دوران
در هندسه
تحلیلی

(مورد استفاده دانش آموزان سوم و چهارم ریاضی ـ فیزیک)

● محمد ابراهیم گیتی زاده

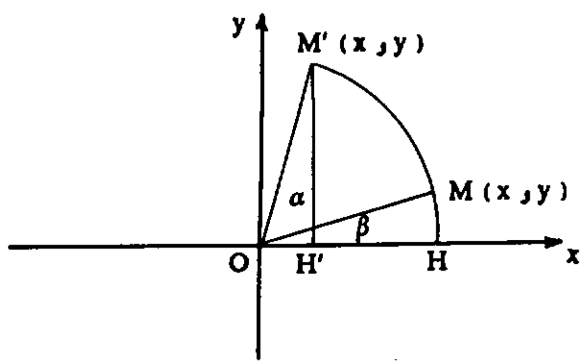
۱ ـ دوران در صفحهٔ حول مبدأ مختصات

۱ ـ ۱. تعریف:

در صفحه محورهای مختصات قائم xoy زاویه جهت‌دار α را که اندازهٔ جبری آن در جهت مثلثاتی مثبت باشد درنظر می‌گیریم. اگر متناظر هر نقطه M از این صفحه 'M را چنان اختیار کنیم که $OM' = OM$ و $(\widehat{OM}, OM') = \alpha$ باشد، آنگاه نقطهٔ 'M را تبدیل یافتهٔ نقطهٔ M در دوران به زاویهٔ α گرد مبدأ مختصات می‌نامیم و به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$R_o^{\alpha}(M) = M'$$

متقابلاً، نقطهٔ M تبدیل یافتهٔ نقطهٔ 'M در دوران به زاویهٔ $(-\alpha)$ گِرد مبدأ مختصات خواهد بود، $R_o^{-\alpha}(M) = M'$



۱ ـ ۲. محاسبهٔ مختصات دوران یافته یک نقطه.

در شکل بالا، فرض می‌کنیم که تبدیل یافتهٔ نقطهٔ $M(x, y)$ در دوران R_o^{α} نقطهٔ $M'(x,y)$ باشد. باتوجه‌به‌این‌که $(OX \hat{,} OM)=\beta$ ، $\overline{HM} = y$ ، $\overline{OH'} = X$ ، $\overline{OH} = X$ ، $(OM \hat{,} OM') = \alpha$ و $\overline{H'M'} = y$ ، در دو مثلث OMH و 'OM'H می‌توان نوشت:

$$OM = \frac{x}{\cos\beta} \quad , \quad OM' = \frac{X}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$OM' = OM \Rightarrow \frac{X}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{x}{\cos\beta}$$

$$X = \frac{x\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta} = \frac{x(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)}{\cos\beta}$$

$$= x\cos\alpha - x\sin\alpha\,\mathrm{tg}\beta$$

اما در مثلث OMH ، $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{y}{x}$. پس:

$$X = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

در همان مثلث و به روش مشابه خواهیم داشت:

$$Y = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

بنابراین:

$$R_o^{\alpha}\ [M(x,y)] = M'(X = x\cos\alpha - y\sin\alpha\ ,$$

$$Y = \sin\alpha + y\cos\alpha)$$

در این‌صورت می‌توان گفت که ماتریس دوران به زاویهٔ α حول مبدأ مختصات عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

یعنی:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{bmatrix}$$

متقابلاً، نقطهٔ $M(x, y)$ تبدیل یافته نقطه $M'(x, y)$ در دوران $R_O^{-\alpha}$ است، یعنی:

$$R_O^{-\alpha}\left[M'(X,Y)\right] = M(x = X\cos\alpha + Y\sin\alpha,$$
$$y = -X\sin\alpha + Y\cos\alpha)$$

مثلاً تبدیل یافتهٔ نقطه $M(۲ \text{ و } -۴)$ در دوران به زاویهٔ ۳۰° و به مرکز مبدأ مختصات عبارت است از:

$$M'\left| \begin{array}{l} X = ۲\cos ۳۰^\circ + ۴\sin ۳۰^\circ = \sqrt{۳} + ۲ \\ Y = ۲\sin ۳۰^\circ - ۴\cos ۳۰^\circ = ۱ - ۲\sqrt{۳} \end{array} \right.$$

