دیفرانسیل و انتگرال

(قسمت اول)

(مورد استفاده دانش‌آموزان سال چهارم)

از : احمد قندهاری

۱ـ دیفرانسیل[1]

اگر تابع f بـه معادلهٔ $y=f(x)$ در فـاصلهٔ $(a\ ,\ b)$ مشتق‌پذیر باشد و $x\in(a,b)$. چنانچه به x نموی مـانند Δx نسبت دهیم بـه طوری‌که $x+\Delta x\in(a,b)$ خواهیم داشت:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

و

$$\begin{cases}\lim\limits_{\Delta x\to ۰}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\end{cases}$$

مثال. تابع به معادلهٔ $y=f(x)=x^۲+x$ را درنظر می گیریم :

اگر بـه x نموی مانند (۰/۱) نسبت دهیم ، مقادیـر $f'(x)$ و $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ را درنقطه‌ای به طول (۳) بیابید.

$$f'(x)=۲x+۱ \implies f'(۳)=۷$$

$$\Delta y=f(۳+\Delta x)-f(۳)$$

$$=(۳+۰/۱)^۲+(۳+۰/۱)-(۹+۳)=۰/۷۱$$

$$\begin{cases}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{۰/۷۱}{۰/۱}=۷/۱\\ f'(۳)=۷\end{cases} \implies f'(x)\neq\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$$

به طوری‌که ملاحظه می‌شود $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ و $f'(x)$ اختلاف کمی باهم دارند.

چنانچه $\left|\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)\right|$ را برابر α فرض‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)=\alpha \implies$$

$$\Delta y-f'(x).\Delta x=\alpha\Delta x(\Delta x\neq ۰)$$

$$\implies \Delta y=f'(x).\Delta x+\alpha\Delta x$$

چون α و Δx بی‌نهایت کوچك‌اند[2] وحاصل‌ضرب آنها کوچکتراز هریك‌از آنها خواهد شد، پس می‌توان‌نوشت:

$$\Delta y\simeq f'(x).\Delta x$$

تعریف دیفرانسیل تابع

بنابه تعریف ، مقدار $f'(x).\Delta x$ را دیفرانسیل تـابع گویند و آن‌را بانماد dy نشان می‌دهند.

1ـ Differential

۲ـ بی‌نهایت کوچکها، اگر $x_۰$ یك‌عددحقیقی‌باشد چنانچه $\lim\limits_{x\to x_۰} f(x)=۰$ آنگاه تابع‌به معادلهٔ $f(x)$ را یك‌بی‌نهایت کوچك می‌گوییم. بی‌نهایت کوچك را یك مقدار متغیردارای‌حدصفر تعریف می‌کنیم.

$$dy = f'(x)\cdot\Delta x$$
$$\Longrightarrow \Delta y \simeq dy$$
$$\Delta y \simeq f'(x)\cdot\Delta x$$

توجه کنید که: Δy نمو تابع است و dy دیفرانسیل تابع است.

در مثال قبل $\Delta y = ۰/۷۱$ و

$$dy = f'(x)\cdot\Delta x$$
$$dy = (۲x+۱)\cdot\Delta x \Longrightarrow dy = (۷)(۰/۱) = ۰/۷$$

به طوری که ملاحظه می‌کنید dy و Δy اختلاف کمی باهم دارند، دراین مثال اختلاف آنها $(۰/۰۱)$ است.

نتیجه. می‌توان گفت اگر در یك تابع به معادلهٔ

$$y = f(x)$$

متغیر x به اندازهٔ (Δx) تغییر کند، مقدار تابع تقریباً به اندازهٔ $f'(x)\cdot\Delta x$ تغییر می‌کند.

مثال. در تابع به معادلهٔ $y = f(x) = x^۳ + ۲x$ ، در نقطهٔ $x = ۲$ ؛ چنانچه Δx به اندازهٔ $(۰/۰۱)$ تغییر کند، Δy و dy را محاسبه کنید.

