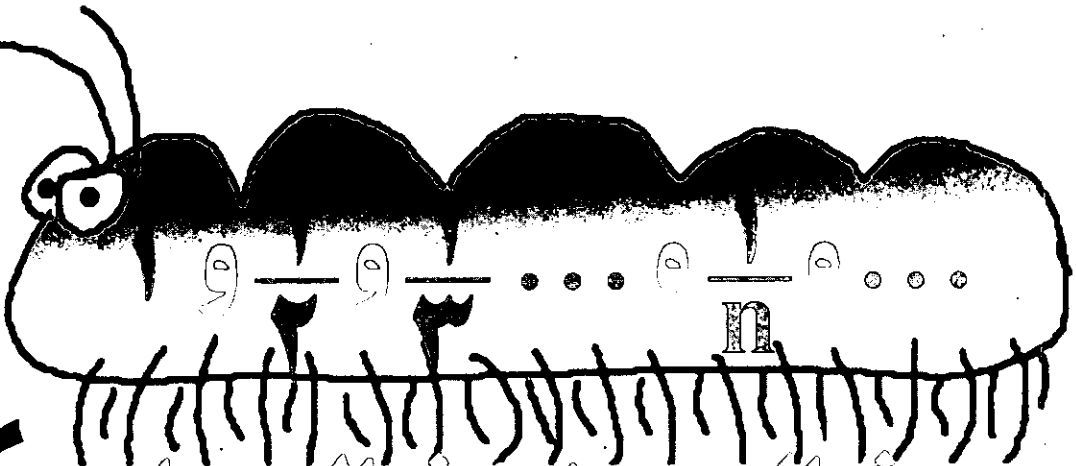


دنباله، حد دنباله ها

سید محمدرضا هاشمی موسوی

دنباله[1]

«دنباله» یکی از اساسی ترین مفهوم ها در ریاضیات است؛ زیرا مهم ترین مفهوم های ریاضیات عالی، بر پایهٔ آن ساخته شده اند. یکی از آن مفهوم ها که خود پایه و اساس آنالیز ریاضی را می سازد، مفهوم حد است. در این جا، مفهوم و تعریف دنباله و حد یک دنباله را یادآور می شویم. به مجموعهٔ زیر از عددهای گویا توجه کنید:

$$s=\left\{۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\cdots\right\}=\left\{\frac{۱}{n}: n\in\mathbb{N}\right\}$$

این مجموعه را می توان برد تابعی با دامنهٔ عددهای طبیعی درنظر گرفت که به ازای هر عدد طبیعی n، عدد گویای $\frac{۱}{n}$ به دست می آید. مجموعهٔ S را می توان به صورت جدول زیر نشان داد:

n	۱	۲	۳	۴	۵	$\cdots$
$\frac{۱}{n}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۵}$	$\cdots$

در این مثال، واضح است که به هر عدد طبیعی، یک عدد حقیقی نسبت داده ایم. در حقیقت تابعی را تعریف کرده ایم که دامنهٔ آن عددهای طبیعی و برد آن زیرمجموعهٔ عددهای حقیقی است که دنباله نامیده می شود.

تعریف. هر تابع a را که دامنهٔ آن مجموعهٔ عددهای طبیعی و برد آن زیرمجموعه ای از عددهای حقیقی باشد $(a:\mathbb{N}\to\mathbb{R})$، یک دنبالهٔ متناهی از عددهای حقیقی می نامند. به طور معمول، $a(n)$ را با a_n نمایش می دهند و آن را جملهٔ عمومی می نامند و دنباله را با جملهٔ عمومی آن و به صورت $\{a_n\}$ و یا مقادیر آن نشان می دهند:

$a_۱,a_۲,a_۳,\cdots,a_n,\cdots$

قرارداد: به طور کلی جملهٔ عمومی دنباله را با a_n و خود دنباله را با نماد $\{a_n\}$ نشان می دهیم و همیشه n عددی طبیعی است $(n\in\mathbb{N})$.

معرفی دنباله به عنوان یک تابع

هر دنبالهٔ عددی را می توان یک تابعِ متغیر طبیعی دانست. مجموعهٔ عددهای طبیعی این ویژگی را دارند که برای هر دو عدد طبیعی دلخواه a و b، می توان ترتیبی در نظر گرفت؛ یعنی همیشه یکی از این دو حکم می تواند درست باشد: $a\le b$ یا $a\ge b$.

در واقع، همین ویژگی مجموعهٔ $\mathbb{N}$ است که به ما امکان می دهد، جمله هایی را که در یک دنباله به نحوی دلخواه مرتب شده اند، «شماره گذاری» کنیم.

