

یکی از اساسی ترین مفهوما در ریاضیات «دنباله» است؛ زیرا مهمترین مفهوماهای ریاضیات عالی بر پایه آن ساخته شده است (مانند: مفهوم حد، که در آینده با آن آشنا خواهید شد).

دنباله عددی

هرگاه مجموعه مرتبی از عددها به دنبال هم بیایند، آن را «دنباله عددی» گویند. هر عدد از دنباله را عضو یا جمله دنباله گویند: جمله اول، جمله دوم، ...، جمله دهم، ... و جمله n ام.

به طور معمول، هر یک از جمله های دنباله را با a_1, a_2, \dots و a_n نشان می دهند و با عددهای طبیعی $1, 2, \dots$ و n مشخص می نمایند. بنابراین، دامنه دنباله عددی، مجموعه عددهای طبیعی است. در اصطلاح، a_1 را جمله اول و a_n را جمله n ام یا جمله عمومی دنباله گویند.

مثال ۱. دنباله عددهای فرد و زوج طبیعی را به صورت زیر نشان می دهند:

$(1, 3, 5, 7, \dots, (2n-1), \dots, (n \in \mathbb{N}))$ (دنباله عددهای فرد طبیعی)

$(2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots)$ (دنباله عددهای زوج طبیعی)

(\mathbb{N} مجموعه عددهای طبیعی است)

مثال ۲. دنباله عددهای اول کوچکتر از ۲۰ به صورت زیر است:

۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹

مسئله ۱. دنباله عددهای مثبت بخش پذیر بر ۳ را بنویسید و تعیین کنید عدد ۱۳۷۷ چندمین جمله دنباله است.

حل: جمله عمومی این دنباله، به صورت $3n$ است، که اگر در آن، مقدار n را بر ترتیب عددهای طبیعی $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ قرار دهیم، جمله های پی در پی دنباله مورد نظر به دست می آید:

$3, 6, 9, 12, \dots, 1377, \dots, 3n, \dots$

چون جمله عمومی دنباله $3n$ است، بنابراین:



دنباله و

تصاعدهای

عددی و هندسی

• سیدمحمد رضا هاشمی موسوی

به جمله قبل خود، به دست می آید. عدد ثابت دنباله را تفاضل مشترک یا «قدر نسبت» دنباله حسابی (تصاعد حسابی) می نامند و آن را با d نشان می دهند.

تعریف: اگر قدرنسبت دنباله حسابی مثبت باشد، آن دنباله را صعودی و اگر منفی باشد، دنباله را نزولی نامند. بنا به همین تعریف، بهتر است که به جای لفظ تصاعد حسابی، لفظ عام دنباله حسابی را به کار ببریم؛ زیرا تصاعد به معنای صعود کردن است و در نتیجه لفظ «تصاعد نزولی» کاملاً غلط است و باید به جای آن، از لفظ «دنباله نزولی» استفاده کنیم.

مثال ۳. دنباله عددهای طبیعی، یک دنباله صعودی با قدرنسبت $d=1$ و جمله اول $a=1$ است و دنباله عددهای صحیح منفی، یک دنباله نزولی با قدرنسبت $d=-1$ و جمله اول $a=-1$ است.

تعیین جمله عمومی (جمله n ام) دنباله حسابی (تصاعد حسابی)

جمله اول دنباله حسابی را به $a(t_1)$ و قدرنسبت آن را به d نشان می دهیم. بنا به تعریف دنباله حسابی:

$$t_2 = a + d \quad (\text{جمله دوم}), \quad t_3 = a + 2d \quad (\text{جمله سوم}), \dots$$

دیده می شود که ضریب d در هر جمله، یکی کمتر از عددی است که مرتبه آن جمله را مشخص می کند (زیرا d برای نخستین بار برای تعیین جمله دوم به a افزوده شده است). پس، اگر عمل فوق را ادامه دهیم، به طور مثال، جمله دهم برابر $t_{10} = a + 9d$ است و به طور کلی می توان نوشت:

$$t_n = a + (n-1)d \quad (\text{جمله } n\text{ام})$$

مثال ۴. کدام جمله از دنباله حسابی زیر، برابر با ۵۶ است؟
۲, ۵, ۸, ۱۱, ...

حل: در این دنباله، جمله اول ۲ و قدرنسبت ۳ است. اگر فرض کنیم که جمله n ام این دنباله، ۵۶ است، مطابق با دستور جمله عمومی دنباله حسابی:

$$t_n = a + (n-1)d, \quad a=2, \quad d=3, \quad t_n=56$$

$$56 = 2 + (n-1)(3); \quad 3(n-1) = 54; \quad n-1 = 18; \quad n = 19$$

مسئله ۴. جمله k ام یک دنباله حسابی برابر S و جمله m ام آن برابر با P است؛ این دنباله را مشخص کنید.