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = f(۲+۰/۰۱) - f(۲)$$
$$= (۲/۰۱)^۳ + ۲(۲/۰۱) - (۸+۴) \Longrightarrow$$
$$\Delta y = ۰/۱۴۰۶$$
$$dy = f'(x)\cdot\Delta x = (۳x^۲+۲)\cdot\Delta x$$
$$= (۱۴)(۰/۰۱) = ۰/۱۴$$

دراین‌مثال، اختلاف Δy و dy، مقدارناچیز $(۰/۰۰۰۶)$ نسبت به ۲ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\boxed{\Delta y \simeq dy}$$

مثال. اگر ازطرفین تابع $y = f(x) = x$، دیفرانسیل بگیریم، خواهیم داشت:

$$dy = f'(x)\cdot\Delta x = ۱ \times \Delta x = \Delta x$$

ازطرفی $dy = dx$ پس: ازمقایسهٔ دو نتیجه خواهیم داشت:

$$\Delta x = dx$$

بنابراین می‌توان گفت اگر x متغیر مستقل باشد:

$$\Delta x = dx$$

پس: فرمول دیفرانسیل چنین خواهد بود:

$$\boxed{dy = f'(x).dx}$$

و

$$\boxed{\Delta y \simeq f'(x).dx}$$

مسأله: درکره‌ای به شعاع $۵۰cm$ ، دراثر گرما، شعاع کره به اندازه ۰/۰۱ زیاد شده‌است. به‌کمك دیفرانسیل تغییر سطح کره و تغییرحجم کره‌را بیابید.

الف) محاسبهٔ تغییر سطح کره:

$$S_{\text{کره}} = ۴\pi R^۲ \Longrightarrow S' = ۸\pi R$$
$$\Delta S \simeq dS = S' \times dR$$
$$= ۸\pi R \times dR = ۸\pi(۵۰) \times \frac{۱}{۱۰۰} = ۴\pi$$

ب) محاسبهٔ تغییرحجم کره:

$$V_{\text{کره}} = \frac{۴}{۳}\pi R^۳ \Longrightarrow V' = ۴\pi R^۲$$
$$\Delta V \simeq dV = S' \times dR = ۴\pi R^۲ dR$$
$$= ۴\pi(۲۵۰۰) \times \frac{۱}{۱۰۰} = ۱۰۰\pi$$

مسأله: مکعبی به یال $۱۰cm$ را حرارت داده‌ایم، در نتیجه $۳۰cc$ تغییر حجم داده است. تغییرطول یال را به‌کمك دیفرانسیل بیابید.

$$x = \text{طول یال مکعب}$$
$$V = x^۳ \Longrightarrow V' = ۳x^۲$$
$$dV = V'.dx \Longrightarrow dV = ۳x^۲dx \Longrightarrow$$
$$۳۰ = ۳(۱۰۰).dx \Longrightarrow dx = \frac{۱}{۱۰}cm$$

اگر $y=f(x)$ معادلهٔ تابع باشد:

چنانچه متغیر (x) باشد، تابع $f(x)$ است.

چنانچه متغیر $(x+\Delta x)$ باشد، تابع $f(x+\Delta x)$ است.

$$\Longrightarrow \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

داشتیم:

$$\Delta y\simeq f'(x)\cdot\Delta x$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)\simeq f'(x)\cdot\Delta x$$

$$\Longrightarrow \boxed{f(x+\Delta x)\simeq f(x)+f'(x)\cdot\Delta x}$$

این رابطه مقدار تقریبی وضع جدید تابع پس ازاین‌که x به اندازهٔ Δx تغییر کرده‌است را نشان می‌دهد.

مسأله: مقدار تقریبی $\sqrt[5]{33}$ را بیابید.

فرض می‌کنیم $f(x)=\sqrt[5]{x}$، آنگاه:

$$f'(x)=\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

حال اگر $x=32=2^5$ و $\Delta x=1$ درنظر بگیریم:

$$f(x+\Delta x)\simeq f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$$

$$\sqrt[5]{x+\Delta x}\simeq\sqrt[5]{x}+\frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}\cdot\Delta x$$

$$\sqrt[5]{32+1}\simeq\sqrt[5]{2^5}+\frac{1}{5\sqrt[5]{2^{20}}}\times 1$$

$$=2+\frac{1}{80}=2/0125$$

مقدار واقعی $\sqrt[5]{33}$ تا چهار رقم بعداز ممیز برابر است با:
۲/۰۱۲۴

مسأله: مقدار تقریبی $tg74^\circ$ را بیابید.

