دنباله[1]

احمد قندهاری

۱ـ دنبالهٔ عددهای طبیعی:

اگر مجموعه‌ای از اعداد طبیعی متوالی‌را پشت سرهم تا عدد n بنویسیم، این مجموعه را دنبالهٔ عددهای طبیعی گوییم. مانند

$$۱\,,\,۲\,,\,۳\,,\,\cdots\,,\,n\,,\,n+۱\,,\,\cdots$$

۲ـ دنبالهٔ اعداد :

به مجموعه‌ای از اعداد مرتب‌شده که با دنبالهٔ عددهای طبیعی یا بخشی از آن در تناظر یك به‌یك باشد ، دنباله گفته می‌شود .

در هردنباله، جمله متناظر باعدد یك‌را جمله‌یکم $(a_۱)$ و جمله متناظر باعدد دو را جمله‌دوم $(a_۲)$ و ... و جمله متناظر با عدد n را جمله nام یا جمله‌عمومی (a_n) گوییم.

مانند دنبالهٔ اعداد زوج

$$\begin{array}{ccccc} ۲ , & ۴ , & ۶ ,\cdots , & & ۲n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ & \cdots & a_n \end{array}$$

مانند دنباله عددهای طبیعی مربع کامل

$$\begin{array}{ccccccc} ۱ , & ۴ , & ۹ , & ۱۶ , & ۲۵ , & \cdots , & n^۲ \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ a_۱ & a_۲ & a_۳ & a_۴ & a_۵ & \cdots & a_n \end{array}$$

۳ـ جمله عمومی یك دنباله :

در هردنباله، جمله‌ای‌که برحسب عبارتی‌از n بیان‌شود، جمله عمومی آن دنباله گفته می‌شود. مثلاً در دنباله عددهای طبیعی مربع کامل عبارت $(n^۲)$ جمله عمومی این دنباله است. مسلماً اگردر جمله‌عمومی به‌جای n ، عدد ۱ را قراردهیم،جمله اول و اگر به‌جای n عدد۲ را قراردهیم جمله‌دوم... دنباله به دست می‌آید.

۴ـ تعریف دیگر دنباله:

تابع f به صورت:

$$\begin{cases} f : N \rightarrow R \\ n \rightarrow f(n) \end{cases}$$

را درنظر می‌گیریم.

این تابع، تابعی است‌که $D_f \subset N$ و $R_f \subset R$ و جمله عمومی‌آن $f(n)$ ضابطه‌تابع است.

این تابع یك دنباله‌را تعریف‌می‌کند.

مثلاً تابع $\begin{cases} f : N \rightarrow R \\ n \rightarrow f(n) = n^۲ + n \end{cases}$ که هرعدد طبیعی

1_ Sequence

را به مجموع، مربع خودش + خودش مربوط می‌کند.

$$۲ , ۶ , ۱۲ , \cdots, n^۲+n$$

مثلاً تابع
$$\begin{cases} f: N \rightarrow R \\ n \rightarrow f(n)=\dfrac{۱}{n+۲} \end{cases}$$

$$\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۵}, \cdots, \frac{۱}{n+۲}$$

مسأله : کدام جمله از دنباله $a_n=۳n^۲+۵n$ مساوی (۱۸۲) است ؟

$$۳n^۲+۵n=۱۸۲ \Rightarrow ۳n^۲+۵n-۱۸۲=۰$$

$$n=\frac{-۵\pm\sqrt{۲۲۰۹}}{۶}=\frac{-۵\pm۴۷}{۶} \begin{cases} ۷ \\ -۱۳ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

پس جمله هفتم .

۵ـ انواع دنباله:

الف: دنباله صعودی و نزولی

اگر قدرمطلق هرجمله‌دنباله، بزرگتراز ، قدرمطلق جمله ماقبل باشد، چنین‌دنباله‌ای را دنباله صعودی گوییم اگرقدرمطلق هرجمله دنباله،کوچکتراز، قدرمطلق جمله ماقبل باشد، چنین دنباله‌ای‌را دنباله نزولی گوییم.

مانند :

دنباله صعودی
$$\begin{cases} \frac{۱}{۲}, ۲, ۸, ۳۲ \\ \frac{۱}{۲}, -۲, ۸, -۳۲ \end{cases}$$

دنباله نزولی
$$\begin{cases} \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, \frac{۱}{۱۶} \\ \frac{۱}{۲}, -\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۸}, -\frac{۱}{۱۶} \end{cases}$$

□

ب: دنباله متناوب به دوصورت زیر است:

۱ـ به دنباله‌هایی گفته می‌شود که جملاتش یك در میان مثبت و منفی باشد مانند :

$$\frac{۱}{۲}, -۲, ۸, -۳۲$$

به‌این دنباله، دنباله متناوب صعودی گوییم.