حل: اگر جمله اول دنباله مورد نظر را به t_1 و جمله عمومی (جمله n ام) آن را به t_n نشان دهیم، در این صورت:

$$3n = 1377; \quad n = \frac{1377}{3} = 459$$

بنابراین، عدد ۱۳۷۷، جمله چهار صد و پنجاه و نهم دنباله است.

مسئله ۲. جمله عمومی یک دنباله $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ است،

کدام جمله این دنباله برابر ۵۵ است.
حل:

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} = 55; \quad n^2 + n - 110 = 0;$$

$$(n+11)(n-10) = 0$$

$$n \in \mathbb{N}; \quad n-10=0; \quad n=10 \quad (\text{جمله دهم})$$

مسئله ۳. اگر عدد n معرف تعداد ضلعهای یک چندضلعی کوز (محدب) باشد، تعداد قطرهای این چندضلعیها را به صورت یک دنباله عددی بنویسید.

حل: این مسئله را می توان با روشهای مختلف حل کرد، که ما برای اختصار، به روش مستقیم عمل می کنیم.

اگر در n ضلعی، یک رأس را انتخاب کنیم، با وصل کردن آن به $(n-3)$ رأس، قطرهایی از n ضلعی به دست می آید که از این رأس گذشته اند؛ البته توجه داریم که برای پدید آمدن قطر، نمی توان هر رأس را به خودش یا به دو رأس مجاورش وصل کرد. به این ترتیب، از n رأس به تعداد $n(n-3)$ قطر می گذرد؛ چون هر قطر مربوط به دو رأس، دو بار به حساب آمده است، پس تعداد قطرهای هر n ضلعی، از رابطه زیر به دست می آید:

$$a_n = \frac{1}{2}n(n-3) \quad (1)$$

واضح است که اولین جمله دنباله، با قرار دادن $n=3$ در رابطه (۱)، تعیین می شود و جمله های بعدی دنباله نیز به ازای عددهای طبیعی بزرگتر از ۳ به دست خواهد آمد:

$$0, 2, 5, 9, 14, \dots, \frac{n(n-3)}{2}, \dots$$

یک نوع خاصی از دنباله های عددی وجود دارند، که این گونه دنباله ها را به سبب صعودی یا نزولی بودن آنها، «دنباله صعودی» یا «دنباله نزولی» می نامیم.

دنباله حسابی (تصاعد حسابی)

دنباله ای است که هر جمله آن، با افزودن عددی ثابت (غیر صفر)

در این جا، قدرنسبت دنباله مورد نظر به دست می آید. بنابراین، برای درج m واسطه حسابی بین a و b ، باید قدرنسبت $\frac{b-a}{m+1}$ را به جمله اول، سپس به جمله دوم و ... اضافه کنیم. واسطه حسابی (میانگین) دو عدد a و b برابر با نصف مجموع آنهاست؛ زیرا اگر x ، واسطه حسابی a و b باشد، می توان نوشت:

$$d = x - a = b - x ; \quad x - a = b - x ;$$

$$2x = a + b$$

در نتیجه:

$$x = \frac{a+b}{2} \quad [x \text{ واسطه حسابی (میانگین) } a \text{ و } b \text{ است.}]$$

مجموع جمله های دنباله حسابی متناهی (تصادف حسابی)

مجموع جمله های دنباله حسابی را به S_n نمایش می دهیم؛ بنابراین:

$$S_n = t_1 + (t_1 + d) + (t_1 + 2d) + \dots + (t_n - 2d) + (t_n - d) + t_n \quad (1)$$

حال اگر جمله های مجموع (۱) را بعکس ترتیب بالا بنویسیم:

$$S_n = t_n + (t_n - d) + (t_n - 2d) + \dots + (t_1 + 2d) + (t_1 + d) + t_1 \quad (2)$$

از جمع برابریهای (۱) و (۲)، برابری زیر حاصل می شود:

$$2S_n = \underbrace{(t_1 + t_n) + (t_1 + t_n) + \dots + (t_1 + t_n)}_{n \text{ مرتبه}} ;$$

$$2S_n = n(t_1 + t_n) \quad \text{بنابراین:}$$

$$S_n = \frac{n(t_1 + t_n)}{2} \quad (3)$$

با جایگزینی جمله عمومی تصاعد $(t_n = t_1 + (n-1)d)$ در رابطه (۳)، به دستور زیر می رسمیم:

$$S_n = \frac{n}{2} [2t_1 + (n-1)d]$$

مثال ۶. مجموع n عدد طبیعی اولیه را حساب کنید.
حل: قدرنسبت دنباله عددهای طبیعی برابر ۱ است و جمله اول آن نیز برابر ۱ است؛ بنابراین:

$$S_n = \frac{n}{2} [2 + (n-1)] = \frac{n(n+1)}{2} ;$$

$$\begin{cases} t_k = t_1 + (k-1)d = S \text{ (از تفاضل دو رابطه)} \\ t_n = t_1 + (n-1)d = P \end{cases}$$

$$d = \frac{S-P}{k-n} \quad \text{(قدرنسبت دنباله)}$$

$$t_1 = S - (k-1)d \quad \text{(جمله اول دنباله)}$$

مسئله ۵. اگر جمله چهارم یک تصاعد حسابی ۲- و جمله چهاردهم آن ۲۴ باشد، جمله هفتاد و هشتم آن را بیابید.