فرض می‌کنیم $f(x)=tg x$، آنگاه:

$$f'(x)=1+tg^2x$$

حال اگر $x=75^\circ=\frac{5\pi}{12}$

$\Delta x=-1^\circ=-\frac{\pi}{180}$ رادیان

می‌توان نوشت:

$$f(x+\Delta x)\simeq f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$$

$$tg(x+\Delta x)\simeq tg x+(1+tg^2x)\cdot\Delta x$$

$$tg(75^\circ-1^\circ)\simeq tg\frac{5\pi}{12}+(1+tg^2\frac{5\pi}{12})\times(-\frac{\pi}{180})$$

$$tg74^\circ\simeq 2+\sqrt{3}+(1+(2+\sqrt{3})^2)(-\frac{\pi}{180})$$

$$tg74^\circ\simeq 2+\sqrt{3}-(8+4\sqrt{3})(\frac{\pi}{180})=3/471$$

مقدار واقعی $tg74^\circ$ تا چهار رقم بعداز ممیز برابر است با:
۳/۴۸۷۴

مسأله: مقدار تقریبی $Arctg1/02$ را بیابید.

فرض می‌کنیم: $f(x)=Arctg x$، آنگاه:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

حال اگر: $x=1$ و $\Delta x=\frac{2}{100}$، داریم:

$$f(x+\Delta x)\simeq f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$$

$$Arctg(x+\Delta x)\simeq Arctg x+\frac{1}{1+x^2}\times\Delta x$$

$$Arctg(1+\frac{2}{100})\simeq Arctg1+\frac{1}{1+1}(\frac{2}{100})$$

$$Arctg1/02\simeq\frac{\pi}{4}+\frac{1}{100}$$

مسأله: مقدار تقریبی $\sqrt[n]{a^n+b}$ را بیابید، $n>1$ و $n\in N$، $a>0$ فرض می‌کنیم: $f(x)=\sqrt[n]{x}$، آنگاه:

$$f'(x)=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

اگر $x=a^n$ و $\Delta x=b$ باشد، خواهیم داشت:

$$f(x+\Delta x)\simeq f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$$

$$\sqrt[n]{x+\Delta x}\simeq\sqrt[n]{x}+\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\cdot\Delta x$$

$$\sqrt[n]{a^n+b}\simeq\sqrt[n]{a^n}+\frac{1}{n\sqrt[n]{a^{n(n-1)}}}\,b$$

$$\sqrt[n]{a^n+b}\simeq a+\frac{b}{na^{n-1}}$$

دستورهای دیفرانسیل توابع:

$$dy=y'\cdot dx$$

$$du=u'\cdot dx$$

$$dv=v'\cdot dx$$

مثال • دیفرانسیل توابع زیر را بیابید:

۱) $y=\operatorname{Arctg}x\sqrt{1-x^2}$

$$dy=y'\cdot dx=\frac{(x\sqrt{1-x^2})'}{1+(x\sqrt{1-x^2})^2}dx$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}+\dfrac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1+x^2(1-x^2)}dx$$

$$dy=\frac{\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1+x^2(1-x^2)}dx$$

$$=\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2-x^4)}dx$$

۲) $y=\operatorname{Arccos}(tg^4x)$

$$dy=y'.dx=\frac{-(tg^4x)'}{\sqrt{1-tg^8x}}dx$$

$$=-\frac{4tg^3x(1+tg^2x)dx}{\sqrt{1-tg^8x}}$$

تمرینها : دیفرانسیل هریك از توابع زیررا بیابید:

۱) $y=\sqrt{1-x^2}\sin x\sqrt{4-x^2}$

۲) $y=\sqrt[3]{(\operatorname{Arctg}\sqrt[3]{x^3})^2}$

۳) $y=\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}tg\frac{1}{x}$

۴) $y=tg x\operatorname{Arctg}\sqrt[3]{x^2}$

۵) $y=(\operatorname{Arc}tg x^2)^2\cos x\sqrt{4-x^2}$

تمرینها : ۱) به‌کمك دیفرانسیل تغییر تابع به معادلهٔ:

$$f(x)=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$$

را در $x=2$ وقتی $\Delta x=0/1$ بیابید.