و برعکس، اگر نقطهٔ $M'(\sqrt{۳}+۲, ۱-۲\sqrt{۳})$ رابه زاویه (-۳۰°) گرد مبدأ مختصات دوران دهیم، نقطه $M(۲ \text{ و } -۴)$ به‌دست می‌آید،

$$M\left| \begin{array}{l} x = (\sqrt{۳}+۲)\cos(-۳۰^\circ) - (۱-۲\sqrt{۳})\sin(-۳۰^\circ) \\ y = (\sqrt{۳}+۲)\sin(-۳۰^\circ) + (۱-۲\sqrt{۳})\cos(-۳۰^\circ) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow M(۲ \text{ و } -۴)$$

اکنون به دوران یافته‌های نقطهٔ $M(x, y)$ درحالتهای خاص زیر توجه کنید:

الف. $R_O^{\alpha}\left[M(۰,۰)\right] = M'(۰,۰)$

یعنی، دوران یافته مرکز دوران بر خودش منطبق است.

ب. $\alpha = ۰ \Rightarrow M'(x,y)$

یعنی، دوران صفر یک تبدیل همانی است.

ج. $\alpha = ۱۸۰^\circ \Rightarrow M'(-x,-y)$

یعنی، دوران به زاویهٔ ۱۸۰° تقارن نسبت به مبدأ مختصات است.

د. اگر زاویهٔ خط OM با محور ox برابر β باشد:

$$\alpha = \pi - ۲\beta \Rightarrow M'\left| \begin{array}{l} x\cos(\pi-۲\beta) - y\sin(\pi-۲\beta) \\ x\sin(\pi-۲\beta) + y\cos(\pi-۲\beta) \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$M'\left| \begin{array}{l} -x\cos ۲\beta - y\sin ۲\beta \\ x\sin ۲\beta - y\cos ۲\beta \end{array} \right.$$

چون $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{y}{x}$ است، پس از قراردادن مقادیر:

$$\cos ۲\beta = \frac{۱-\operatorname{tg}^۲\beta}{۱+\operatorname{tg}^۲\beta} = \frac{x^۲-y^۲}{x^۲+y^۲}$$

$$\sin ۲\beta = \frac{۲\operatorname{tg}\beta}{۱+\operatorname{tg}^۲\beta} = \frac{۲xy}{x^۲+y^۲}$$

و ساده کردن، $M'(-x, y)$ به‌دست می‌آید. یعنی، دوران به زاویهٔ $\pi - ۲\beta$، که β زاویهٔ خط OM با محور ox است، تقارن نسبت به محور عرضها است.

ه. با همان فرض که β زاویهٔ خط OM با محور ox باشد، به طریق مشابه ثابت می‌شود:

$$\alpha = -۲\beta \Rightarrow M'(x,-y)$$

یعنی: این دوران، تقارن نسبت به محور طولها است.

مثال. نقطهٔ $A(۲ \text{ و } ۴)$ را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به‌اندازه‌ای دوران می‌دهیم تا بر خط $y = ۲x + \sqrt{۲}$ قرار گیرد. کوچکترین اندازهٔ زاویهٔ دوران را پیدا کنید.

طریقهٔ اول. دوران یافته نقطهٔ A را A' فرض می‌کنیم و مختصات آن‌را بر حسب زاویه دوران، که α درنظر گرفته می‌شود، به‌دست می‌آوریم.

$$A' \left| \begin{array}{l} x\cos\alpha - y\sin\alpha = ۴\cos\alpha - ۲\sin\alpha \\ x\sin\alpha + y\cos\alpha = ۴\sin\alpha + ۲\cos\alpha \end{array} \right.$$

چون نقطهٔ A' بر خطِ به معادلهٔ $y = ۲x + \sqrt{۲}$ قرار دارد،

$$۴\sin\alpha + ۲\cos\alpha = ۲(۴\cos\alpha - ۲\sin\alpha) + \sqrt{۲}$$

$$۸\sin\alpha - ۶\cos\alpha = \sqrt{۲}$$

معادله را برحسب $tg\,\frac{\alpha}{۲}$ می‌نویسیم و ساده می‌کنیم:

$$(۶-\sqrt{۲})\,tg^۲\frac{\alpha}{۲} + ۱۶\,tg\frac{\alpha}{۲} - (۶+\sqrt{۲}) = ۰$$

از حلِّ این معادله $tg\frac{\alpha}{۲} = -\frac{۲۵\sqrt{۲}+۳۱}{۱۷}\,,\ tg\frac{\alpha}{۲} = \sqrt{۲} - ۱$

به‌دست می‌آید که به جواب قابل قبول آن $\alpha = \frac{\pi}{۴}$ است.

