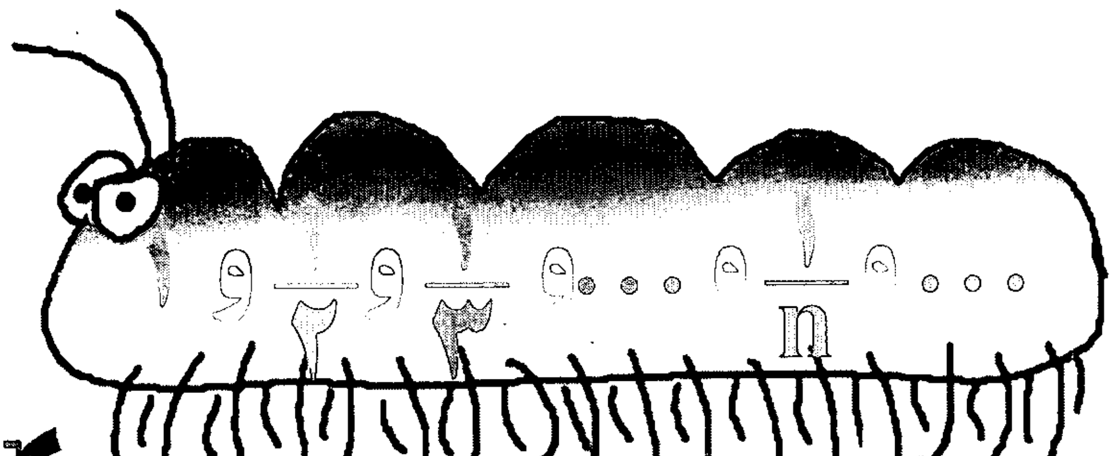



۲۷

# دنباله، حد دنباله ها

سید محمدرضا هاشمی موسوی

**اشاره**

در شماره قبل به معرفی دنباله به عنوان یک تابع پرداختیم، همچنین تصور شهودی دربارهٔ حد دنبالهٔ عددی و تعریف حد دنباله را بیان کردیم، در ادامهٔ مطلب قضیه یکتایی حد دنباله‌دار و چند نکته دیگر بررسی شده است.

قضیهٔ یکتایی حدّ دنباله: اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ به سمت حدّی مثل a میل کند، دنبالهٔ $\{a_n\}$ به سمت عدد دیگری مثل b میل نخواهد کرد. بیان ریاضی این قضیه چنین است:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} a_n = b \Rightarrow a = b$$

نکته: نباید همیشه گمان کرد که هر دنباله‌ای، دارای حد است؛ زیرا دنباله هایی وجود دارند که با این که همهٔ جمله های آن‌ها محدود و معین هستند، ولی دارای حدی نیستند. به طور مثال، دنباله با جملهٔ عمومی $a_n = (-۱)^n$ را در نظر می گیریم. با وجود این که برای همهٔ جمله های آن داریم $|a_n| \leq ۱$، ولی بی‌نهایت جمله برابر ۱- و بی‌نهایت جمله برابر ۱ موجود است.

**تعریف**: اگر $a_n$ و $a_{n+1}$ دو جملهٔ متوالی یک دنباله باشند:

۱) دنباله را صعودی (یکنوا) گویند؛ هرگاه داشته باشیم:

$a_{n+1} \geq a_n$

۲) دنباله را صعودی اکید (یکنوای اکید) گویند؛ هرگاه داشته باشیم:

$a_{n+1} > a_n$

برای مثال، دنبالهٔ $\left\{\frac{n}{n+۱}\right\}$، صعودی اکید (یکنوای اکید) است؛ زیرا همیشه $a_{n+1} > a_n$ برقرار است.

تذکر: دنبالهٔ صعودی یا نزولی را دنبالهٔ یکنوا و دنبالهٔ صعودی اکید یا نزولی اکید را دنبالهٔ یکنوای اکید گویند.