حل:

$$\begin{cases} t_4 = t_1 + (4-1)d = t_1 + 3d = -2 \\ t_{14} = t_1 + (14-1)d = t_1 + 13d = 24 \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} t_1 + 3d = -2 \\ t_1 + 13d = 24 \end{cases}$$

از حل دستگاه:

$$\text{(جمله اول)} \quad d = 3/6, \quad t_1 = -12/8 \quad \text{(قدرنسبت)}$$

$$t_{78} = -12/8 + 77 \times 3/6 = 264/4 \text{ (جمله هفتاد و هشتم)}$$

واسطه های حسابی (عددی)

در هر دنباله، جمله هایی را که بین دو جمله متوالی قرار دارند، واسطه عددی یا حسابی بین آن دو جمله گویند.

مثال ۵. در دنباله ...، ۳، ۵، ۷، ۹، ۱۱، ۱۳، ۱۵، ۱۷، ۱۹، ۲۱، ۲۳، ۲۵، ۲۷، ۲۹، ۳۱، ۳۳، ۳۵، ۳۷، ۳۹، ۴۱، ۴۳، ۴۵، ۴۷، ۴۹، ۵۱، ۵۳، ۵۵، ۵۷، ۵۹، ۶۱، ۶۳، ۶۵، ۶۷، ۶۹، ۷۱، ۷۳، ۷۵، ۷۷، ۷۹، ۸۱، ۸۳، ۸۵، ۸۷، ۸۹، ۹۱، ۹۳، ۹۵، ۹۷، ۹۹، ۱۰۱، ۱۰۳، ۱۰۵، ۱۰۷، ۱۰۹، ۱۱۱، ۱۱۳، ۱۱۵، ۱۱۷، ۱۱۹، ۱۲۱، ۱۲۳، ۱۲۵، ۱۲۷، ۱۲۹، ۱۳۱، ۱۳۳، ۱۳۵، ۱۳۷، ۱۳۹، ۱۴۱، ۱۴۳، ۱۴۵، ۱۴۷، ۱۴۹، ۱۵۱، ۱۵۳، ۱۵۵، ۱۵۷، ۱۵۹، ۱۶۱، ۱۶۳، ۱۶۵، ۱۶۷، ۱۶۹، ۱۷۱، ۱۷۳، ۱۷۵، ۱۷۷، ۱۷۹، ۱۸۱، ۱۸۳، ۱۸۵، ۱۸۷، ۱۸۹، ۱۹۱، ۱۹۳، ۱۹۵، ۱۹۷، ۱۹۹، ۲۰۱، ۲۰۳، ۲۰۵، ۲۰۷، ۲۰۹، ۲۱۱، ۲۱۳، ۲۱۵، ۲۱۷، ۲۱۹، ۲۲۱، ۲۲۳، ۲۲۵، ۲۲۷، ۲۲۹، ۲۳۱، ۲۳۳، ۲۳۵، ۲۳۷، ۲۳۹، ۲۴۱، ۲۴۳، ۲۴۵، ۲۴۷، ۲۴۹، ۲۵۱، ۲۵۳، ۲۵۵، ۲۵۷، ۲۵۹، ۲۶۱، ۲۶۳، ۲۶۵، ۲۶۷، ۲۶۹، ۲۷۱، ۲۷۳، ۲۷۵، ۲۷۷، ۲۷۹، ۲۸۱، ۲۸۳، ۲۸۵، ۲۸۷، ۲۸۹، ۲۹۱، ۲۹۳، ۲۹۵، ۲۹۷، ۲۹۹، ۳۰۱، ۳۰۳، ۳۰۵، ۳۰۷، ۳۰۹، ۳۱۱، ۳۱۳، ۳۱۵، ۳۱۷، ۳۱۹، ۳۲۱، ۳۲۳، ۳۲۵، ۳۲۷، ۳۲۹، ۳۳۱، ۳۳۳، ۳۳۵، ۳۳۷، ۳۳۹، ۳۴۱، ۳۴۳، ۳۴۵، ۳۴۷، ۳۴۹، ۳۵۱، ۳