طریقه دوم: ابتدا معادلهٔ دایره‌ای می‌نویسیم که مرکز آن مبدأ مختصات و شعاع آن طول OA باشد. نقطهٔ تلاقی این دایره با خط $y = ۲x + \sqrt{۲}$ که با شرط مسأله مطابقت دارد نقطهٔ A' است.

سپس زاویهٔ بین دو خط OA و OA' را، که زاویهٔ دوران است، به‌دست می‌آوریم:

$$OA^۲ = ۲۰ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۲۰$$

$$\begin{cases} x^۲ + y^۲ = ۲۰ \\ y = ۲x + \sqrt{۲} \end{cases} \Rightarrow$$

$$۵x^۲ + ۴\sqrt{۲}x - ۱۸ = ۰ \Rightarrow A'(\sqrt{۲}\,,\, ۳\sqrt{۲})$$

$$m_{OA} = \frac{۱}{۲}\ ,\ m_{OA'} = ۳$$

$$tg(OA, OA') = \left| \frac{m_{oA} - m_{oA'}}{۱ + m_{oA}\cdot m_{oA'}} \right| = ۱$$

$$\Rightarrow (\widehat{OA\,;\,OA'}) = \frac{\pi}{۴}$$

تمرین

۱ـ دوران یافتهٔ نقطهٔ $M(x\,,y)$ را در هریک از حالتهای زیر پیدا کنید:

الف: $\alpha = ۹۰^\circ$ ب: $\alpha = -۹۰^\circ$ ج: $\alpha = ۴۵^\circ$

۲ـ نقطهٔ A (۲ و ۴) را به چه زاویه‌ای در جهت مثلثاتی دهیم تا دوران یافته آن به فاصلهٔ ۲ از نیمساز ناحیهٔ اول محورهای مختصات قرار گیرد؟

۱ـ ۳. دوران یک شکل:

قضیهٔ ۱. مکان هندسی دوران یافته‌های نقاط هر خط راست، یک خط راست است. یا، دوران یافته هر خط راست، یک خط راست است.

برهان. خط راست d به معادلهٔ $ax + by + c = ۰$ و نقطهٔ متغیر $M(t\,,\,-\frac{at+c}{b})$ را روی آن درنظر می‌گیریم. تبدیل یافتهٔ این نقطه در دوران R_o^α نقطهٔ M' است به‌طوری که

$$M' \left| \begin{array}{l} X = t\cos\alpha + \dfrac{at+c}{b}\sin\alpha \\[2ex] Y = t\sin\alpha - \dfrac{at+c}{b}\cos\alpha \end{array} \right.$$

ثابت می‌کنیم مکان هندسی نقطه M' وقتی t تغییر کند یک خط راست است. برای این منظور بین رابطه‌های X و Y پارامتر t را حذف می‌کنیم:

$$\begin{cases} bX - c\sin\alpha = t(b\cos\alpha + a\sin\alpha) \\ bY + c\cos\alpha = t(b\sin\alpha - a\cos\alpha) \end{cases}$$

$$\frac{bX - c\sin\alpha}{bY + c\cos\alpha} = \frac{b\cos\alpha + a\sin\alpha}{b\sin\alpha - a\cos\alpha}$$

پس از ساده کردن، معادله زیر به‌دست می‌آید:

$$a(X\cos\alpha + Y\sin\alpha) + b(-X\sin\alpha + Y\cos\alpha) + c = ۰ \quad (۱)$$

این معادله، نمایش یک خط راست مانند d' است. چون مختصات نقطهٔ $M'(X, Y)$ دوران یافتهٔ هر نقطهٔ $M(x, y)$ از خط d، در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند، و به عکس، تبدیل یافته هر نقطهٔ $M'(X, Y)$ از خط d' در دوران $R_O^{-\alpha}$ بر خط d واقع است، لذا معادله (۱) معادلهٔ دوران یافته خط d است.

دستور. برای نوشتن معادلهٔ تبدیل یافتهٔ یک خط معلوم در دوران R_O^{α}، کافی است در معادله این خط x را $x\cos\alpha + y\sin\alpha$ و y را به $-x\sin\alpha + y\cos\alpha$ تبدیل کنیم.

