. Soc.* **310** (1988), 325-40.

2. A. M. COHEN, H. CUYPERS, and H. STERK (eds.), *Some Tapas of Computer Algebra*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, and New York, 1999.

3. J. S. COHEN, *Computer Algebra and Symbolic Computation: Elementary Algorithms*, A K Peters, Wellesley, MA, 2002.

4. ———, *Computer Algebra and Symbolic Computation: Mathematical Methods*, A K Peters, Wellesley, MA, 2003.

5. D. COX, *Curves, Surfaces and Syzygies*, in [15, 131-50].

6. D. COX, J. LITTLE, and D. O'SHEA, *Using Algebraic Geometry*, second ed., Springer-Verlag, New York, Berlin, and Heidelberg, 2005.

7. D. COX, T. SEDERBERG, and F. CHEN, The moving line ideal basis of planar rational curves, *Comput. Aided Geom. Des.* **15** (1998), 803-27.

8. D. COX and B. STURMFELS (eds.), *Applications of Computational Algebraic Geometry*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

9. J. H. DAVENPORT, Y. SIRET, E. TOURNIER, *Computer Algebra*, second ed., Academic Press, London, 1993.

10. A. DICKENSTEIN and I. Z. EMIRIS (eds.), *Solving Polynomial Equations: Foundations, Algorithms, and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, and New York, 2005.

11. D. DUMMIT and R. FOOTE, *Abstract Algebra*, third ed., John Wiley & Sons, New York, 2004.

12. D. EISENBUD, *The Geometry of Syzygies*, Springer-Verlag, New York, Berlin, and Heidelberg, 2005.

13. J. VON DER GATHEN and J. GERHARD, *Modern Computer Algebra*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

14. K. O. GEDDES, Ṡ. R. CZAPOR, and G. LABAHN, *Algorithms for Computer Algebra*, Kluwer, Dordrecht, 1992.

15. R. GOLDMAN and R. KRASAUSKAS (eds.), *Topics in Algebraic Geometry and Geometric Modeling*, Contemp. Math., Vol. 334, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

16. D. HILBERT, *Ueber die Theorie der algebraischen Formen*, Math. Annalen **36** (1890), 473-534.

17. D. JOYNER, R. KREMINSKI, and J. TURISCO, *Applied Abstract Algebra*, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, 2004.

18. N. LAURITZEN, *Concrete Abstract Algebra*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.

19. F. MEYER, *Zur Theorie der reducibeln ganzen Functionen von n Variabeln*, Math. Annalen **30** (1887), 30-74.

20. B. MISHRA, *Algorithmic Algebra*, Springer-Verlag, New York Berlin, and Heidelberg, 1993.

21. J. J. ROTMAN, *Advanced Modern Algebra*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.

22. ———, *A First Course in Abstract Algebra*, second ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000.

23. T. W. SEDERBERG and F. CHEN, Implicitization using moving curves and surfaces, in *Proceedings of SIGGRAPH*, 1995, 301- 8.

24. C. P. SIMON and L. BLUME, *Mathematics for Economists*, W. W. Norton, New York and London, 1994.

25. H. STETTER, *Numerical Polynomial Algebra*, SIAM, Philadelphia, 2004.

26. G. STRANG, The dimension of piecewise polynomial spaces, and one-sided approximation, in *Conference on the Numerical Solution of Differential Equations (Univ. Dundee, Dundee, 1987)*, Lectures Notes in Math., Vol. 363, Springer-Verlag, New York, Berlin, and Heidelberg, 1974, pp. 144-52.

27. J. J. SYLVESTER, On a theory of syzygetic relations of two rational integral functions, comprising an application of the theory of Sturm's functions, and that of the greatest algebraic common measure, *Philos. Trans. Roy Soc. London* **143** (1853), 407-548.

28. D. WANG, *Elimination Theory*, Springer-Verlag, Wien and New York, 2001.

29. F. WINKLER, *Polynomial Algorithms in Computer Algebra*, Springer-Verlag, Wien and New York, 1996.

* * * * * *

• David A. Cox, "What is the role of algebra in applied mathematics?", *Notices Amer. Math. Soc.* (10) **52** (2005) 1193-1198.

* دیوید کاکس، کالج امرست، آمریکا

dac@cs.amherst.edu