به این ترتیب، می توانیم تابعِ روی مجموعهٔ $\mathbb{N}$ را تعریف کنیم:

$$\mathbb{N}\xrightarrow[(n)]{f}A \qquad (۱)$$

که این تعریف دنبالهٔ عضوهای A در رابطه با مجموعهٔ

$\mathbb{N}$ است. واضح است که مجموعهٔ A می‌تواند شامل هر گونه عضوی باشد. ولی باید هر عضو دنبالهٔ A متناظر با عدد معین n از مجموعهٔ $\mathbb{N}$ باشد و برعکس، برای هر $n \in \mathbb{N}$، باید عضوی مانند: $a \in A$ مشخص شود. در ضمن، این توضیح نیز لازم است که امکان دارد، بستگی بین عضوهای مجموعهٔ $\mathbb{N}$ با مجموعهٔ A یک به یک نباشد؛ هر عضو A ممکن است با چند عضو $\mathbb{N}$ متناظر باشد.

هر مقدار تابع (۱) و یا به بیان دیگر، هر عضو دنباله را به طور معمول با حرف کوچک لاتینی همراه با عددی طبیعی در زیر و سمت راست آن به نام اندیس نشان می‌دهند که معرف عضوی از $\mathbb{N}$ است:

$$a_1 = f(1)\ ,\ a_2 = f(2)\ ,\ \cdots\ ,\ a_n = f(n)\ ,\ \cdots$$

و یا با توجه به قرارداد، می‌توان نوشت:

$$\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \qquad (۲)$$

یادآور می‌شویم که لزومی ندارد، همهٔ جمله‌های دنبالهٔ (۲) با هم متفاوت باشند. در ضمن، اگر تعداد جمله‌های دنباله نامحدود باشند، شمارا بودن آن‌ها ضروری است؛ یعنی باید بتوان هر جملهٔ دنباله را به یک عدد طبیعی بستگی داد.

مثال. دنبالهٔ عددهای مثبت بخش‌پذیر بر ۱۱، چنین است:

۱۱ , ۲۲ , ۳۳ , ۴۴ , ... (دنبالهٔ نامتناهی)

جملهٔ عمومی این دنباله، به صورت ۱۱n است. زیرا اگر مقدار n را به ترتیب برابر ۱ و ۲ و ... بگیریم، جمله‌های پشت سر هم دنباله به دست خواهند آمد. به طور مثال، جملهٔ بیستم این دنباله چنین است:

$n = 20:\ 11n = 11 \times 20 = 220$ (جملهٔ بیستم دنباله)

مسأله. اگر بدانیم، جملهٔ عمومی یک دنباله $a_n = \frac{2n}{n+1}$ است، پنج جملهٔ اول این دنباله را بنویسید و سپس تعیین کنید که عدد $\frac{99}{50}$، چندمین جملهٔ دنباله است.

حل: ابتدا عددهای ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را به n نسبت می‌دهیم:

$$a_1 = \frac{2(1)}{1+1} = 1\ ,\ a_2 = \frac{2(2)}{2+1} = \frac{4}{3}\ ;\ a_3 = \frac{2(3)}{3+1} = \frac{3}{2}$$

$$a_4 = \frac{2(4)}{4+1} = \frac{8}{5}\ ,\ a_5 = \frac{2(5)}{5+1} = \frac{5}{3}$$

بنابراین، پنج جملهٔ اول این دنباله چنین است:

$$1\ ,\ \frac{4}{3}\ ,\ \frac{3}{2}\ ,\ \frac{8}{5}\ ,\ \frac{5}{3}$$

عدد $\frac{99}{50}$ یا $\frac{2(99)}{100}$، جملهٔ نود و نهم دنباله است؛ زیرا:

$$n = 99:\ a_{99} = \frac{2(99)}{99+1} = \frac{2(99)}{100} = \frac{99}{50}$$

مسأله. اگر $a_n = \frac{n^2+n}{2}$ جملهٔ عمومی یک دنباله باشد، عدد ۵۵ چندمین جملهٔ آن است؟

حل:

$$a_n = \frac{n^2+n}{2} = 55 \Rightarrow n^2 + n = 110$$

$$\Rightarrow n^2 + n - 110 = 0 \Rightarrow (n-10)(n+11) = 0\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow n = 10 \Rightarrow a_{10} = 55$$ (جملهٔ دهم دنباله)

مسأله. نخستین جملهٔ دنباله با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{n}{2n-1}$ که کوچک‌تر از $\frac{3}{4}$ باشد را بیابید.