مثال. دنبالهٔ $\left\{a_n = \frac{۱}{n}\right\}$ یک دنبالهٔ نزولی اکید است؛ زیرا همیشه داریم:

$a_{n+1} < a_n$

نکته: دنبالهٔ یکنوا، تنها می تواند از یک سمت (راست یا چپ)، به حدّ خود نزدیک شود.

تعریف: اگر برای دنبالهٔ $\{a_n\}$، عددی حقیقی مثبت مثل k وجود داشته باشد، به طوری که برای هر n طبیعی داشته باشیم $|a_n| < k$، دنباله را کراندار، در غیر این صورت آن را بی کران می‌نامند.

قضیه: دنبالهٔ یکنوای صعودی $\{a_n\}$، وقتی کران بالایی حقیقی مثل a داشته باشد، دارای حدّی معین و محدود و برابر a است:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

**نکته:** اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$، یکنوای صعودی باشد، ولی کران بالا نداشته باشد، خواهیم داشت:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n = +\infty$$

همچنین، اگر دنبالهٔ $\{t_n\}$، یکنوای نزولی باشد، ولی کران پایین نداشته باشد، خواهیم داشت:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, t_n = -\infty$$

**مثال.** دنبالهٔ $\left\{a_n = \frac{2^n}{n!}\right\}$، دارای جمله‌های زیر است:

$$2 \text{ و } 2 \text{ و } \frac{4}{3} \text{ و } \frac{2}{3} \text{ و } \ldots \text{ و } \frac{2^n}{n!} \text{ و } \ldots$$

عدد ۲ کران بالای این دنباله و یکی از کران پایین آن، عدد صفر است؛ درنتیجه دنباله کراندار است. این دنباله یکنوای نزولی است؛ زیرا داریم $a_1 = a_2 > a_3 > a_4 > \cdots$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$ همیشه داریم: $a_{n+1} \le a_n$.

**مسأله.** آیا دنبالهٔ $\left\{a_n = (1+\frac{1}{n})^n\right\}$ دارای حدّی است؟

$(n \in \mathbb{N})$

**حل:** با توجه به بسط دوجمله‌ای $(1+\frac{1}{n})^n$:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 1 + n.\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\times 2}.\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-n+1)}{1\times 2\times 3\times\cdots\times n}.\frac{1}{n^n}$$

و یا:

$$(1+\frac{1}{n})^n = 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

واضح است که $a_{n+1} > a_n$؛ بنابراین، دنباله، صعودی اکید است.

حال در این‌جا، کراندار بودن دنباله را ثابت می‌کنیم. برای این منظور، نابرابری بدیهی زیر را می‌نویسیم:

$$a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

(جملهٔ اوّل دنباله، برابر ۲ است)

$$n = 1:\ a_1 = (1+\frac{1}{1})^1 = 2$$

همچنین:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

درنتیجه:

$$2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

پس:

$$n \in \mathbb{N}:\ 2 < a_n = (1+\frac{1}{n})^n < 3$$

بنابراین، دنباله دارای حدّی است و حدّ این دنباله را با نماد e (پایهٔ لگاریتم طبیعی) نشان می‌دهیم:

$$e = \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, (1+\frac{1}{n})^n$$

عدد e به **عدد اویلر** مشهور است و عددی گنگ و غیرجبری است و در آنالیز کاربرد فراوانی دارد و مقدار آن چنین است:

$e \approx 2/7182818284\cdots$

**مثال.** تابع t با ضابطهٔ $t(n) = \frac{n-1}{n}$ و فرض $n \in \mathbb{N}$ را در نظر می‌گیریم. بنابراین می‌توان نوشت:

$$t_1 = 0,\ t_2 = \frac{1}{2},\ t_3 = \frac{2}{3},\ t_4 = \frac{3}{4},\ t_5 = \frac{4}{5}, \ldots, t_n = \frac{n-1}{n}, \ldots$$

حال اگر عددهای به‌دست آمده را به دنبال هم بنویسیم، دنبالهٔ زیر تشکیل می‌شود:

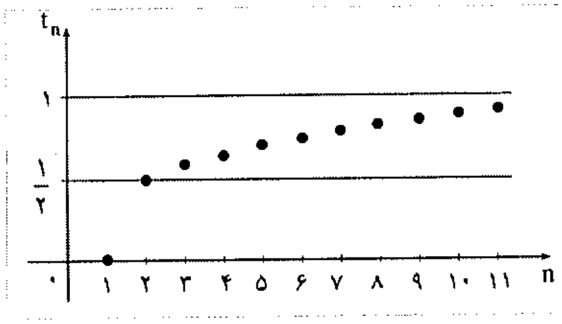
$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots$$

نمایش دیگری از تابع t، به صورت مجموعه‌ای از

زوج‌های مرتّب است:

$$t=\left\{(۱,۰),\ (۲,\frac{۱}{۲}),\ (۳,\frac{۲}{۳}),\ (۴,\frac{۳}{۴}),\cdots,(n,\frac{n-۱}{n}),\cdots\right\}$$

در این جا، برای درک شهودی دنباله، نمودار قسمتی از آن را رسم می‌کنیم:




با توجه به نمودار، می‌بینیم که هر اندازه n بزرگ‌تر اختیار شود، جمله‌های دنباله به عدد ۱ نزدیک‌تر خواهد شد. بنابراین، می‌توان $t_n$ را به عدد ۱ به اندازهٔ دلخواه نزدیک کرد؛ به شرطی که عدد n را به اندازهٔ کافی بزرگ اختیار کنیم.

به عنوان مثال، برای $n=۱۰۰$، به‌دست می‌آید:

$t_{۱۰۰}=\frac{۹۹}{۱۰۰}=۰/۹۹$ .

همچنین:

$$n=۱۰۰۰۰:\ t_{۱۰۰۰۰}=\frac{۹۹۹۹}{۱۰۰۰۰}=۰/۹۹۹۹$$

$$n=۱۰^۶:\ t_{۱۰^۶}=\frac{۹۹۹۹۹۹}{۱۰^۶}=۰/۹۹۹۹۹۹$$

.

.

.

$$n=۱۰^k:\ t_{۱۰^k}=\frac{\overbrace{۹۹۹\cdots۹}^{k\ \text{مرتبه}}}{۱۰^k}=\overbrace{۰/۹۹۹\cdots۹}^{k\ \text{مرتبه}}$$

واضح است که اگر $n>۱۰۰$، آن‌گاه هر یک از جمله‌های دنباله به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند؛ به تعبیری دیگر، جمله‌های دنباله، نزدیک عدد ۱ تجمّع خواهند کرد و به بیان ریاضی: «جمله‌های دنباله، در همسایگی عدد ۱ واقع می‌شوند.»

با این شرایط، بدیهی است که این دنباله به عدد ۱، همگرا خواهد شد.

در این جا، می‌توان به این نتیجه رسید که حدّ دنبالهٔ $\left\{\frac{n-۱}{n}\right\}$، برابر عدد ۱ است یا به بیان ریاضی می‌توان نوشت:

$$n\in\mathbb{N}:\ \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{n-۱}{n}\right)=۱$$

می‌بینیم که هر جملهٔ این دنباله، از عدد ۱ کوچک‌تر است. حال می‌خواهیم $t_n$ را به اندازه‌ای به عدد ۱ نزدیک کنیم تا اختلاف بین عدد ۱ و $t_n$ از عددی مثل $\frac{۱}{۱۰۰}$ کم‌تر باشد، با نماد ریاضی، این مطلب را چنین می‌نویسند:

$$n\in\mathbb{N}: ۱-t_n<\frac{۱}{۱۰۰};\ ۱-\frac{n-۱}{n}<\frac{۱}{۱۰۰} \qquad (۱)$$