۵۳، ۳۵۵، ۳۵۷، ۳۵۹، ۳۶۱، ۳۶۳، ۳۶۵، ۳۶۷، ۳۶۹، ۳۷۱، ۳۷۳، ۳۷۵، ۳۷۷، ۳۷۹، ۳۸۱، ۳۸۳، ۳۸۵، ۳۸۷، ۳۸۹، ۳۹۱، ۳۹۳، ۳۹۵، ۳۹۷، ۳۹۹، ۴۰۱، ۴۰۳، ۴۰۵، ۴۰۷، ۴۰۹، ۴۱۱، ۴۱۳، ۴۱۵، ۴۱۷، ۴۱۹، ۴۲۱، ۴۲۳، ۴۲۵، ۴۲۷، ۴۲۹، ۴۳۱، ۴۳۳، ۴۳۵، ۴۳۷، ۴۳۹، ۴۴۱، ۴۴۳، ۴۴۵، ۴۴۷، ۴۴۹، ۴۵۱، ۴۵۳، ۴۵۵، ۴۵۷، ۴۵۹، ۴۶۱، ۴۶۳، ۴۶۵، ۴۶۷، ۴۶۹، ۴۷۱، ۴۷۳، ۴۷۵، ۴۷۷، ۴۷۹، ۴۸۱، ۴۸۳، ۴۸۵، ۴۸۷، ۴۸۹، ۴۹۱، ۴۹۳، ۴۹۵، ۴۹۷، ۴۹۹، ۵۰۱، ۵۰۳، ۵۰۵، ۵۰۷، ۵۰۹، ۵۱۱، ۵۱۳، ۵۱۵، ۵۱۷، ۵۱۹، ۵۲۱، ۵۲۳، ۵۲۵، ۵۲۷، ۵۲۹، ۵۳۱، ۵۳۳، ۵۳۵، ۵۳۷، ۵۳۹، ۵۴۱، ۵۴۳، ۵۴۵، ۵۴۷، ۵۴۹، ۵۵۱، ۵۵۳، ۵۵۵، ۵۵۷، ۵۵۹، ۵۶۱، ۵۶۳، ۵۶۵، ۵۶۷، ۵۶۹، ۵۷۱، ۵۷۳، ۵۷۵، ۵۷۷، ۵۷۹، ۵۸۱، ۵۸۳، ۵۸۵، ۵۸۷، ۵۸۹، ۵۹۱، ۵۹۳، ۵۹۵، ۵۹۷، ۵۹۹، ۶۰۱، ۶۰۳، ۶۰۵، ۶۰۷، ۶۰۹، ۶۱۱، ۶۱۳، ۶۱۵، ۶۱۷، ۶۱۹، ۶۲۱، ۶۲۳، ۶۲۵، ۶۲۷، ۶۲۹، ۶۳۱، ۶۳۳، ۶۳۵، ۶۳۷، ۶۳۹، ۶۴۱، ۶۴۳، ۶۴۵، ۶۴۷، ۶۴۹، ۶۵۱، ۶۵۳، ۶۵۵، ۶۵۷، ۶۵۹، ۶۶۱، ۶۶۳، ۶۶۵، ۶۶۷، ۶۶۹، ۶۷۱، ۶۷۳، ۶۷۵، ۶۷۷، ۶۷۹، ۶۸۱، ۶۸۳، ۶۸۵، ۶۸۷، ۶۸۹، ۶۹۱، ۶۹۳، ۶۹۵، ۶۹۷، ۶۹۹، ۷۰۱، ۷۰۳، ۷۰۵، ۷۰۷، ۷۰۹، ۷۱۱، ۷۱۳، ۷۱۵، ۷۱۷، ۷۱۹، ۷۲۱، ۷۲۳، ۷۲۵، ۷۲۷، ۷۲۹، ۷۳۱، ۷۳۳، ۷۳۵، ۷۳۷، ۷۳۹، ۷۴۱، ۷۴۳، ۷۴۵، ۷۴۷، ۷۴۹، ۷۵۱، ۷۵۳، ۷۵۵، ۷۵۷، ۷۵۹، ۷۶۱، ۷۶۳، ۷۶۵، ۷۶۷، ۷۶۹، ۷۷۱، ۷۷۳، ۷۷۵، ۷۷۷، ۷۷۹، ۷۸۱، ۷۸۳، ۷۸۵، ۷۸۷، ۷۸۹، ۷۹۱، ۷۹۳، ۷۹۵، ۷۹۷، ۷۹۹، ۸۰۱، ۸۰۳، ۸۰۵، ۸۰۷، ۸۰۹، ۸۱۱، ۸۱۳، ۸۱۵، ۸۱۷، ۸۱۹، ۸۲۱، ۸۲۳، ۸۲۵، ۸۲۷، ۸۲۹، ۸۳۱، ۸۳۳، ۸۳۵، ۸۳۷، ۸۳۹، ۸۴۱، ۸۴۳، ۸۴۵، ۸۴۷، ۸۴۹، ۸۵۱، ۸۵۳، ۸۵۵، ۸۵۷، ۸۵۹، ۸۶۱، ۸۶۳، ۸۶۵، ۸۶۷، ۸۶۹، ۸۷۱، ۸۷۳، ۸۷۵، ۸۷۷، ۸۷۹، ۸۸۱، ۸۸۳، ۸۸۵، ۸۸۷، ۸۸۹، ۸۹۱، ۸۹۳، ۸۹۵، ۸۹۷، ۸۹۹، ۹۰۱، ۹۰۳، ۹۰۵، ۹۰۷، ۹۰۹، ۹۱۱، ۹۱۳، ۹۱۵، ۹۱۷، ۹۱۹، ۹۲۱، ۹۲۳، ۹۲۵، ۹۲۷، ۹۲۹، ۹۳۱، ۹۳۳، ۹۳۵، ۹۳۷، ۹۳۹، ۹۴۱، ۹۴۳، ۹۴۵، ۹۴۷، ۹۴۹، ۹۵۱، ۹۵۳، ۹۵۵، ۹۵۷، ۹۵۹، ۹۶۱، ۹۶۳، ۹۶۵، ۹۶۷، ۹۶۹، ۹۷۱، ۹۷۳، ۹۷۵، ۹۷۷، ۹۷۹، ۹۸۱، ۹۸۳، ۹۸۵، ۹۸۷، ۹۸۹، ۹۹۱، ۹۹۳، ۹۹۵، ۹۹۷، ۹۹۹، ۱۰۰۱، ۱۰۰۳، ۱۰۰۵، ۱۰۰۷، ۱۰۰۹، ۱۰۱۱، ۱۰۱۳، ۱۰۱۵، ۱۰۱۷، ۱۰۱۹، ۱۰۲۱، ۱۰۲۳، ۱۰۲۵، ۱۰۲۷، ۱۰۲۹، ۱۰۳۱، ۱۰۳۳، ۱۰۳۵، ۱۰۳۷، ۱۰۳۹، ۱۰۴۱، ۱۰۴۳، ۱۰۴۵، ۱۰۴۷، ۱۰۴۹، ۱۰۵۱، ۱۰۵۳، ۱۰۵۵، ۱۰۵۷، ۱۰۵۹، ۱۰۶۱، ۱۰۶۳، ۱۰۶۵، ۱۰۶۷، ۱۰۶۹، ۱۰۷۱، ۱۰۷۳، ۱۰۷۵، ۱۰۷۷، ۱۰۷۹، ۱۰۸۱، ۱۰۸۳، ۱۰۸۵، ۱۰۸۷، ۱۰۸۹، ۱۰۹۱، ۱۰۹۳، ۱۰۹۵، ۱۰۹۷، ۱۰۹۹، ۱۱۰۱، ۱۱۰۳، ۱۱۰۵، ۱۱۰۷، ۱۱۰۹، ۱۱۱۱، ۱۱۱۳، ۱۱۱۵، ۱۱۱۷، ۱۱۱۹، ۱۱۲۱، ۱۱۲۳، ۱۱۲۵، ۱۱۲۷، ۱۱۲۹، ۱۱۳۱، ۱۱۳۳، ۱۱۳۵، ۱۱۳۷، ۱۱۳۹، ۱۱۴۱، ۱۱۴۳، ۱۱۴۵، ۱۱۴۷، ۱۱۴۹، ۱۱۵۱، ۱۱۵۳، ۱۱۵۵، ۱۱۵۷، ۱۱۵۹، ۱۱۶۱، ۱۱۶۳، ۱۱۶۵، ۱۱۶۷، ۱۱۶۹، ۱۱۷۱، ۱۱۷۳، ۱۱۷۵، ۱۱۷۷، ۱۱۷۹، ۱۱۸۱، ۱۱۸۳، ۱۱۸۵، ۱۱۸۷، ۱۱۸۹، ۱۱۹۱، ۱۱۹۳، ۱۱۹۵، ۱۱۹۷، ۱۱۹۹، ۱۲۰۱، ۱۲۰۳، ۱۲۰۵، ۱۲۰۷، ۱۲۰۹، ۱۲۱۱، ۱۲۱۳، ۱۲۱۵، ۱۲۱۷، ۱۲۱۹، ۱۲۲۱، ۱۲۲۳، ۱۲۲۵، ۱۲۲۷، ۱۲۲۹، ۱۲۳۱، ۱۲۳۳، ۱۲۳۵، ۱۲۳۷، ۱۲۳۹، ۱۲۴۱، ۱۲۴۳، ۱۲۴۵، ۱۲۴۷، ۱۲۴۹، ۱۲۵۱، ۱۲۵۳، ۱۲۵۵، ۱۲۵۷، ۱۲۵۹، ۱۲۶۱، ۱۲۶۳، ۱۲۶۵، ۱۲۶۷، ۱۲۶۹، ۱۲۷۱، ۱۲۷۳، ۱۲۷۵، ۱۲۷۷، ۱۲۷۹، ۱۲۸۱، ۱۲۸۳، ۱۲۸۵، ۱۲۸۷، ۱۲۸۹، ۱۲۹۱، ۱۲۹۳، ۱۲۹۵، ۱۲۹۷، ۱۲۹۹، ۱۳۰۱، ۱۳۰۳، ۱۳۰۵، ۱۳۰۷، ۱۳۰۹، ۱۳۱۱، ۱۳۱۳، ۱۳۱۵، ۱۳۱۷، ۱۳۱۹، ۱۳۲۱، ۱۳۲۳، ۱۳۲۵، ۱۳۲۷، ۱۳۲۹، ۱۳۳۱، ۱۳۳۳، ۱۳۳۵، ۱۳۳۷، ۱۳۳۹، ۱۳۴۱، ۱۳۴۳، ۱۳۴۵، ۱۳۴۷، ۱۳۴۹، ۱۳۵۱، ۱۳۵۳، ۱۳۵۵