مثال: معادله تبدیل یافته خط d به معادلهٔ $x + y = 1$ در دوران $R_O^{45^\circ}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$x \longrightarrow x\cos\alpha + y\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$$

$$y \longrightarrow -x\sin\alpha + y\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)$$

$$d: x + y = 1 \longrightarrow d': y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

متقابلاً، خط d تبدیل یافته خط d' در دوران $R_O^{-45^\circ}$ است، زیرا:

$$y \longrightarrow -x\sin(-45^\circ) + y\cos(-45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$$

$$d': y = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow d: x + y = 1$$

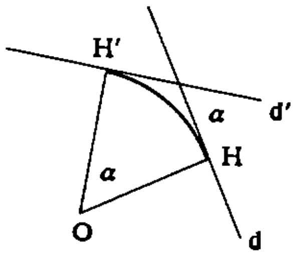
تذکر. نماد ⟶ را بخوانید «... تبدیل می‌شود به ...».

نتیجه. اگر d و d' دو خط متناظر در دوران R_O^{α} باشند و از نقطهٔ O دو خط OH و OH' را بر این دو خط عمود کنیم:

اولاً: H و H' در این دوران دو نقطه متناظرند.

ثانیاً: چون $OH = OH'$، پس مرکز دوران از دو خط متناظر به یک فاصله است.

• یکی از روشهای ترسیم دوران یافتهٔ یک خط، مانند d، استفاده از نتیجه بالا است. به این طریق که از نقطهٔ O (مرکز دوران) خط OH را بر خط d عمود کرده تبدیل یافته نقطه H (پای عمود) را تعیین می‌کنیم و آن‌را H' می‌نامیم. خط d' که از نقطه H' بر خط OH' عمود شود دوران یافتهٔ خط d خواهد بود.



قضیهٔ ۲. در دوران R_O^{α}، زاویه‌های بین دو خط متناظر d و d' با $|\alpha|$ و $\pi - |\alpha|$ برابرند.

برهان. اثبات قضیه با توجه به شکل بالا به آسانی ممکن می‌شود، اما به روش تحلیلی، خط d و دوران یافتهٔ آن خط d' را به معادله‌های زیر درنظر می‌گیریم:

$$d: y = ax + b$$

$$d': -x\sin\alpha + y\cos\alpha = a(x\cos\alpha + y\sin\alpha) \Rightarrow$$

$$y(\cos\alpha - a\sin\alpha) - x(\sin\alpha + a\cos\alpha) = b$$

ضریب زاویه‌ای خط d مساوی a و ضریب زاویه‌ای خط d' برابر $\dfrac{\sin\alpha + a\cos\alpha}{\cos\alpha - a\sin\alpha}$ است، بنابراین اگر زاویهٔ بین این دو خط را ω فرض کنیم، داریم:

$$\mathrm{tg}\,\omega = \pm\frac{\dfrac{\sin\alpha + a\cos\alpha}{\cos\alpha - a\sin\alpha} - a}{1 + \dfrac{a(\sin\alpha + a\cos\alpha)}{\cos\alpha - a\sin\alpha}} = \pm\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\omega = |\alpha| \quad , \acute{\omega} = \pi - |\alpha|$$

نتیجه. دوران یافته هر زاویه با آن زاویه برابر است،

$$\left[R_O^{\alpha}(AB) = A'B', R_O^{\alpha}(BC) = B'C'\right] \Rightarrow A'\hat{B'}C' = A\hat{B}C$$

قضیهٔ ۳. دوران یافته هر پاره، با آن پاره‌خط برابر است.

برهان. دو نقطهٔ $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ و دوران یافته‌های آنها $A'(X_1, Y_1)$ و $B'(X_2, Y_2)$ را درنظر می‌گیریم.

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

$$A'B'=\sqrt{(X_2-X_1)^2+(Y_2-Y_1)^2}$$

اما،

$$\begin{cases} X_2-X_1=(x_2-x_1)\cos\alpha-(y_2-y_1)\sin\alpha \\ Y_2-Y_1=(x_2-x_1)\sin\alpha+(y_2-y_1)\cos\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow A'B'=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$A'B'=AB$$

قضیهٔ ۴. تبدیل یافته هر شکل در هر دوران، با آن شکل برابر است.

برهان. چون در هر دوران تبدیل یافته هر پاره‌خط، با آن پاره‌خط و تبدیل یافته هر زاویه، با آن زاویه برابر است، بنابراین دوران یافته هر شکل، با آن شکل برابر خواهد بود.