۲ـ به‌دنباله‌هایی گفته می‌شود که جملات آن‌در فاصله‌های معین تکرار می‌شود.

مانند: $۰, ۱, ۰, -۱, ۰, ۱, ۰, -۱, \cdots$

$$a_n=\sin\frac{k\pi}{۲}, \quad k\in z$$

□

ج: دنباله مثبت

دنباله‌ای است که همه جملاتش مثبت باشد.

□

د : دنباله منفی ، دنباله‌ای است که همه جملاتش منفی باشد .

سری یا رشته[۲]

متناظر باهردنبالهٔ a_n ، دنبالهٔ S_n وجودداردبه‌طوری که:

$$S_n=a_۱+a_۲+a_۳+\cdots+a_n$$

به این مجموع، رشته یا سری گویند.

2_ Series

به‌عبارت دیگر، سری عبارت است از مجموع n جمله مرتب‌شده یك دنباله که n مقادیر طبیعی از یك تا هر عدد دلخواه را می‌پذیرد.

a_n که قبلاً گفته شد، جمله عمومی دنباله است، جمله عمومی سری نیز می‌باشد. معمولاً برای نمایش سری از نماد $\sum$ (= سیگما) استفاده می‌شود.

اگر a_n جمله عمومی دنباله‌ای باشد، سری متناظر آن را با نماد $\sum_{n=1}^{n} a_n$ نشان می‌دهیم.

یادداشت:

$$\sum_{n=1}^{n} n = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{n} n^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{n} n^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{n=1}^{n} 2n = 2+4+6+\cdots+2n = n(n+1)$$

$$\sum_{n=1}^{n} (2n-1) = 1+3+5+\cdots+2n-1 = n^2$$

توجه: انواع سری، همان انواع دنبالهٔ مولد آنها می‌باشد.

تصاعد عددی یا حسابی

دنباله‌ای است که هر جمله آن برابر باشد با جمله قبل به اضافه عدد ثابتی. این عدد ثابت را قدر نسبت گویند و با حرف r یا d نشان می‌دهند.

مثال:

$$\div\ 3, 7, 11, 15, \cdots$$

$$d=4$$

درحالت کلی، دنباله تصاعد عددی را به صورت زیر می‌توان نشان داد:

$$\div\ a_1, (a_1+d), (a_1+2d), (a_1+3d), \cdots,$$

a_1 جمله اول، a_2 جمله دوم، a_3 جمله سوم، a_4 جمله چهارم ...

$a_1+(n-1)d$ جمله nام

▲

۱- هرگاه $\div x, y, z$ سه جمله متوالی یك تصاعد عددی باشد داریم:

$$x=a_k\ ,\ y=a_k+d\ ,\ z=a_k+2d\ ،\ k\in N$$

$$2(a_k+d)=(a_k)+(a_k+2d)$$

$$\Longrightarrow \boxed{2y=x+z} \quad (1)$$

▲

۲- جمله عمومی یا جمله (n) ام:

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d} \quad (2)$$

▲

۳- در هر تصاعد عددی داریم:

$$a_m-a_n=(m-n)d$$

اثبات:

$$\begin{cases} a_m=a_1+(m-1)d \\ a_n=a_1+(n-1)d \end{cases}$$

$$a_m-a_n=a_1+md-d-a_1-nd+d$$

$$\boxed{a_m-a_n=(m-n)d} \quad (۳)$$

مثال: در یک تصاعد عددی $a_{10}=24$ و $a_{15}=39$، جمله‌چهلم چند است؟

$$a_{15}-a_{10}=39-24 \Rightarrow 5d=15 \Rightarrow d=3$$
$$a_{40}-a_{15}=25d \Rightarrow a_{40}-a_{15}=25(3)$$
$$\Rightarrow a_{40}-39=75 \Rightarrow a_{40}=114$$

۴ـ نتیجه: در هر تصاعد عددی داریم:

$$\text{اگر}\begin{cases}a_m=n\\ a_n=m\end{cases} \Rightarrow d=-1 \ , \ \boxed{a_{m+n}=0} \quad (۴)$$

اثبات: بنا به (۳) داریم:

$$a_m-a_n=(m-n)d$$
$$n-m=(m-n)d \Rightarrow \boxed{d=-1}$$
$$a_{m+n}-a_m=(m+n-n)d$$
$$a_{m+n}-n=nd \Rightarrow a_{m+n}-n=-n \Rightarrow$$
$$\boxed{a_{m+n}=0}$$

مثال:

$$\text{اگر}\begin{cases}a_{15}=10\\ a_{10}=15\end{cases} \Rightarrow d=-1 \ , \ a_{25}=0$$

۵ـ قاعدهٔ اول اندیس:

در هر تصاعد عددی داریم:

$$\boxed{2a_n=a_{n+p}+a_{n-p}} \quad (۵) \quad p\ ,n\in N\ ,p<n$$

اثبات:

$$2a_n=a_{m+p}+a_{n-p}$$
$$2[a_1+(n-1)d]=a_1+(n+p-1)d+a_1+$$
$$(n-p-1)d$$
$$2a_1+2(n-1)d=$$
$$2a_1+(n+p-1+n-p-1)d$$
$$2a_1+2(n-1)d=2a_1+(2n-2)d$$
$$2a_1+2(n-1)d=2a_1+2(n-1)d$$

مثال: دریک تصاعد عددی جمله‌اول دوبرابر جمله‌بیستم است. جمله سی‌و‌نهم این‌تصاعد،چند است؟

$$1+39=2(20)$$
$$\Rightarrow a_1+a_{39}=2a_{20} \Rightarrow a_{39}=0$$

۶ـ قاعدهٔ دوم اندیس:

در هر تصاعد عددی داریم:

به شرطی‌که $m+n=p+k \quad m\ ,n\ ,p\ ,k\in N$

$$\boxed{a_m+a_n=a_p+a_k} \quad (۶)$$

اثبات:

$$a_1+(m-1)d+a_1+(n-1)d=$$
$$a_1+(p-1)d+a_1+(k-1)d$$
$$2a_1+(m+n-2)d=2a_1+(p+k-2)d \ ....$$

چون $m+n=p+k$ پس‌تساوی فوق‌همواره درست است.

اثبات: با استفاده از دستور شماره (۳)

$$a_m-a_p=a_k-a_n$$
$$(m-p)d=(k-n)d$$
$$md-pd=kd-nd \Rightarrow (m+n)d=(k+p)d$$
$$\Rightarrow m+n=k+p$$

که برقرار است.

مثال: دریك تصاعد عددی مجموع دوجمله‌نهم و بیست و نهم مساوی (۱۰۰) است، اگر جمله پانزدهم (۳۲) باشد جمله بیست وسوم این‌تصاعد چند است؟

$$a_{۱۵}+a_{۲۳}=a_{۹}+a_{۲۹}$$
$$۳۲+a_{۲۳}=۱۰۰ \Longrightarrow a_{۲۳}=۶۸$$

S_n -۷ مجموع n جمله اول یك تصاعد حسابی :

در هرتصاعد حسابی

$$\div a_۱ , (a_۱+d) , (a_۱+۲d) , (a_۱+۳d) , \cdots$$

داریم :

$$\boxed{S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)} \quad (۷)$$

اثبات :

$$S_n=a_۱+a_۲+a_۳+\cdots+a_{n-۲}+a_{n-۱}+a_n$$
$$S_n=a_n+a_{n-۱}+a_{n-۲}+\cdots+a_۳+a_۲+a_۱$$
$$\Longrightarrow ۲S_n=(a_۱+a_n)+(a_۲+a_{n-۱})+(a_۳+a_{n-۲})+\cdots$$

تعداد پرانتزهای این‌تساوی (n) است وهریك از این‌پرانتزها بنابه قاعده‌دوم اندیسها مساوی $(a_۱+a_n)$ می‌باشد پس:

$$۲S_n=n(a_۱+a_n) \Longrightarrow S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$$

مثال: در یك تصاعد عددی داریم :

$$a_۷+a_{۱۴}=۱۰۰$$

مجموع بیست جمله‌اول این‌تصاعد چند است؟

$$S_{۲۰}=\frac{۲۰}{۲}(a_۱+a_{۲۰})$$

بنابه قاعده‌دوم اندیس داریم:

$$a_۱+a_{۲۰}=a_۷+a_{۱۴}$$
$$\Longrightarrow S_{۲۰}=۱۰(۱۰۰)=۱۰۰۰$$

۸ - اگر در دستور $S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$ به جای a_n، مساویش‌را قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\boxed{S_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]} \quad (۸)$$

-۹ در هرتصاعد عددی داریم:

$$\boxed{a_n=S_n-S_{n-۱}} \quad (۹)$$

اثبات :

$$a_n=\frac{n}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d]-\frac{n-۱}{۲}\times[۲a_۱+(n-۲)d]$$

$$a_n=\frac{۱}{۲}[۲a_۱n+n(n-۱)d-۲a_۱n+۲a_۱-(n-۱)(n-۲)d]$$

$$a_n=\frac{۱}{۲}[۲a_۱+(n-۱)d(n-n+۲)]$$

$$a_n=\frac{۱}{۲}[۲a_۱+۲(n-۱)d]=a_۱+(n-۱)d=a_n$$

مثال : دریك تصاعد عددی داریم:

$$S_n+n(۴n+۱)$$

جمله‌دهم این‌تصاعدچند است؟

حل :

$$a_{۱۰}=S_{۱۰}-S_۹=۱۰(۴۱)-۹(۳۷) \Longrightarrow$$

$$\boxed{a_{۱۰}=۷۷}$$

مثال : دریك تصاعد عددی داریم:

$a_n = ?$ و $S_n = n(2n+5)$

حل : $n=1 \Longrightarrow S_1 = a_1 = 7$

داریم :

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n) \Longrightarrow$$

$$\frac{n}{2}(a_1+a_n) = n(2n+5)$$

$$\Longrightarrow \frac{n}{2}(7+a_n) = n(2n+5) \Longrightarrow$$

$$7+a_n = 4n+10 \Longrightarrow a_n = 4n+3$$

مثال : دریك تصاعد عددی داریم:

$S_n = ?$ و $a_n = 5n-2$

حل : $n=1 \Longrightarrow a_1 = 3$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n) = \frac{n}{2}(3+5n-2)$$

$$\Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}(5n+1)$$

▲

۱۰- در هرتصاعد عددی داریم :

$$\boxed{\text{اگر } S_m = S_n \Longrightarrow S_{m+n} = 0} \quad (10) \quad m \neq n$$

اثبات :

$$S_m = S_n \Longrightarrow \frac{m}{2}[2a_1+(m-1)d] = \frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$$

$$\Longrightarrow 2a_1m+(m^2-m)d = 2a_1n+(n^2-n)d$$

$$\Longrightarrow 2a_1(m-n)+d(m^2-m-n^2+n)d = 0$$

$$\Longrightarrow 2a_1(m-n)+[m^2-n^2-(m-n)]d = 0$$

$$\Longrightarrow 2a_1(m-n)+[(m-n)(m+n)-(m-n)]d = 0$$

$$\Longrightarrow 2a_1(m-n)+(m-n)(m+n-1)d = 0$$

بر $(m-n)$ تقسیم

$$\Longrightarrow 2a_1+(m+n-1)d = 0$$

در $\frac{m+n}{2}$ ضرب

$$\frac{m+n}{2}[2a_1+(m+n-1)d] = 0$$

$$\Longrightarrow S_{m+n} = 0$$

مثال : اگر $S_6 = S_4 \Longrightarrow S_{10} = 0$

▲

۱۱- اگر دریك تصاعد عددی تعداد جملات‌فرد وجمله وسط (k) باشد داریم:

$$\boxed{2k = a_1+a_n} \quad (11)$$

اثبات : $\div a_1, a_2, a_3, \dots, a_p, \dots, a_n$

اگر $k = a_p$ جمله وسط باشد داریم :

$$2p = 1+n$$

بنابه قاعده اول اندیس خواهیم‌داشت:

$$2a_p = a_1+a_n \Longrightarrow 2k = a_1+a_n$$

▲

۱۲- اگر دریك تصاعد عددی تعداد جملات‌فرد و جمله وسط k باشد داریم:

$$2k = a_1+a_n \quad , \quad S_n = \frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

$$\Longrightarrow S_n = \frac{n}{2}(2k) \Longrightarrow \boxed{S_n = n \cdot k} \quad (12)$$

مثال : زوایای داخلی یك پنج‌ضلعی محدب تصاعد عددی می‌سازند، زاویه وسطی چند درجه‌است؟

مجموع زوایای داخلی یك n ضلعی محدب

$$(2n-4)\times 90^\circ$$

مجموع زوایای داخلی یك پنج ضلعی محدب

$$n=5 \Longrightarrow 6\times 90^\circ=540^\circ$$

$$S_n=nk \Longrightarrow 540^\circ=5k \Longrightarrow k=108^\circ$$

۱۳- اگر در یك تصاعد عددی داشته باشیم

آنگاه: $\frac{S_m}{S_n}=\left(\frac{m}{n}\right)^2, m\neq n$

$$\boxed{d=2a_1}$$

اثبات :

$$\frac{\frac{m}{2}(a_1+a_m)}{\frac{n}{2}(a_1+a_n)}=\left(\frac{m}{n}\right)^2 \Longrightarrow \frac{a_1+a_m}{a_1+a_n}=\frac{m}{n}$$

$$\Longrightarrow \frac{2a_1+(m-1)d}{2a_1+(n-1)d}=\frac{m}{n} \Longrightarrow$$

$$2a_1n+mnd-nd=2a_1m+mnd-md$$

$$\Longrightarrow 2a_1(n-m)=(n-m)d$$

$$\Longrightarrow d=2a_1$$

مثال : اگر در یك تصاعد عددی داشته باشیم:

$$\frac{S_7}{S_3}=\left(\frac{7}{3}\right)^2$$

آنگاه $d=2a_1$.