حل:

$$a_n = \frac{n}{2n-1} < \frac{3}{4} \Rightarrow 4n < 3(2n-1)$$

$$\Rightarrow 4n < 6n - 3 \Rightarrow 2n > 3 \Rightarrow n > \frac{3}{2} \Rightarrow n > 1/5\ ,$$

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 2$ (دومین جمله)

دومین جملهٔ دنباله، دارای شرایط موردنظر است؛ زیرا:

$$a_2 = \frac{2}{4-1} = \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$$

نکته. با دانستن چند جملهٔ نخست یک دنبالهٔ نامتناهی، همیشه تعیین جملهٔ عمومی آن امکانپذیر نیست؛ زیرا به طور مثال جملهٔ عمومی دنبالهٔ نامتناهی:

$$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{4}{9}\ ,\ \frac{3}{8}\ ,\ \cdots$$

یا:

$$\frac{2}{4}\ ,\ \frac{4}{9}\ ,\ \frac{6}{16}\ ,\ \cdots$$

را می‌توان: $a_n = \frac{۲n}{(n+۱)^۲}$

یا $a_n = \frac{۲n}{(n+۱)^۲} + (n-۱)(n-۲)(n-۳)$ ، و یا در حالت کلی، به صورت زیر درنظر گرفت:

$$n \in \mathbb{N}\ ,\ f(n) \neq ۰:\ a_n = \frac{۲n}{(n+۱)^۲} + \frac{(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{f(n)}$$

با شرط $f(n) \neq ۰$ $(n \in N)$ ، عبارت $f(n)$ را می‌توان به دلخواه اختیار کرد.

حدِ دنبالهٔ عددی

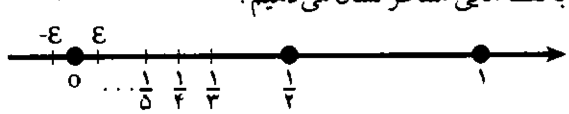
تصور شهودی دربارهٔ حد، به نحوی تصویر نوعی حرکت را در ذهن ما ایجاد می‌کند؛ چنان که هرگاه در مجموعهٔ مرتب $\mathbb{N}$ پیش رویم، به رفتار جمله‌های دنبالهٔ $\{a_n\}$ پی خواهیم برد. رفتار جمله‌ها گاهی چنین است که هر چه شمارهٔ آن‌ها زیاد شود، به طور پیوسته به عددی مانند a نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند. با شرایطی که بیان خواهد شد، عدد a می‌تواند به عنوان حد دنبالهٔ مفروض $\{a_n\}$ محسوب شود.

در این‌جا پرسشی مطرح می‌شود: نزدیکی جمله‌های دنباله به عدد a چگونه خواهد بود و به چه صورتی می‌توان به این نزدیکی پی برد.

به طور مثال، دنباله‌ای را که از معکوس عددهای طبیعی به وجود می‌آید، با جملهٔ عمومی $a_n = \frac{۱}{n}$ در نظر می‌گیریم:

$$۱\ ,\ \frac{۱}{۲}\ ,\ \frac{۱}{۳}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{۱}{n}\ ,\ \dots$$

در این‌جا اگر به طور مرتب n را بزرگ و بزرگ‌تر اختیار کنیم، واضح است که جمله‌های دنباله به مراتب کوچک و کوچک‌تر خواهند شد. یعنی اختلاف هر دو عدد متوالی دنباله به طور پیوسته، همیشه از صفر کم‌تر است. بدیهی است که از جملهٔ دهم به بعد، هریک از جمله‌های دنباله از ۰/۱ کوچک‌ترند. جمله‌های دنبالهٔ $a_n = \frac{۱}{n}$ را روی یک محور، با نقطه‌هایی متناظر نشان می‌دهیم:



ε (اپسیلن) را یک عدد دلخواه مثبت در نظر می‌گیریم. روی این محور فاصله‌ای متقارن به مرکز o و طول ε ، یعنی فاصلهٔ $(-ε\,,\,ε)$ را انتخاب می‌کنیم. واضح است که اگر $ε = ۱/۲$ ، آن‌گاه همهٔ جمله‌های دنبالهٔ مورد نظر درون این فاصله واقع می‌شوند. ولی اگر $ε = ۰/۱$ ، آن‌گاه فاصلهٔ $(-۰/۱\,,\,۰/۱)$ بعضی جمله‌های نخستینِ دنباله، یعنی $\frac{۱}{۱۰}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{۱}{۳}\ ,\ \frac{۱}{۲}\ ,\ ۱$ ، را شامل نمی‌شود. حال اگر ε را بسیار کوچک‌تر و برابر ۰/۰۰۱ در نظر بگیریم، فاصلهٔ $(-۰/۰۰۱\,,\,۰/۰۰۱)$ جمله‌های دنباله مورد بحث را شامل نمی‌شود. ولی همهٔ جمله‌های بعد از جملهٔ هزارم، یعنی $\frac{۱}{۱۰۰۱}\ ,\ \frac{۱}{۱۰۰۲}\ ,\ \dots\ ,\ \frac{۱}{n}\ ,\ \dots$ را شامل می‌شود.