، ۱۳۵۷، ۱۳۵۹، ۱۳۶۱، ۱۳۶۳، ۱۳۶۵، ۱۳۶۷، ۱۳۶۹، ۱۳۷۱، ۱۳۷۳، ۱۳۷۵، ۱۳۷۷، ۱۳۷۹، ۱۳۸۱، ۱۳۸۳، ۱۳۸۵، ۱۳۸۷، ۱۳۸۹، ۱۳۹۱، ۱۳۹۳، ۱۳۹۵، ۱۳۹۷، ۱۳۹۹، ۱۴۰۱، ۱۴۰۳، ۱۴۰۵، ۱۴۰۷، ۱۴۰۹، ۱۴۱۱، ۱۴۱۳، ۱۴۱۵، ۱۴۱۷، ۱۴۱۹، ۱۴۲۱، ۱۴۲۳، ۱۴۲۵، ۱۴۲۷، ۱۴۲۹، ۱۴۳۱، ۱۴۳۳، ۱۴۳۵، ۱۴۳۷، ۱۴۳۹، ۱۴۴۱، ۱۴۴۳، ۱۴۴۵، ۱۴۴۷، ۱۴۴۹، ۱۴۵۱، ۱۴۵۳، ۱۴۵۵، ۱۴۵۷، ۱۴۵۹، ۱۴۶۱، ۱۴۶۳، ۱۴۶۵، ۱۴۶۷، ۱۴۶۹، ۱۴۷۱، ۱۴۷۳، ۱۴۷۵، ۱۴۷۷، ۱۴۷۹، ۱۴۸۱، ۱۴۸۳، ۱۴۸۵، ۱۴۸۷، ۱۴۸۹، ۱۴۹۱، ۱۴۹۳، ۱۴۹۵، ۱۴۹۷، ۱۴۹۹، ۱۵۰۱، ۱۵۰۳، ۱۵۰۵، ۱۵۰۷، ۱۵۰۹، ۱۵۱۱، ۱۵۱۳، ۱۵۱۵، ۱۵۱۷، ۱۵۱۹، ۱۵۲۱، ۱۵۲۳، ۱۵۲۵، ۱۵۲۷، ۱۵۲۹، ۱۵۳۱، ۱۵۳۳، ۱۵۳۵، ۱۵۳۷، ۱۵۳۹، ۱۵۴۱، ۱۵۴۳، ۱۵۴۵، ۱۵۴۷، ۱۵۴۹، ۱۵۵۱، ۱۵۵۳، ۱۵۵۵، ۱۵۵۷، ۱۵۵۹، ۱۵۶۱، ۱۵۶۳، ۱۵۶۵، ۱۵۶۷، ۱۵۶۹، ۱۵۷۱، ۱۵۷۳، ۱۵۷۵، ۱۵۷۷، ۱۵۷۹، ۱۵۸۱، ۱۵۸۳، ۱۵۸۵، ۱۵۸۷، ۱۵۸۹، ۱۵۹۱، ۱۵۹۳، ۱۵۹۵، ۱۵۹۷، ۱۵۹۹، ۱۶۰۱، ۱۶۰۳، ۱۶۰۵، ۱۶۰۷، ۱۶۰۹، ۱۶۱۱، ۱۶۱۳، ۱۶۱۵، ۱۶۱۷، ۱۶۱۹، ۱۶۲۱، ۱۶۲۳، ۱۶۲۵، ۱۶۲۷، ۱۶۲۹، ۱۶۳۱، ۱۶۳۳، ۱۶۳۵، ۱۶۳۷، ۱۶۳۹، ۱۶۴۱، ۱۶۴۳، ۱۶۴۵، ۱۶۴۷، ۱۶۴۹، ۱۶۵۱، ۱۶۵۳، ۱۶۵۵، ۱۶۵۷، ۱۶۵۹، ۱۶۶۱، ۱۶۶۳، ۱۶۶۵، ۱۶۶۷، ۱۶۶۹، ۱۶۷۱، ۱۶۷۳، ۱۶۷۵، ۱۶۷۷، ۱۶۷۹، ۱۶۸۱، ۱۶۸۳، ۱۶۸۵، ۱۶۸۷، ۱۶۸۹، ۱۶۹۱، ۱۶۹۳، ۱۶۹۵، ۱۶۹۷، ۱۶۹۹، ۱۷۰۱، ۱۷۰۳، ۱۷۰۵، ۱۷۰۷، ۱۷۰۹، ۱۷۱۱، ۱۷۱۳، ۱۷۱۵، ۱۷۱۷، ۱۷۱۹، ۱۷۲۱، ۱۷۲۳، ۱۷۲۵، ۱۷۲۷، ۱۷۲۹، ۱۷۳۱، ۱۷۳۳، ۱۷۳۵، ۱۷۳۷، ۱۷۳۹، ۱۷۴۱، ۱۷۴۳، ۱۷۴۵، ۱۷۴۷، ۱۷۴۹، ۱۷۵۱، ۱۷۵۳، ۱۷۵۵، ۱۷۵۷، ۱۷۵۹، ۱۷۶۱، ۱۷۶۳، ۱۷۶۵، ۱۷۶۷، ۱۷۶۹، ۱۷۷۱، ۱۷۷۳، ۱۷۷۵، ۱۷۷۷، ۱۷۷۹، ۱۷۸۱، ۱۷۸۳، ۱۷۸۵، ۱۷۸۷، ۱۷۸۹، ۱۷۹۱، ۱۷۹۳، ۱۷۹۵، ۱۷۹۷، ۱۷۹۹، ۱۸۰۱، ۱۸۰