۱ ـ ۴. معادله دوران یافتهٔ یک منحنی:

هرگاه منحنی C به معادلهٔ $f(x,y)=0$ حول مبدأ مختصات به زاویه α دوران کند، معادله منحنی C' تبدیل یافتهٔ آن در این دوران، با تبدیل x به $x\cos\alpha+y\sin\alpha$ و y به $-x\sin\alpha+y\cos\alpha$ در معادلهٔ $f(x,y)$ به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} x \longrightarrow x\cos\alpha+y\sin\alpha \\ y \longrightarrow -x\sin\alpha+y\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$f(x,y)=0 \longrightarrow f(X,Y)=$$

$$f(x\cos\alpha+y\sin\alpha,\ -x\sin\alpha+y\cos\alpha)=0$$

مثال: منحنی C به معادلهٔ $y^2+y+x-1=0$ را حول مبدأ مختصات به زاویهٔ $90°$ دوران می‌دهیم. معادلهٔ منحنی C' تبدیل یافته آن را بنویسید.

حل:

$$\begin{cases} x \rightarrow x\cos 90°+y\sin 90°=y \\ y \rightarrow -x\sin 90°+y\cos 90°=-x \end{cases} \Rightarrow$$

$$C: y^2+y+x-1=0 \rightarrow C': y=-x^2+x+1$$

۱ ـ ۵: دوران مقاطع مخروطی

معادله هر مقطع مخروطی به‌صورت کلی

$$F(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \qquad (1)$$

نوشته می‌شود که در آن ضریبهای a و b و c و d و e و f اعداد حقیقی فرض می‌شوند. برحسب آن که عبارت b^2-ac عددی منفی، صفر، یا مثبت باشد، ثابت می‌شود که نوع مقطع مخروطی به‌ترتیب بیضی، سهمی، یا هذلولی است. درحالت خاصی که $b=0$ است، معادله مقطع مخروطی فاقد جمله xy، یعنی به‌صورت زیر می‌باشد:

$$G(x,y)=a'x^2+c'y^2+d'x+e'y+f'=0 \qquad (2)$$

در این حالت محور یا محورهای مقطع مخروطی به موازات محورهای مختصات بوده و مشخصات آن به آسانی تعیین می‌شوند. درحالی که اگر $b\neq 0$ یعنی معادله شامل جملهٔ xy باشد، به‌دست آوردن این مشخصات نسبتاً مشکل است. اما، با عمل دوران می‌توانیم معادلهٔ (۱) را به معادله نوع (۲) تبدیل کنیم. برای این منظور، در دوران R_O^{α} زاویهٔ α را چنان تعیین می‌کنیم که معادله تبدیل یافتهٔ معادلهٔ (۱) فاقد جملهٔ xy باشد. این تبدیل به‌صورت زیر انجام می‌گیرد:

$$(x \rightarrow x\cos\alpha+y\sin\alpha,\ y \rightarrow -x\sin\alpha+y\cos\alpha) \Rightarrow$$

$$F(x,y)=0 \rightarrow a(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2+$$
$$2b(x\cos\alpha+y\sin\alpha)(-x\sin\alpha+y\cos\alpha)+$$
$$c(-x\sin\alpha+y\cos\alpha)^2+d(x\cos\alpha+y\sin\alpha)+$$
$$e(-x\sin\alpha+y\cos\alpha)+f=0$$

ساده شدهٔ ضریب جملهٔ xy در معادلهٔ بالا، عبارت $2b\cos 2\alpha-(c-a)\sin 2\alpha$ است که باید مساوی صفر شود:

$$2b\cos 2\alpha - (c-a)\sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{2b}{c-a} \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\mathrm{arctg}\frac{2b}{c-a} + k\pi\right)$$

با انتخاب هر زاویهٔ α از رابطهٔ بالا، دورانِ R_O^{α} معادله نوع (۱) را به معادلهٔ نوع (۲) تبدیل می‌کند که در آن جمله xy وجود ندارد و در نتیجه محورهای منحنی آن با محورهای مختصات موازیند. در حقیقت، زاویهٔ α که به این ترتیب به‌دست می‌آید زاویه‌ای است که بین یکی از محورهای مختصات و یکی از محورهای مقطع مخروطی، قبل از دوران، تشکیل می‌شود.