واضح است که حلّ این مسأله، به انتخاب n بستگی پیدا می‌کند؛ یعنی n را برابر چه عددی بگیریم تا نامعادلهٔ (۱) به یک نابرابری ثابت (همیشه درست) تبدیل شود. برای این منظور، کافی است نامعادلهٔ (۱) را حل کنیم:

$$۱-\frac{n-۱}{n}<\frac{۱}{۱۰۰};\ \frac{n-n+۱}{n}<\frac{۱}{۱۰۰};\ \frac{۱}{n}<\frac{۱}{۱۰۰};\ n>۱۰۰$$

بنابراین، اگر $n\geq۱۰۱$، آن‌گاه $t_n$ به اندازه‌ای به عدد ۱ نزدیک می‌شود که داشته باشیم:

$$۱-t_n<\frac{۱}{۱۰۰}$$

اکنون مسأله را برای عدد مثبت دلخواهی مثل $\varepsilon$ (اپسیلن) طرح می‌کنیم؛ یعنی می‌خواهیم $t_n$ را به اندازه‌ای به عدد ۱ نزدیک کنیم که داشته باشیم:

$$n\in\mathbb{N}:\ ۱-t_n<\varepsilon;\ ۱-\frac{n-۱}{n}<\varepsilon \qquad (۲)$$

در این جا نیز، حلّ مسأله، به انتخاب n بستگی دارد؛ یعنی n را بر حسب $\varepsilon$ چگونه در نظر بگیریم تا نامعادلهٔ (۲) به یک نابرابری ثابت (همیشه درست) تبدیل شود؟ برای این منظور، کافی است نامعادلهٔ (۲) را حل کنیم:

$$۱-\frac{n-۱}{n}<\varepsilon;\ \frac{n-n+۱}{n}<\varepsilon;\ \frac{۱}{n}<\varepsilon;\ n>\frac{۱}{\varepsilon}$$

با توجه به $\xi > 0$ و با در نظر گرفتن این که $\frac{1}{\xi}$ ممکن است یک عدد طبیعی نباشد، بهتر است از عبارت $\left[\frac{1}{\xi}\right]$ که حاصل آن همیشه یک عدد طبیعی است، استفاده کنیم. بنابراین با فرض $M \in \mathbb{N}$ و $M \ge \left[\frac{1}{\xi}\right]+1$ و برای هر $\xi > 0$، همیشه عددی طبیعی مثل M وجود دارد؛ به طوری که داشته باشیم:

$$n \ge M \Rightarrow 1 - t_n < \xi \qquad (۳)$$

زیرا، با توجه به $M \ge \left[\frac{1}{\xi}\right]+1$، می‌توان نوشت:

$$n \ge M \ge \left[\frac{1}{\xi}\right]+1 > \frac{1}{\xi} \Rightarrow n > \frac{1}{\xi} \Rightarrow \frac{1}{n} < \xi$$

$$\Rightarrow \frac{n-n+1}{n} < \xi \Rightarrow 1-\frac{n-1}{n} = 1 - t_n < \xi$$

در این جا، ثابت می‌شود که رابطهٔ (۳) یک گزارهٔ شرطی همیشه درست (استلزام منطقی) است. اکنون می‌توان مفهوم مطالب اخیر را به طریق ریاضی بیان کرد:

$$n \in \mathbb{N}:\ \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{n-1}{n}\right) = 1 \qquad (۴)$$

رابطه‌های (۳) و (۴)، درواقع مفهوم واحدی را می‌رسانند؛ زیرا هر دو بیان می‌کنند که «حدّ دنبالهٔ $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ برابر عدد ۱ است».