۱۴- مجموع اعدادهرجدول‌ضرب مساوی مربع مجموع اعداد سطر اول

اثبات : جدول ضرب $n\times n$ را در نظر می گیریم .

مجموع اعداد سطر اول $=1+2+3+\dots+n=\frac{n}{2}(n+1)$

مجموع اعداد سطر دوم $=2+4+6+\dots+2n=n(n+1)$

$$d=n(n+1)-\frac{n}{2}(n+1)=\frac{n}{2}(n+1)$$

بنابراین مجموع اعداد این‌جدول ضرب برابراست‌بامجموع n جمله‌اول تصاعد عددی زیر:

$$\begin{cases} a_1=\frac{n}{2}(n+1) \\ d=\frac{n}{2}(n+1) \\ \text{تعداد جملات}=n \end{cases}$$

$$\Longrightarrow S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]=$$

$$\frac{n}{2}[n(n+1)+(n-1)\times\frac{n}{2}(n+1)]$$

$$S_n=\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}[2(n+1)+(n-1)(n+1)]=$$

$$\frac{n^2}{4}[2n+2+n^2-1]$$

$$S_n=\frac{n^2}{4}[n^2+2n+1]=$$

$$\frac{n^2}{4}(n+1)^2\equiv \text{مربع‌مجموع‌اعدادسطر اول}$$

مثال : مجموع‌اعداد یك‌جدول‌ضرب 12×12 چیست؟

$$S=1+2+3+\dots+12=\frac{12}{2}(12+1)=$$

$۶(۱۳)=۷۸$

$۶۰۸۴=۷۸^۲$ = مجموع اعداد این جدول‌ضرب

۱۵- اگر بین دو عدد a و b ، n واسطه عددی درج کنیم خواهیم داشت ......

$$\div a , \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{n} , b$$

$$b=a+(n+۱)d \implies b-a=(n+۱)d$$

$$\implies \boxed{d=\frac{b-a}{n+۱}} \qquad (۱۳)$$

مثال : اگر بین دو عدد ۱۰ و ۱۴ ، سیصد و نود و نه واسطه عددی درج کنیم، جمله دویست و نود و نهم این تصاعد چند است؟

$$a=۱۰ \quad , \quad b=۱۴$$

$$d=\frac{b-a}{n+۱}=\frac{۴}{۴۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰}$$

$$a_{۲۹۹}=a_۱+۲۹۸d=۱۰+۲۹۸\left(\frac{۱}{۱۰۰}\right)=$$

$$۱۰+۲/۹۸=۱۳/۹۸$$

۱۶- اگر بین دو عدد a و b ، n واسطه عددی درج کنیم، خواهیم داشت:

b جمله $(n+۲)$ ام است

$$\div a , \underbrace{\cdots\cdots\cdots}_{n \text{ تا}} , b$$

$$S_{n+۲}=\frac{n+۲}{۲}(a+b)=\left(\frac{n}{۲}+۱\right)(a+b)=$$

$$\frac{n}{۲}(a+b)+(a+b) \implies$$

$$\boxed{\text{واسطه } S_n=\frac{n}{۲}(a+b)} \qquad (۱۴)$$

مثال : اگر بین دو عدد ۸ و ۲۲ ، دویست واسطه عددی درج کنیم، مجموع این واسطه‌ها چقدر است؟

$$S=\frac{n}{۲}(a+b)=\frac{۲۰۰}{۲}(۸+۲۲)=$$

$$۱۰۰(۳۰)=۳۰۰۰$$

توجه : درجمله عمومی، a_n ، ضریب n مساوی d (قدر نسبت) است. ودرعبارت S_n، ضریب $n^۲$، مساوی $\left(\frac{d}{۲}\right)$ است.

مثال : دریك تصاعد عددی $S_n=۲n(۳n-۱)$، حاصل $(a_{n+۵}-a_{n-۵})$ چند است؟

حل : $\frac{d}{۲}=۶=n^۲$ ضریب $\implies d=۱۲$

$$a_{n+۵}-a_{n-۵}=۱۰d=۱۲۰$$

۱۷- اگر دو تصاعد عددی باقدر نسبتهای $d_۱$ و $d_۲$ داشته باشیم .

چنانچه بین آنها جملات مشترکی وجود داشته باشد، این جملات مشترك تصاعد عددی جدیدی می‌سازند که قدر نسبت آن مساوی $(d_۱ \cdot d_۲)$ است.

اثبات :

$$\div a_۱ , a_۲ , a_۳ , \cdots , a_n$$

تصاعد اولی: $d_۱=$ قدر نسبت

$$\div u_۱ , u_۲ , u_۳ , \cdots , u_n$$

تصاعد دومی: $d_۲=$ قدر نسبت

فرض می‌کنیم $d_۱$ و $d_۲$ نسبت به هم اول باشند.