حالت خاص. اگر $a = c$ باشد،

$$\mathrm{tg}\, 2\alpha = \pm\infty \Rightarrow 2\alpha = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{4}$$

مثال: منحنی C به معادلهٔ $y = \frac{1}{2}\left(x \pm \sqrt{12 - 3x^2}\right)$ مفروض است.

اولاً ـ تحقیق کنید این منحنی یک مقطع مخروطی از نوع بیضی است.

ثانیاً ـ این بیضی را حول مبدأ مختصات به زاویهٔ α دوران می‌دهیم تا محورهای آن با محورهای مختصات موازی شوند. پس از تعیین زاویه α، معادله تبدیل یافته این بیضی و از آن‌جا طولهای اقطار بزرگتر و کوچکتر آن را پیدا کنید.

حل: اولاً ـ معادلهٔ مفروض پس از حذف رادیکال و ساده‌کردن به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$$

معادلهٔ بالا با معادلهٔ کلی مقطع مخروطی قابل مقایسه است و در آن:

$$a = 1 \;،\; b = -\frac{1}{2} \;،\; c = 1 \;،\; d = 0 \;،\; e = 0 \;،\; f = -3$$

چون $b^2 - ac < 0$، نوع این مقطع مخروطی بیضی است.

ثانیاً ـ چون $a = c = 1$ است، می‌توانیم زاویهٔ دوران را $\alpha = \frac{\pi}{4}$ اختیار کنیم. بنابراین:

$$\left[x \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), y \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)\right] \Rightarrow$$

$$x^2 - xy + y^2 - 3 = 0 \longrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$$

منحنی معادلهٔ اخیر یک بیضی است که محور کانونی آن با محور عرضها موازی است و طولهای دو قطر بزرگتر و کوچکتر آن، که با اقطار بزرگتر و کوچکتر بیضی C متناظرند، $2\sqrt{6}$, $2\sqrt{2}$ هستند.

اگر زاویه دوران را $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ اختیار کنیم، معادلهٔ تبدیل یافته منحنی C به‌صورت $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ در می‌آید که منحنی نمایش آن یک بیضی است که محور کانونی آن به موازات محور طولها است.

۱ ـ ۶: چند مثال

مثال ۱: اگر خط d' به معادلهٔ $y = -3x + m$ تبدیل یافته خط d به معادله $y = 2x + 1$ در دوران R_O^{α} باشد، ابتدا زاویهٔ α، که حاده فرض می‌شود، و سپس ضریب m را تعیین کنید.

حل: طبق قضیّهٔ ۲، زاویهٔ دوران در این‌جا، مساوی زاویه حادهٔ بین دو خط متناظر d و d' است. بنابراین:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \left|\frac{-3-2}{1-6}\right| = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

اکنون، معادله دوران یافته خط d را در دوران $R_O^{45^\circ}$ به‌دست می‌آوریم:

$$\left[x \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), y \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)\right] \Rightarrow$$

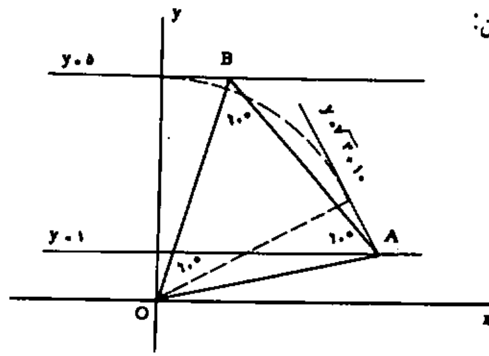
$$d: y = 2x + 1 \qquad d': y = -3x - \sqrt{2}$$

از مقایسه دو معادلهٔ $y = -3x + m$, $y = -3x + \sqrt{2}$ که برای خط d' داریم، نتیجه می‌شود: $m = -\sqrt{2}$

مثال ۲: نقطه O (مبدأ مختصات) یک رأس مثلث متساوی‌الاضلاع OAB است که در آن، رأس A بر خط $y = 1$ و رأس B بر خط $y = 5$ قرار دارد. مختصات دو رأس A و B را، که مثبت فرض می‌شوند، پیدا کنید.