۲) مقدار تقریبی $\sqrt[7]{129}$ ، $\sin 27^\circ$ ، $\operatorname{cotg}33^\circ$ ،
$\operatorname{Arctg}1/02$ را بیابید.

۲ـ انتگرال[1] و تابع اولیه

انتگرال گرفتن به دو معنی است.

معنی اول: پیداکردن تابعی است که مشتق آن در دست است.

1_ Integration

معنی دوم: محاسبهٔ سطح محصور بین منحنیها و محاسبهٔ حجم اجسام و طول قوسها و...

حال به معنی اول برمی‌گردیم.

فرض کنیم، $F(x)$ تابعی درفاصلهٔ (I) تعریف شده و مشتق‌پذیر باشد، ومشتق آن‌را $f(x)$ فرض می‌کنیم. به طوری‌که:

$$\forall x\in I\ :\ F'(x)=f(x)$$

دراین‌صورت بنابه تعریف، $F(x)$ را یکی‌از توابع‌اولیهٔ‌تابع $f(x)$ می‌گوییم.

مثال: اگر $f(x)=2x$، آنگاه $F(x)=x^2$ و

$$F_1(x)=x^2+1$$

$$F_2(x)=x^2-5$$

$$F_3(x)=x^2+\sqrt{2}$$

بنابراین جـواب‌کلی تابع اولیه تابع $y=f(x)$ بصورت $F(x)+c$ است.

فرض‌کنید: $dy=f(x)dx$، اگر تابعی مانند: $F(x)$ داشته باشیم، به طوری که $dF(x)=f(x)\cdot dx$، در این صورت $F(x)$ را یـك انتگرال $f(x)$ نسبت به x می‌نامیم.

ضمناً می‌توان‌نوشت:

$$d(F(x)+c)=dF(x)+dc=dF(x)+0$$

پس: $F(x)+c$، نیز انتگرال $f(x)\cdot dx$ است.

نماد $\int$ را نماد انتگرال گوییم، بنابراین:

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

« $f(x)dx$ را معادلهٔ دیفرانسیلی گویند.»

خلاصه: اگر $F(x)+c$ تابعی‌باشد در فاصلهٔ (I) معین و مشتق‌پذیر و دیفرانسیل آن $f(x)dx$ باشد، داریم:

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

حال تابع

$$F(x)+c=\frac{x^{m+1}}{m+1}+c$$

$m\neq -1$ و $m\in R$ را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم:

$$dF(x)=f(x)dx$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$dF(x)=f(x)dx=x^m dx$$

$$\Longrightarrow \int f(x)dx=F(x)+c \Longrightarrow$$

$$\boxed{\text{فرمول انتگرال}\quad \int x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}+c \qquad m\in R\ ,\ m\neq -1}$$

مثال:

۱) $\int x^4 dx=\frac{x^5}{5}+c$

۲) $\int x^{-4} dx=\frac{x^{-3}}{-3}+c$

۳) $\int x^{\frac{1}{2}} dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c$