فرض می‌کنیم $a_۱$ و a_p و a_k با $u_۱$ و u_t و u_l جملات

مشترکی از دو تصاعد باشند که خودشان یک تصاعد عددی می‌سازند

پس :

$$\left.\begin{array}{l} \div\, a_1\,,\ a_p\,,\ a_k \\ \div\, u_1\,,\ u_t\,,\ u_t \end{array}\right\} \text{قدر نسبت} = d'_1$$

$$\begin{cases} a_p = a_1 + d_1' \\ a_p = a_1 + (p-1)d_1 \end{cases} \Longrightarrow d'_1 = (p-1)d_1 \quad (I)$$

$$\begin{cases} u_t = u_1 + d'_1 \\ u_t = u_1 + (t-1)d_2 \end{cases} \Longrightarrow d'_1 = (t-1)d_2 \quad (II)$$

با مقایسه روابط (I) و (II) نتیجه می‌شود

$$(p-1)d_1 = (t-1)d_2$$

چون d_1 و d_2 نسبت به هم اول‌اند پس:

$$d_2 = p-1 \quad , \quad d_1 = t-1$$

پس :

$$d_1' = (p-1)d_1 \Longrightarrow d_1' = d_1 \cdot d_2$$

توجه : اگر d_1 و d_2 نسبت به هم اول نباشد بازهم مسألهٔ قابل اثبات است. (اثبات به عهده خواننده واگذار می‌شود).

مثال : در دو تصاعد عددی، ۶,۳÷ و ۷,۳÷، مجموع ده جمله مشترک اولیه چقدر است ؟

$$\begin{cases} d_1 = 3 \\ d_2 = 4 \end{cases} \Longrightarrow d_1' = 12$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d = \frac{12}{2}[6 + 9 \times 12] =$$

$$6(114) = 684$$

مسائل:

مسأله ۱- به چه‌شرطی عبارتهای:

$$x^2+xy+y^2\ ,\ y^2+yz+z^2\ ,\ z^2+xz+x^2$$

تصاعد عددی می‌سازند.

حل : سه‌جمله را به ترتیب a_1 و a_2 و a_3 فرض می‌کنیم و خواهیم داشت:

$$a_1 - a_2 = a_2 - a_3 \quad \leftarrow \quad \text{یا} \quad 2a_2 = a_1 + a_3$$

$$x^2+xy+y^2-y^2-yz-z^2 =$$

$$y^2+yz+z^2-z^2-xz-x^2$$

$$x^2+xy-yz-z^2 = y^2+yz-xz-x^2$$

$$+xz-xz \qquad\qquad +xy-xy$$

$$x(x+y+z)-z(x+y+z) =$$

$$y(x+y+z)-x(x+y+z)$$

$$(x+y+z)(x-z) = (x+y+z)(y-x)$$

$$\Longrightarrow x-z = y-x \Longrightarrow 2x = y+z$$

یعنی y و x و z باید سه‌جمله متوالی یک تصاعد عددی باشند. ∎

مسأله ۲ - مجموع سه‌عدد m و مجموع مربعات آنها n است اگر این سه‌عدد جمله‌های متوالی یک تصاعد عددی باشد، به چه‌شرطی مسأله‌دارای جواب است؟

حل : جمله وسطی‌را b و قدر نسبت‌را d فرض‌می‌کنیم.

و تصاعد به صورت : $\div\, b-d \ :\ b\ :\ b+d$ است

$$\Longrightarrow \begin{cases} 3b = m \Longrightarrow b = \dfrac{m}{3} \\ b^2+(b+d)^2+(b-d)^2 = n \Longrightarrow \\ b^2+2(b^2+d^2) = n \end{cases}$$

$$3b^2+2d^2=n \implies d^2=\frac{n-3b^2}{2} \implies$$

$$d^2=\frac{n-3\left(\frac{m^2}{9}\right)}{2} \implies d^2=\frac{3n-m^2}{9}$$

شرط وجود جواب مسأله آن است که $3n-m^2>0$ یا:

$$\boxed{n>\frac{m^2}{3}}$$

مسأله ۳ - یك تصاعد عددی بیابید که مجموع n جمله اول آن $n(2n+3)$ باشد.

این مسأله را از راههای زیر می‌توان حل کرد .