۳، ۱۸۰۵، ۱۸۰۷، ۱۸۰۹، ۱۸۱۱، ۱۸۱۳، ۱۸۱۵، ۱۸۱۷، ۱۸۱۹، ۱۸۲۱، ۱۸۲۳، ۱۸۲۵، ۱۸۲۷، ۱۸۲۹، ۱۸۳۱، ۱۸۳۳، ۱۸۳۵، ۱۸۳۷، ۱۸۳۹، ۱۸۴۱، ۱۸۴۳، ۱۸۴۵، ۱۸۴۷، ۱۸۴۹، ۱۸۵۱، ۱۸۵۳، ۱۸۵۵، ۱۸۵۷، ۱۸۵۹، ۱۸۶۱، ۱۸۶۳، ۱۸۶۵، ۱۸۶۷، ۱۸۶۹، ۱۸۷۱، ۱۸۷۳، ۱۸۷۵، ۱۸۷۷، ۱۸۷۹، ۱۸۸۱، ۱۸۸۳، ۱۸۸۵، ۱۸۸۷، ۱۸۸۹، ۱۸۹۱، ۱۸۹۳، ۱۸۹۵، ۱۸۹۷، ۱۸۹۹، ۱۹۰۱، ۱۹۰۳، ۱۹۰۵، ۱۹۰۷، ۱۹۰۹، ۱۹۱۱، ۱۹۱۳، ۱۹۱۵، ۱۹۱۷، ۱۹۱۹، ۱۹۲۱، ۱۹۲۳، ۱۹۲۵، ۱۹۲۷، ۱۹۲۹، ۱۹۳۱، ۱۹۳۳، ۱۹۳۵، ۱۹۳۷، ۱۹۳۹، ۱۹۴۱، ۱۹۴۳، ۱۹۴۵، ۱۹۴۷، ۱۹۴۹، ۱۹۵۱، ۱۹۵۳، ۱۹۵۵، ۱۹۵۷، ۱۹۵۹، ۱۹۶۱، ۱۹۶۳، ۱۹۶۵، ۱۹۶۷، ۱۹۶۹، ۱۹۷۱، ۱۹۷۳، ۱۹۷۵، ۱۹۷۷، ۱۹۷۹، ۱۹۸۱، ۱۹۸۳، ۱۹۸۵، ۱۹۸۷، ۱۹۸۹، ۱۹۹۱، ۱۹۹۳، ۱۹۹۵، ۱۹۹۷، ۱۹۹۹، ۲۰۰۱، ۲۰۰۳، ۲۰۰۵، ۲۰۰۷، ۲۰۰۹، ۲۰۱۱، ۲۰۱۳، ۲۰۱۵، ۲۰۱۷، ۲۰۱۹، ۲۰۲۱، ۲۰۲۳، ۲۰۲۵، ۲۰۲۷، ۲۰۲۹، ۲۰۳۱، ۲۰۳۳، ۲۰۳۵، ۲۰۳۷، ۲۰۳۹، ۲۰۴۱، ۲۰۴۳، ۲۰۴۵، ۲۰۴۷، ۲۰۴۹، ۲۰۵۱، ۲۰۵۳، ۲۰۵۵، ۲۰۵۷، ۲۰۵۹، ۲۰۶۱، ۲۰۶۳، ۲۰۶۵، ۲۰۶۷، ۲۰۶۹، ۲۰۷۱، ۲۰۷۳، ۲۰۷۵، ۲۰۷۷، ۲۰۷۹، ۲۰۸۱، ۲۰۸۳، ۲۰۸۵، ۲۰۸۷، ۲۰۸۹، ۲۰۹۱، ۲۰۹۳، ۲۰۹۵، ۲۰۹۷، ۲۰۹۹، ۲۱۰۱، ۲۱۰۳، ۲۱۰۵، ۲۱۰۷، ۲۱۰۹، ۲۱۱۱، ۲۱۱۳، ۲۱۱۵، ۲۱۱۷، ۲۱۱۹، ۲۱۲۱، ۲۱۲۳، ۲۱۲۵، ۲۱۲۷، ۲۱۲۹، ۲۱۳۱، ۲۱۳۳، ۲۱۳۵، ۲۱۳۷، ۲۱۳۹، ۲۱۴۱، ۲۱۴۳، ۲۱۴۵، ۲۱۴۷، ۲۱۴۹، ۲۱۵۱، ۲۱۵۳، ۲۱۵۵، ۲۱۵۷، ۲۱۵۹، ۲۱۶۱، ۲۱۶۳، ۲۱۶۵، ۲۱۶۷، ۲۱۶۹، ۲۱۷۱، ۲۱۷۳، ۲۱۷۵، ۲۱۷۷، ۲۱۷۹، ۲۱۸۱، ۲۱۸۳، ۲۱۸۵، ۲۱۸۷، ۲۱۸۹، ۲۱۹۱، ۲۱۹۳، ۲۱۹۵، ۲۱۹۷، ۲۱۹۹، ۲۲۰۱، ۲۲۰۳، ۲۲۰۵، ۲۲۰۷، ۲۲۰۹، ۲۲۱۱، ۲۲۱۳، ۲۲۱۵، ۲۲۱۷، ۲۲۱۹، ۲۲۲۱، ۲۲۲۳، ۲۲۲۵، ۲۲۲۷، ۲۲۲۹، ۲۲۳۱، ۲۲۳۳، ۲۲۳۵، ۲۲۳۷، ۲۲۳۹، ۲۲۴۱، ۲۲۴۳، ۲۲۴۵، ۲۲۴۷، ۲۲۴۹،