۴) $\int x^{-\frac{5}{7}} dx=\frac{x^{\frac{2}{7}}}{\frac{2}{7}}+c$

مثال :

$$5)\quad \int 2x^7dx = 2\int x^7dx = 2\times\frac{x^8}{8}+c$$
$$=\frac{x^8}{4}+c$$

$$6)\quad \int 2\sqrt[5]{x^2}dx = 2\int x^{\frac{2}{5}}dx = 2\times\frac{x^{\frac{7}{5}}}{\frac{7}{5}}+c$$
$$=\frac{10}{7}x^{\frac{7}{5}}+c=\frac{10}{7}x\sqrt[5]{x^2}+c$$

$$7)\quad \int\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[5]{x}} = 2\sqrt{2}\int x^{-\frac{1}{5}}dx$$
$$=2\sqrt{2}\times\frac{x^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}}+c$$
$$=\frac{5\sqrt{2}}{2}x^{\frac{4}{5}}+c=\frac{5\sqrt{2}}{2}\sqrt[5]{x^4}+c$$

$$8)\quad \int(2x^3+5x^2+6x+2)dx=$$
$$2\int x^3dx+5\int x^2dx+6\int xdx+2\int dx$$
$$=2\times\frac{x^4}{4}+5\times\frac{x^3}{3}+6\times\frac{x^2}{2}+2x+c$$
$$=\frac{1}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3+3x^2+2x+c$$

تابع $F(x)+c=\frac{u^{m+1}}{m+1}+c$ را درنظر می گیریم.

$m\neq -1$ و $m\in R$ فرض می کنیم:

$$dF(x)+c=f(x)dx$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$dF(x)=f(x)dx=\frac{(m+1)u'u^m}{m+1}dx$$
$$\Longrightarrow dF(x)=f(x)dx=u^m du \Longrightarrow$$

$$\boxed{\int u^m du=\frac{u^{m+1}}{m+1}+c \qquad m\in R,\ m\neq -1}$$

فرمول کلی انتگرال

مثال :

$$1)\quad \int u^4du=\frac{u^5}{5}+c$$

$$2)\quad \int u^{10}du=\frac{u^{11}}{11}+c$$

$$3)\quad \int u^{-8}du=\frac{u^{-7}}{-7}+c$$

$$4)\quad \int u\sqrt{u}du=\int u^{\frac{3}{2}}du=\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+c$$
$$=\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+c$$

$$5)\quad \int\frac{4du}{\sqrt[5]{u}}=4\int u^{-\frac{1}{5}}du=4\times\frac{u^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}}+c$$
$$=5u^{\frac{4}{5}}+c$$

$$6)\quad \int\frac{u^2-5u}{u^6}du=\int\frac{u^2}{u^6}du-5\int\frac{u}{u^6}du$$
$$=\int u^{-4}du-5\int u^{-5}du$$
$$=\frac{u^{-3}}{-3}-5\frac{u^{-4}}{-4}+c=\frac{-1}{3u^3}+\frac{5}{4u^4}+c$$

انواع انتگرال‌گیری:

نوع اول :

از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int (ax+b)^m dx = \frac{(ax+b)^{m+1}}{a^{m+1}} + c$$

$m \in R \ , \ m \neq -1$

مثال :

$$1) \quad \int (1-x)^{10} dx = \frac{(1-x)^{11}}{-1(11)} + c$$

مثال :

$$2) \quad \int \sqrt[5]{(1-2x)^2}\, dx = \int (1-2x)^{\frac{2}{5}} dx$$

$$= \frac{(1-2x)^{\frac{9}{5}}}{-2 \times \frac{9}{5}} + c$$

تمرینها :

$$\int (2x-3)^{100} dx = ? \qquad \int \frac{dx}{\sqrt[11]{4x-3}} = ?$$

$$\int \frac{2\sqrt{2}}{(x-3)^{10}} dx = ?$$

نوع دوم :

انتگرالهایی‌است‌شامل دو عامل به نامهای عامل اصلی و عامل مشتق.

عامل اصلی: ازهردرجه وهرجا باشد (منظور ازهرجا باشد این‌است‌که درصورت‌کسر یا در مخرج‌کسر یا داخل رادیکال باشد).

عامل مشتق : مشتق‌عامل اصلی‌است‌و درصورت کسر است (البته اگر مسأله‌کسری باشد).

حل: عامل‌اصلی‌را u فرض‌کرده از این‌فرض دیفرانسیل می‌گیریم و در مسأله قرار می‌دهیم.

توجه: این‌نوع حل را روش تغییر متغیر گویند.