حل: اگر OAB مثلث مطلوب باشد، چون $\widehat{AOB} = 60^\circ$ و

$OA = OB$ است می‌توان گفت رأس A تبدیل یافته رأس B در دوران $\bar{R}_O^{-60^\circ}$ و رأس B دوران یافته رأس A در دوران $R_O^{60^\circ}$ است.
بنابراین:



از برخورد خط $y = 1$ با تبدیل یافته خط $y = 5$ در دوران $\bar{R}_O^{-60^\circ}$، رأس A و از برخورد خط $y = 5$ با تبدیل یافته خط $y = 1$ در دوران $\bar{R}_O^{60^\circ}$، رأس B به‌دست می‌آید. محاسبهٔ مختصات این دو نقطه به‌صورت زیر است:

تعیین تبدیل یافتهٔ خط $y = 5$ در دوران $\bar{R}_O^{-60^\circ}$:

$$y \longrightarrow -x\sin(-60^\circ) + y\cos(-60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$$

$$y = 5 \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 5 \Rightarrow y = -\sqrt{3}x + 10$$

تعیین مختصات رأس A:

$$\begin{cases} y = -\sqrt{3}x + 10 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(3\sqrt{3}, 1)$$

تعیین تبدیل یافتهٔ خط $y = 1$ در دوران $R_O^{60^\circ}$

$$y \longrightarrow -x\sin 60^\circ + y\cos 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y$$

$$y = 1 \longrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 1 \Rightarrow y = \sqrt{3}x + 2$$

تعیین مختصات رأس B:

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}x + 2 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(\sqrt{3}, 5)$$

مثال ۳: تابع هموگرافیک $y = \frac{2x+1}{x-1}$ مفروض است. منحنی آن را حول مبدأ مختصات به زاویهٔ معینی، که آن را پیدا می‌کنید، دوران می‌دهیم تا یک هذلولی که محورهای آن با محورهای مختصات موازی هستند، پدید آید. معادلهٔ این هذلولی و معادله‌های محورهای آن را بنویسید و از آن‌جا، معادله‌های محورهای تقارن منحنی تابع هموگرافیک مفروض را به دست آورید.

حل: تابع مفروض پس از حذف مخرج به‌صورت زیر در می‌آید،

$$xy - 2x - y - 1 = 0$$

منحنی این تابع یک مقطع مخروطی از نوع هذلولی است، زیرا

$$a = c = 0 \text{ ، } b = \frac{1}{2} \text{ و } b^2 - ac > 0$$

برای این که محورهای این منحنی در دوران R_O^α به موازات محورهای مختصات درآیند، چون $a = c$ است می‌توان زاویهٔ دوران را $\alpha = \frac{\pi}{4}$ اختیار کرد. بنابراین:

$$\left[x \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y),\ y \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)\right] \Rightarrow$$

$$xy - 2x - y - 1 = 0 \longrightarrow y^2 - x^2 - \sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\left(y - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)}{6} - \frac{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{6} = 1$$

منحنی معادلهٔ اخیر یک هذلولی متساوی‌القطرین به مرکز $O'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ است که محورهای آن به معادله‌های $x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ به موازات محورهای مختصات هستند. اگر این دو خط را حول مبدأ مختصات به زاویهٔ $\left(\frac{-\pi}{4}\right)$ دوران دهیم معادلات دو محور تقارن منحنی تابع هموگرافیک داده شده به‌دست می‌آیند:

$$\left[x \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y),\ y \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y)\right] \Rightarrow$$

$$x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = x + 1$$

$$y = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} \longrightarrow \frac{\sqrt{۲}}{۲}(x+y) = \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow y = -x+۳$$

اگر زاویهٔ دوران را $\alpha = \frac{-\pi}{۴}$ اختیار کنیم تابع هوموگرافیک مفروض به معادلهٔ زیر تبدیل می‌شود که منحنی آن یک هذلولی است که محور کانونیش با محور طولها موازی است:

$$\frac{(x - \frac{۳\sqrt{۲}}{۲})^۲}{۶} - \frac{(y - \frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}{۶} = ۱$$

تذکر. منحنی هر تابع هوموگرافیک $y = \frac{ax+b}{cx+d}$، $(c \neq ۰)$، یک هذلولی است که نقطهٔ $H(-\frac{d}{c}$ و $\frac{a}{c})$ محل تلاقی مجانبها و مرکز تقارن آن است. این منحنی دو محور تقارن دارد که از نقطهٔ H می‌گذرند و با محور طولها زاویه‌های $\frac{\pi}{۴}$ و $-\frac{\pi}{۴}$ می‌سازند، یعنی به معادلات زیر هستند:

$$y = x + \frac{a+d}{c} \ ,\ y = -x + \frac{a-d}{c}$$

دربارهٔ دوران یک منحنی لازم است به نکتهٔ زیر نیز توجه شود:

گرچه، دوران هیچ‌گونه تغییری در شکل یک منحنی پدید نمی‌آورد و فقط آنرا تغییر مکان می‌دهد، اما تبدیل یافتهٔ معادله منحنی، ممکن است هیچ‌یک از ویژگیهای خود معادله را نداشته باشد. برای مثال رابطهٔ $F(x,y) = xy - ۲x - y - ۱ = ۰$ را با رابطهٔ دوران یافتهٔ منحنی آن به زاویهٔ $\frac{\pi}{۴}$، که در مثال ۳ به‌صورت: $G(x,y) = y^۲ - x^۲ - \sqrt{۲}x - ۳\sqrt{۲}y - ۲ = ۰$ به‌دست آمد، در چند مورد مقایسه می‌کنیم:

الف. دامنهٔ تعریف و برد رابطهٔ $F(x,y) = ۰$ عبارتند از: $D_F = R - \{۱\}$ و $R_F = R - \{۲\}$. درصورتی که دامنهٔ تعریف و برد رابطهٔ $G(x,y) = ۰$ برابرند با:

$$R_G =]-\infty, \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} - \sqrt{۶}] \cup [\frac{۳\sqrt{۲}}{۲} + \sqrt{۶}, +\infty[, D_G = R$$

ب. رابطهٔ $F(x,y) = ۰$ یک تابع یک به یک و بنابراین معکوس‌پذیر است، درحالی که رابطهٔ $G(x,y) = ۰$ اصولاً تابع نیست.

ج. منحنی معادلهٔ $F(x,y) = ۰$ نقطه ماکسیمم یا مینیمم ندارد، امّا رأسهای کانونی منحنی معادلهٔ $G(x,y) = ۰$، یعنی:

$$A'(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} - \sqrt{۶}) \ ,\ A(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}, \frac{۳\sqrt{۲}}{۲} + \sqrt{۶})$$

نقاط ماکسیمم و مینیمم آن هستند.

تمرین

۱ـ خط $۴x + ۳y = ۱۲$ را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی به اندازهٔ کوچکترین زاویه، دوران می‌دهیم تا با محور طولها موازی شود. زاویهٔ دوران (α) و معادله تبدیل یافته این خط را تعیین کنید.

جواب: $\alpha = \text{Arc tg}\frac{۴}{۳}$ و $y = \frac{۱۲}{۵}$

۲ـ نقطهٔ O (مبدأ مختصات) یک رأس مثلث متساوی‌الساقین OAB است که در آن $\hat{O} = ۳۰^\circ$ و $OA = OB$. اگر رأس A بر خط (d) به معادلهٔ $y = x\sqrt{۳} - ۲$ و رأس B بر خط (δ) به معادلهٔ $y = x + \sqrt{۳}$ واقع باشند، مختصات این دو رأس را پیدا کنید.

جواب: $A(\frac{۲\sqrt{۳}+۱}{۲}, \frac{\sqrt{۳}+۲}{۲})$ ، $B(۱, \sqrt{۳}+۱)$

۳ـ سهمی (c) به معادلهٔ

$$۳x^۲ + ۲\sqrt{۳}xy + y^۲ - ۴x + ۴\sqrt{۳}y + ۸ = ۰$$

را حول مبدأ مختصات در جهت مثلثاتی دوران می‌دهیم تا به سهمی (c') که محورش با محور طولها موازی باشد تبدیل شود؛

اولاً: اندازه کوچکترین زاویهٔ دوران را پیدا کنید

ثانیاً: معادلات سهمی (c') و مختصات رأس، مختصات کانون، معادله محور و معادله خط هادی در آن را تعیین کنید.

ثالثاً: با استفاده از مشخصات سهمی (c') که به‌دست آورده‌اید، مشخصات سهمی (c) را از طریق دوران معکوس معین کنید.

جوابها:

اولاً: $\alpha = \frac{\pi}{۳}$

ثانیاً: $C': y^۲ = ۲(x-۲), S'(۲,۰), F'(\frac{۵}{۲},۰), y = ۰, x = \frac{۳}{۲}$

ثالثاً:

$$S(۱, -\sqrt{۳}),\ F(\frac{۵}{۴}, \frac{-۵\sqrt{۳}}{۴}),$$

$$y + \sqrt{۳}x = ۰,\ \sqrt{۳}y - x + ۳ = ۰$$