به این ترتیب ε هر چه باشد، همیشه می‌توانیم عدد طبیعی M را چنان انتخاب کنیم که همهٔ جمله‌های دنباله که برای آن‌ها $n \geq M$ است، درون فاصلهٔ $(-ε\,,\,ε)$ واقع باشند و تنها تعدادی محدود از جمله‌ها، یعنی $a_۱\,,\,a_۲\,,\,\dots\,,\,a_{M-۱}$ در بیرون این فاصله قرار گیرند.

در این‌جا به دو نکتهٔ مهم اشاره می‌کنیم:

۱. فاصلهٔ انتخابی دلخواه است.

۲. با درنظر گرفتن طول فاصلهٔ انتخابی، یعنی با معلوم بودن ε ، عدد M را می‌توان چنان انتخاب کرد که همهٔ جمله‌های دنباله که شماره‌ای بزرگ‌تر از M دارند، در درون فاصلهٔ $(-ε\,,\,ε)$ واقع باشند.

در این‌جا، با توجه به مطالب گفته شده، می‌توانیم تعریف «حد دنباله» را ارائه دهیم: عدد a را حد دنبالهٔ $\{a_n\}$ می‌نامیم، اگر برای هر عدد دلخواه مثبت ε $(ε > ۰)$ بتوان عددی مانند M پیدا کرد، به طوری که به ازای همهٔ مقدارهای $n \geq M$ ، داشته باشیم:

$$|a_n - a| < ε$$

وقتی دنباله‌ای حدی برابر a داشته باشد، یا به بیان دیگر جمله‌های آن به سمت a میل کنند، با نماد ریاضی چنین نشان می‌دهند:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ a_n = a$$

مثال. حد دنبالهٔ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ را بیابید.

حل: جملهٔ عمومی دنباله چنین است: $a_n=\frac{1}{n}$

بنابراین باید حاصل $\lim_{n\to\infty} a_n$، یا به تعبیر ساده‌تر $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$ را به دست آوریم. می‌بینیم که هر چه n بزرگ‌تر می‌شود، حاصل $\frac{1}{n}$ هم به صفر نزدیک‌تر می‌شود. به همین خاطر، می‌توان حدس زد که حد این دنباله باید برابر صفر شود. ولی این حدس باید به اثبات برسد. برای این منظور باید ثابت کنیم که به ازای هر $\varepsilon>0$، می‌توان عددی مانند M (وابسته به ε) را چنان تعیین کرد که به ازای هر $n\ge M$، داشته باشیم:

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n}<\varepsilon$$

که از این رابطه، نتیجه می‌گیریم: $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

بنابراین، با انتخاب $M=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ (در این برابری منظور از $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$، بخش صحیح عدد $\frac{1}{\varepsilon}$ است؛ برای مثال: $\varepsilon=\frac{1}{2/5}:\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]=[2/5]=2$) برای هر $\varepsilon>0$، همیشه می‌توان مطمئن بود که برای $n\ge M=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$، نابرابری $\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon$ برقرار است. یعنی می‌توانیم شماره‌ای از جمله‌های دنباله را تعیین کنیم (M)؛ به طوری که جمله‌هایی با شماره‌های بزرگ‌تر از آن، هریک در درون فاصلهٔ $(-\varepsilon,\varepsilon)$ واقع باشند. بنابراین به یقین می‌توان نوشت:

$$\underset{n\to\infty}{\text{حد}}\ \frac{1}{n}=0$$

زیرنویس

1. sequence

مسائل مسابقه‌ای

احمد قندهاری

۱. اگر $\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{4}$، آن‌گاه حاصل $k=\left(\frac{x^4}{x^8+x^4+1}\right)^2$ را بیابید.

۲. دو تصاعد عددی به صورت‌های زیر داریم:

$$4,\frac{47}{3},\dots \qquad\qquad 2,14,\dots$$

الف. نشان دهید، این دو تصاعد جملات مشترک دارند.

ب. مجموع شش جملهٔ مشترک این دو تصاعد را بیابید.

۳. اگر $x>1$ و $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^8-\frac{1}{x^8}$، آن‌گاه $f(\sqrt{5})$ را بیابید.