## دنبالهٔ همگرا

اگر L یک عدد حقیقی ($L \in \mathbb{R}$) و حدّ دنبالهٔ $\{a_n\}$ برابر L باشد، در اصطلاح می‌گوییم دنبالهٔ $\{a_n\}$ به عدد L همگراست. به بیان دیگر، اگر برای هر $\xi > 0$، همیشه عددی طبیعی مثل M وجود داشته باشد، به طوری که گزارهٔ شرطی زیر برقرار باشد:

$$n \ge M \Rightarrow |a_n - L| < \xi \qquad (۱)$$

در این صورت می‌توان نوشت:

$$n \in \mathbb{N}:\ \underset{n\to\infty}{\text{حد}}(a_n) = L \qquad (۲)$$

همچنین، اگر رابطهٔ (۲) برقرار باشد با استفاده از علائم ریاضی $\forall$ (هرچه باشد) و $\exists$ (وجود دارد) می‌توان آن را به صورت ریاضی تعبیر کرد:

$$\forall \xi > 0\ \exists M \in \mathbb{N}:\ n \ge M \Rightarrow |a_n - L| < \xi$$

**مثال.** ثابت کنید دنبالهٔ $\{a_n\}$ با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{4n+3}{n}$، $n \in \mathbb{N}$، به عدد ۴ همگراست:

$$n \in \mathbb{N}:\ \underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n = 4$$

**حل:** بنا به تعریف همگرایی، کافی است ثابت کنیم که رابطهٔ شرطی زیر، همیشه درست است:

$$\forall \xi > 0\ \exists M \in \mathbb{N}:\ n \ge M \Rightarrow |a_n - 4| < \xi \qquad (۱)$$

در این جا، برای تعیین رابطهٔ بین n و $\xi$، به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$|a_n - 4| = \left|\frac{4n+3}{n} - 4\right| = \left|\frac{4n+3-4n}{n}\right| = \left|\frac{3}{n}\right| \overset{n \in \mathbb{N}}{=\!=} \frac{3}{n} < \xi$$

بنابراین، رابطهٔ بین n و $\xi$، چنین است:

$$n > \frac{3}{\xi}$$

با توجه به $\xi > 0$ و با در نظر گرفتن این که $\frac{3}{\xi}$ ممکن است یک عدد طبیعی نباشد، بهتر است از عبارت $\left[\frac{3}{\xi}\right]$ که حاصل آن همیشه یک عدد طبیعی است، استفاده کنیم. بنابراین با فرض $M \in \mathbb{N}$ و $M \ge \left[\frac{3}{\xi}\right]+1$، برای هر $\xi > 0$، همیشه عددی طبیعی مثل M وجود دارد؛ به طوری که داشته باشیم:

$$n \ge M \Rightarrow |a_n - 4| < \xi$$

زیرا، با توجه به $M \ge \left[\frac{3}{\xi}\right]+1$، می‌توان نوشت:

$$n \ge M \ge \left[\frac{3}{\xi}\right]+1 > \frac{3}{\xi} \Rightarrow n > \frac{3}{\xi} \Rightarrow \frac{3}{n} < \xi \Rightarrow \frac{3}{n} \overset{n \in \mathbb{N}}{=\!=} \left|\frac{3}{n}\right| < \xi$$

$$\Rightarrow \left|\frac{3}{n}\right| = \left|\frac{4n+3-4n}{n}\right| = \left|\frac{4n+3}{n} - 4\right| = |a_n - 4| < \xi$$

در این جا، ثابت می‌شود که همیشه از فرض $n \ge M$،

می‌توان حکم $|a_n - 4| < \xi$ را نتیجه گرفت، پس رابطهٔ (۱) یک همیشه درست است.

**توجه**: دنبالهٔ $\{a_n\}$ را وقتی کراندار گوییم که کران پایین و کران بالای آن وجود داشته باشد.

**مثال**. دنبالهٔ $\left\{a_n = \frac{n+1}{2n-1}\right\}$ را در نظر می‌گیریم.

جمله‌های این دنباله چنین است:

$$2, 1, \frac{4}{5}, \frac{5}{7}, \frac{2}{3}, \frac{7}{11}, \dots, \frac{n+1}{2n-1}, \dots$$

به سادگی ثابت می‌شود:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حدّ}}(a_n) = \underset{n\to\infty}{\text{حدّ}}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right) = \frac{1}{2}$$

بنابراین، یکی از کران پایین این دنباله، عدد $\frac{1}{2}$ است و هر عدد کوچک‌تر یا معادل $\frac{1}{2}$ را نیز، می‌توان یک کران پایین این دنباله منظور کرد.