مسأله:

$$I = \int \frac{(3x^2-2)dx}{(x^3-2x)^{10}}$$

$$\begin{cases} x^3-2x = & \text{عامل اصلی} \\ 3x^2-2 = & \text{عامل مشتق} \end{cases}$$

در مسأله قرار می‌دهیم:

$$u = x^3 - 2x \implies du = (3x^2-2)dx$$

$$I = \int \frac{du}{u^{10}} = u^{-10} du = \frac{u^{-9}}{-9} + c$$

$$= \frac{-1}{9u^9} + c = \frac{-1}{9(x^3-2x)^9} + c$$

تمرین: مطلوب‌است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

$$1) \int \frac{(x^3-1)dx}{(x^4-4x)^7} \qquad 2) \int \frac{(8x-8)dx}{\sqrt[5]{x^2-2x}}$$

$$3) \int x^{n-1} \sqrt[11]{x^n+4}\, dx$$

$$4) \int (\sqrt{x}-\sqrt{3})^{100} \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

نوع سوم:

انتگرالهایی است شامل دوعامل به نامهای عامل اصلی و عامل اضافی.

عامل اصلی‌به صورت $(ax+b)$ است .

عامل اضافی ازهردرجه ولی در صورت‌کسر است (البته اگرمسأله‌کسری باشد) .

حل: عامل‌اصلی را u فرض می‌کنیم، از این فرض هم، دیفرانسیل می‌گیریم وهم عامل‌اضافی را حساب می‌کنیم و در مسأله قرار می‌دهیم.

مسأله:

$$I=\int\frac{x^2dx}{(x-2)^{10}}$$

$$\begin{cases} x-2 & \text{:عامل اصلی} \\ x^2 & \text{:عامل اضافی} \end{cases}$$

$$u=x-2 \begin{cases} du=dx \\ x=u+2 \end{cases} \Longrightarrow x^2=u^2+4u+4$$

در مسأله قرار می‌دهیم:

$$I=\int\frac{(u^2+4u+4)du}{u^{10}}$$

$$=\int u^{-8}du+4\int u^{-9}du+4\int u^{-10}du$$

$$=\frac{u^{-7}}{-7}+4\times\frac{u^{-8}}{-8}+4\times\frac{u^{-9}}{-9}+c$$

$$=\frac{-1}{7u^7}-\frac{1}{2u^8}-\frac{4}{9u^9}+c$$

$$=\frac{-1}{7(x-2)^7}-\frac{1}{2(x-2)^8}-\frac{4}{9(x-2)^9}+c$$

تمرین: مطلوب است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

$$\int(x-2)^{1000}(x^2+4)\,dx \qquad \int\frac{x^2dx}{(x+1)^{20}}$$

$$\int\frac{(x^2-1)dx}{(x-2)^6} \qquad \int\frac{(x^2+1)dx}{\sqrt[5]{x-1}}$$

نوع چهارم:

انتگرالهایی است ترکیبی از نوع دوم و سوم، یعنی مسألهٔ انتگرال شامل سه عامل است به نامهای: اصلی، مشتق و اضافی

عامل اصلی از هردرجه وهر جا باشد.

عامل مشتق درصورت است.

عامل اضافی از هردرجه ولی در صورت کسر است.

حل: مانند انتگرال نوع سوم حل می‌کنیم.

مسأله:

$$I=\int\frac{4x^{11}dx}{(x^4-2)^{12}}=\int\frac{x^8(4x^3)dx}{(x^4-2)^{12}}$$

$$\begin{cases} x^4-2 & \text{:عامل اصلی} \\ 4x^3 & \text{:عامل مشتق} \\ x^8 & \text{:عامل اضافی} \end{cases}$$

$$u=x^4-2 \Longrightarrow \begin{cases} dx=4x^3dx \\ x^4=u+2 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$x^8=u^2+4u+4$$