راه اول: فرمول S_n را نوشته هم ارز $2n^2+3n$ قرارمی‌دهیم.

$$S_n\equiv 2n^2+3n \implies$$

$$\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]\equiv n(2n+3)$$

$$2a_1+(n-1)d\equiv 4n+6 \implies$$

$$nd+(2a_1-d)\equiv 4n+6$$

$$\implies \begin{cases} d=4 \\ 2a_1-d=6 \implies 2a_1-4=6 \implies \\ a_1=5 \end{cases}$$

$$\implies \div 5, 9, 13, \dots$$

راه دوم:

$$S_n=2n^2+3n$$

$$\text{ضریب } n^2 \text{ : قبلاً گفته شد} = \frac{d}{2} \implies$$

$$2=\frac{d}{2} \implies \boxed{d=4}$$

$$n=1 \implies S_1=a_1=5$$

$$\implies \div 5, 9, 13, \dots$$

راه سوم:

$$n=1 \implies S_1=a_1=5$$

$$S_n=n(2n+3)$$

$$\frac{n}{2}(a_1+a_n)=n(2n+3) \implies$$

$$a_1+a_n=4n+6$$

$$5+a_n=4n+6 \implies a_n=4n+1$$

$$\text{ضریب } n = d \implies \boxed{d=4}$$

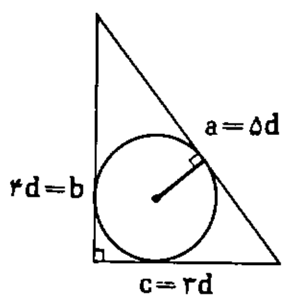
$$\implies \div 5, 9, 13, \dots$$

مسأله ۴ - ثابت کنید اگر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای تصاعد عددی بسازند، اولاً ضلع وسطی چهار برابر قدر نسبت است، ثانیاً شعاع دایره محاطی داخلی مساوی قدر نسبت است.

$$\div c, b, a$$

یا

$$\div b-d \quad b \quad b+d$$



داریم :

$$a^2=b^2+c^2 \implies (b+d)^2=b^2+(b-d)^2$$

$$\implies (b+d)^2-(b-d)^2=b^2 \implies$$

$$4bd=b^2 \implies \boxed{4d=b}$$

بدین‌ترتیب اگر اضلاع مثلث قائم‌الزاویه‌ای تصاعد عددی بسازد، اضلاع آن را می‌توان به‌صورت 3d و 4d و 5d نشان داد .

داریم :

$$r=\frac{s}{p}=\frac{۶d^۲}{۶d}\Longrightarrow\boxed{r=d}$$

■

مسأله ۵ - مجموع هفت جمله‌اول یك تصاعدعددی (۷) است و حاصل ضرب این جملات صفر است. تصاعد را معلوم کنید.

حل : جمله وسطی‌را k و قدرنسبت را (d) می‌نامیم.

$$\div k-۳d\ ,\ k-۲d\ ,\ k-d\ ,\ k\ ,\ k+d\ ,$$
$$k+۲d\ ,\ k+۳d\ \Longrightarrow\ ۷k=۷\ \Longrightarrow\ \boxed{k=۱}$$
$$\Longrightarrow k(k^۲-d^۲)(k^۲-۴d^۲)(k^۲-۹d^۲)=۰$$
$$(۱-d^۲)(۱-۴d^۲)(۱-۹d^۲)=۰$$

$$\Longrightarrow\begin{cases}d=\pm ۱\\ d=\pm\frac{۱}{۲}\\ d=\pm\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

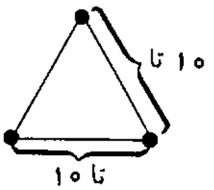
تصاعدهای موردنظر مسأله :

$$\div -۲\ ,\ -۱\ ,\ ۰\ ,\ ۱\ ,\ ۲\ ,\ ۳\ ,\ ۴$$
$$\div\ ۴\ ,\ ۳\ ,\ ۲\ ,\ ۱\ ,\ -۱\ ,\ -۲$$
$$\div -\frac{۱}{۲}\ ,\ ۰\ ,\ \frac{۱}{۲}\ ,\ ۱\ ,\ \frac{۳}{۲}\ ,\ ۲\ ,\ \frac{۵}{۲}$$
$$\div \frac{۵}{۲}\ ,\ ۲\ ,\ \frac{۳}{۲}\ ,\ ۱\ ,\ \frac{۱}{۲}\ ,\ ۰\ ,\ -\frac{۱}{۲}$$
$$\div ۰\ ,\ \frac{۱}{۳}\ ,\ \frac{۲}{۳}\ ,\ ۱\ ,\ \frac{۴}{۳}\ ,\ \frac{۵}{۳}\ ,\ ۲$$
$$\div ۲\ ,\ \frac{۵}{۳}\ ,\ \frac{۴}{۳}\ ,\ ۱\ ,\ \frac{۲}{۳}\ ,\ \frac{۱}{۳}\ ,\ ۰$$