به همین ترتیب، عدد ۲، یکی از کران بالای این دنباله است و هر عدد بزرگ‌تر یا معادل ۲ را نیز، می‌توان یک کران بالای این دنباله منظور کرد.

در این دنباله، عدد $\frac{1}{2}$ را بزرگ‌ترین کران پایین و عدد ۲ را کوچک‌ترین کران بالای دنبالهٔ $\left\{\frac{n+1}{2n-1}\right\}$ می‌گوییم.

**توجه**: در این صورت، بزرگ‌ترین کران پایین و کوچک‌ترین کران بالای دنبالهٔ $\{a_n\}$، یکتاست.

**دنبالهٔ واگرا**: اگر دنباله‌ای همگرا نباشد، واگراست؛ یعنی اگر حدّ دنبالهٔ $\{a_n\}$، وقتی n به بی‌نهایت میل کند، برابر عددی حقیقی مانند L نباشد، دنبالهٔ $\{a_n\}$ را واگرا می‌نامیم.

**مسأله**. ثابت کنید حدّ دنبالهٔ $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$، برابر صفر است:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = 0$$

**حل**: کافی است ثابت کنیم، برای هر $\xi > 0$، عددی طبیعی مثل M وجود دارد که رابطهٔ شرطی زیر همیشه درست باشد:

$$\forall \xi > 0 \ \exists M \in \mathbb{N}: \ n \ge M \Rightarrow \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \xi \qquad (1)$$

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \xi \Rightarrow n > \frac{1}{\xi} \Rightarrow M \ge \frac{1}{\xi}$$

پس، کافی است $M \ge \frac{1}{\xi}$ اختیار شود تا رابطهٔ شرطی (۱)، به یک رابطهٔ همیشه درست تبدیل شود؛ زیرا:

$$n \ge M \ge \frac{1}{\xi} \Rightarrow n > \frac{1}{\xi} \Rightarrow \frac{1}{n} < \xi \Rightarrow \left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \xi$$

بنابراین همیشه از فرض $M \ge \frac{1}{\xi}$، می‌توان حکم $\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \xi$ را نتیجه گرفت.

**مسأله**. ثابت کنید دنبالهٔ $\{n^2\}$ واگراست.

**حل**: از آن‌جا که جمله‌های دنبالهٔ $\{n^2\}$ به طور مرتّب افزایش می‌یابند، به همین دلیل نمی‌توانند در $\xi$ همسایگی هیچ عدد حقیقی قرار گیرند؛ زیرا اگر فرض کنیم دنباله همگرا و حدّ آن L باشد، برای $\xi = 1$، باید بتوانیم عددی طبیعی مثل M بیابیم که رابطهٔ شرطی زیر همیشه برقرار باشد:

$$n \ge M \Rightarrow |n^2 - L| < 1$$

یا:

$$n \ge M \Rightarrow L - 1 < n^2 < L + 1$$

و این غیرممکن است؛ زیرا مجموعهٔ عددهای طبیعی، کراندار نیست.

**قضیه**: اگر دنبالهٔ $\{a_n\}$ همگرا باشد، آن‌گاه حدّ آن یکتاست.

**اثبات**: فرض کنیم دنباله دارای دو حدّ $L_1$ و $L_2$ باشد، چون $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n = L_1$، بنابراین عدد طبیعی $M_1$ وجود دارد؛ به طوری که رابطهٔ شرطی زیر برقرار باشد:

و چون $\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\, a_n = L_2$، عدد طبیعی $M_2$ نیز وجود دارد؛ به طوری که داشته باشیم:

$$n \ge M_2 \Rightarrow |a_n - L_2| < \frac{\xi}{2}$$

پس، برای هر $n \ge M$ که $M = \max\{M_1, M_2\}$، خواهیم داشت:

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - a_n + a_n - L_2|$$
$$\le |a_n - L_1| + |a_n - L_2| < \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} = \xi$$

یعنی $|L_1 - L_2| < \xi$ ، پس داریم $0 \le |L_1 - L_2| = 0$ یا $L_1 = L_2$ .