$$I=\int\frac{(u^2+4u+4)du}{u^{12}}$$

$$=\int u^{-10}du+4\int u^{-11}du+4\int u^{-11}du$$

$$=\frac{u^{-9}}{-9}+4\times\frac{u^{-10}}{-10}+4\times\frac{u^{-11}}{-11}+c$$

$$=\frac{-1}{9u^9}-\frac{2}{5u^{10}}-\frac{4}{11u^{11}}+c$$

$$=\frac{-1}{9(x^4-2)^9}-\frac{2}{5(x^4-2)^{10}}-\frac{4}{11(x^4-2)^{11}}+c$$

تمرین: مطلوب است محاسبهٔ انتگرالهای زیر:

$$\int \frac{x^{19}dx}{\sqrt[11]{x^5-1}} \qquad \int \frac{2x^7dx}{(x^2-1)^{14}}$$

نوع پنجم:

محاسبهٔ $n\in R\ ,\ n\neq -1$

$$I=\int \frac{(ax+b)^n}{(a'x+b')^{n+2}}dx$$

$$u=\frac{ax+b}{a'x+b'} \Longrightarrow du=\frac{ab'-a'b}{(a'x+b')^2}dx$$

در عبارت زیر قرار می‌دهیم:

$$I=\frac{1}{ab'-a'b}\int\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^n$$

$$\times\frac{ab'-a'b}{(a'x+b')^2}dx$$

$$I=\frac{1}{ab'-a'b}\int u^n du=\frac{1}{ab'-a'b}\times\frac{u^{n+1}}{n+1}+c$$

$$=\frac{1}{(ab'-a'b)(n+1)}\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^{n+1}+c$$

$$\Longrightarrow \int \frac{(ax+b)^n}{(a'x+b')^{n+2}}dx$$

$$=\frac{1}{(n+1)(ab'-a'b)}\left(\frac{ax+b}{a'x+b'}\right)^{n+1}+c$$

دانش‌آموزان گرامی در سال چهارم باید انتگرال فوق را با اثبات حل کنند ولی در تستها می‌توانند از این فرمول استفاده کنند.

مثال:

$$\int\frac{(2x-1)^{10}}{(2x+1)^{12}}dx=\frac{1}{(2+2)(11)}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{11}+c$$

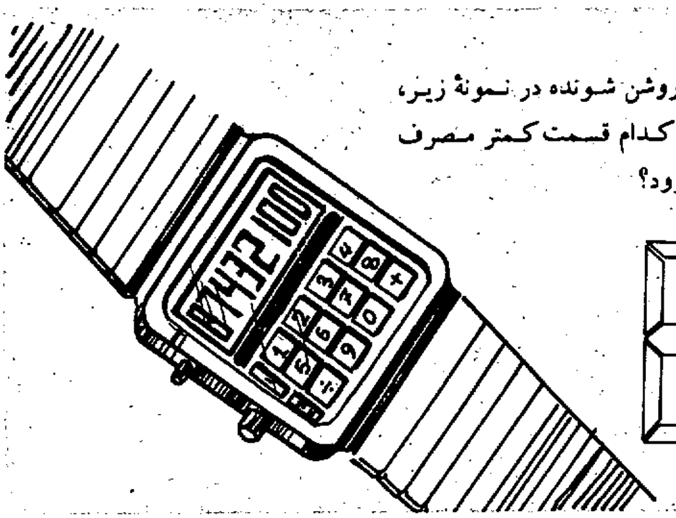
$$=\frac{1}{44}\left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^{11}+c$$

تمرین: مطلوب است محاسبهٔ انتگرالهای زیر با اثبات کامل:

$$\int \sqrt[5]{\frac{x+2}{x-2}}\times\frac{dx}{(x+2)^2} \qquad \int\frac{dx}{(x+1)^2}\sqrt[7]{\frac{x-1}{x+1}}$$

تفریح اوقات فراغت

ساعتهای رقمی، ارقام را، با قسمتهای روشن شونده در نمونهٔ زیر، نشان می‌دهند. در مورد ارقام ۰ تا ۹ کدام قسمت کمتر مصرف می‌شود؟ کدام قسمت بیشتر به کار می‌رود؟



جواب در صفحهٔ ۹۶