■

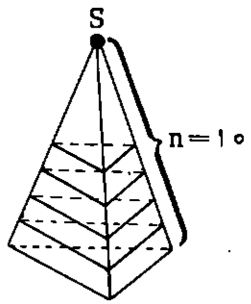
مسأله ۶ - چهار وجهی منتظمی‌داریم که در آن با شرایط زیر گلوله‌گذاری شده است. به طوری‌که در هررأس یك گلوله و روی هریال ۱۰ گلوله قرار گرفته است، اگر کل فضای داخلی آن را با شرایط فوق گلوله‌گذاری کنیم، تعیین کنید در حجم آن چندگلوله به‌کار رفته است؟

حل : می‌دانیم سطوح جانبی این چهار وجهی مثلثهای متساوی‌الاضلاع است. پس گلوله‌های سطح قاعده چنین چیده شده است.



$$۱+۲+۳+\cdots+۱۰=$$
$$\frac{n(n+۱)}{۲}=\frac{۱۰(۱۱)}{۲}=۵۵$$

پس‌در سطح‌قاعده ۵۵ گلوله گذاشته‌شده‌است ودر رأسS یك گلوله قرار گرفته‌است. اگرفرض‌کنیم گلوله‌ها روی‌صفحه‌هایی موازی سطح‌قاعده در داخل این‌چهار وجهی قرار گرفته باشند، در سطح‌پایینی (۵۵) گلوله ودر سطح‌بالایی یك گلوله قرار دارد و تعداد این‌صفحات (۱۰) است پس:



$$\begin{cases}a_۱=۱\\ a_{۱۰}=۵۵\\ n=۱۰\end{cases}\quad S_n=\frac{n}{۲}(a_۱+a_n)$$
$$=\frac{۱۰}{۲}(۱+۵۵)=۵(۵۶)=۲۸۰$$

مسأله ۷ - دریک‌دنباله اعدادطبیعی، چهارعددفردمتوالی به‌طریقی بیابیدکه مجموع مربعات آنها از مجموع مربعات اعداد زوج بین‌آنها (۴۸) واحدبیشتر باشد.

چهار عدد فرد متوالی

$$n\ ,\quad n+۲\ ,\quad n+۴\ ,\quad n+۶$$

سه عدد زوج متوالی بین‌آنها

$$n+۱\qquad n+۳\qquad n+۵$$

$$n^۲+(n+۲)^۲+(n+۴)^۲+(n+۶)^۲=$$
$$۴۸+(n+۱)^۲+(n+۳)^۲+(n+۵)^۲$$
$$\Longrightarrow n^۲+۶n-۲۷=۰ \Longrightarrow$$
$$\begin{cases} n=۳ \\ n=-۹ \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \Longrightarrow \boxed{۳\ ,\ ۵\ ,\ ۷\ ,\ ۹}$$

توضیح اینکه: مقاله راجع‌به تصاعد هندسی در شماره۳ این مجله خواهدآمد .

تیمور پس از یک سفر طولانی به خارج، گزاره‌های زیر را در مورد هتلهای مورد علاقه‌اش بیان کرده‌است:

۱ـ وقتی غذای هتل خوب باشد، گارسنها مؤدبند.

۲ـ هیچ هتل سرتاسرسال بازی از داشتن منظره‌ای از اقیانوس محروم نیست.

۳ـ غذا تنها در بعضی هتلهای ارزان قیمت بد است.

۴ـ هتلهایی که استخرشنا دارند دیوارهاشان را به‌دقت با پیچ امین‌الدوله می‌پوشانند.

۵ـ هتلهایی که خدمه‌شان نامؤدبند آنهایی هستندکه تنها قسمتی از سال بازند.

۶ـ هیچ هتل ارزان قیمتی سگها را نمی‌پذیرند.

۷ـ هتلهای بی‌استخرشنا منظره‌ای از اقیانوس ندارند.

آیا دراین هتلها، یک دارندهٔ سگ می‌تواند از پیچ امین‌الدوله لذت ببرد؟

جواب

می‌توانیم نظریات تیمور را به‌ترتیب زیربازنویسی کنیم:

۶ـ اگر هتلی سگها را بپذیرد، قیمتش بالاست.

۳ـ اگر قیمت هتل بالاست، غذای آن خوب است.

۱ـ اگر غذا خوب است، پیشخدمتها مؤدبند.

۵ـ اگر پیشخدمتها مؤدبند، هتل سراسر سال باز است.

۲ـ اگر هتل سراسر سال باز است، منظره‌ای از اقیانوس دارد.

۷ـ اگر منظره‌ای از اقیانوس موجودباشد، استخرشنا موجود است.

۴ـ اگر استخرشنا موجودباشد، پیچ امین‌الدوله روی دیوارهایش هست.

بنابراین، هتلهایی که سگ می‌پذیرند پیچ‌امین الدوله روی دیوارهاشان دارند.