بنابراین، دنبالهٔ همگرا تنها یک حدّ دارد.

**تمرین**

۱. نشان دهید که هر دنبالهٔ همگرا، کراندار است.

۲. ثابت کنید دنبالهٔ $\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ غیر یکنوا، کراندار و همگرا است.

**مسأله.** نشان دهید دنبالهٔ $\{(-1)^n\}$ واگرا است.

**حل:** برای اثبات واگرایی، کافی است نشان دهیم جمله‌های دنباله نمی‌توانند در $\xi$ همسایگی هیچ عدد حقیقی قرار گیرند.

اگر فرض کنیم که دنبالهٔ همگرا و حدِّ آن برابر L باشد، برای $\xi = \frac{1}{2}$ باید عدد طبیعی M را بیابیم؛ به طوری که داشته باشیم:

$$n \ge M \Rightarrow |(-1)^n - L| < \frac{1}{2}$$

می‌دانیم که اگر $n \ge M$ زوج باشد:

$$|1 - L| < \frac{1}{2} \qquad (1)$$

واگر $n \ge M$ فرد باشد:

$$|-1 - L| < \frac{1}{2};\ |1 + L| < \frac{1}{2} \qquad (2)$$

ولی در این جا، با توجه به رابطه‌های (۱) و (۲) و استفاده از نابرابری مثلث، به تناقض زیر می‌رسیم:

$$2 = |1 - L + 1 + L| < |1 - L| + |1 + L| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1;\ \ 2 < 1$$

این تناقض، نشان می‌دهد که هیچ عدد حقیقی مثل L، همزمان نمی‌تواند در دو رابطهٔ (۱) و (۲) صدق کند. بنابراین، دنبالهٔ $\{(-1)^n\}$ واگرا است.

**تمرین.** نشان دهید دنباله‌های $\{2n\}$ ، $\left\{n^{(-1)^n}\right\}$ ، $\left\{\frac{n^2+n}{2n+1}\right\}$ ، $\{\sqrt{n}\}$ و $\left\{\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right\}$ ، همگی واگرا هستند؛ یعنی حدِّ هیچ یک از این دنباله‌ها برابر عددی حقیقی مانند L نمی‌شود.

## برخی از ویژگی‌های حدِّ دنباله‌ها

۱. اگر $\{a_n\}$ را دنباله‌ای همگرا فرض کنیم (یعنی دارای حدّ باشد) و حدّ آن را برابر عدد حقیقی L در نظر بگیریم، در صورتی که c عدد ثابتی باشد، دنبالهٔ $\{c.a_n\}$ هم همگرا است:

$$\lim_{n\to\infty}(c.a_n) = c(\lim_{n\to\infty} a_n) = c.L$$

۲. اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ ، دنباله‌هایی همگرا باشند و $L_1$ و $L_2 \in \mathbb{R}$ و داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L_1 \ ,\ \ \lim_{n\to\infty} b_n = L_2$$

الف) آن گاه دنباله‌های $\{a_n \pm b_n\}$ هم همگرا هستند:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = L_1 \pm L_2$$

ب) آن گاه دنبالهٔ $\{a_n.b_n\}$ هم همگرا است:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n.b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n . \lim_{n\to\infty} b_n = L_1.L_2$$

ج) آن گاه با فرض $b_n \neq 0$ و ، دنبالهٔ $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ هم همگرا است:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{L_1}{L_2}$$

**تمرین.** اگر $a_n = (-1)^n$ و $b_n = (-1)^{n+1}$ ، تعیین کنید از دنباله‌های $\{a_n - b_n\}$ و $\{a_n b_n\}$ و $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ ، کدام همگرا است.