بنابراین، جمله نهم این دنباله، برابر $\frac{4}{243}$ است.

مسئله ۷. اگر جمله n ام یک دنباله هندسی، برابر R و جمله m ام آن برابر S باشد، دنباله را مشخص کنید.
حل: با توجه به جمله عمومی دنباله هندسی:

$$\begin{cases} t_n = t_1 q^{n-1} = R \\ t_m = t_1 q^{m-1} = S \end{cases} \Rightarrow \frac{t_n}{t_m} = \frac{t_1 q^{n-1}}{t_1 q^{m-1}} = \frac{R}{S};$$

$$q^{n-m} = \frac{R}{S}$$

$$k \in \mathbb{N}, n-m = 2k : q = \pm \left(\frac{R}{S}\right)^{\frac{1}{n-m}}$$

$$n-m = 2k-1 : q = \left(\frac{R}{S}\right)^{\frac{1}{n-m}}$$

$$t_1 = \frac{R}{q^{n-1}} ; t_1 = \frac{S}{q^{m-1}}$$

واسطه‌های هندسی

در یک دنباله هندسی، جمله یا جمله‌هایی را که بین دو جمله نامتوالی قرار دارند، واسطه یا واسطه‌های هندسی بین آن دو جمله می‌نامند. به طور مثال، در دنباله $۵, ۱۰, ۲۰, ۴۰, ۸۰$ ، سه واسطه هندسی بین عددهای ۵ و ۸۰ هستند. در این صورت می‌گویند: عددهای $۱۰, ۲۰, ۴۰$ سه واسطه هندسی هستند که بین عددهای ۵ و ۸۰ درج شده‌اند.

هرگاه سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی را در نظر بگیریم، جمله وسط را به طور مطلق، واسطه هندسی بین دو جمله دیگر می‌نامند. به طور مثال، اگر بخواهیم واسطه هندسی بین دو عدد را تعیین کنیم، با فرض این که واسطه هندسی دو عدد را x بنامیم:

$$a, x, b : \frac{x}{a} = \frac{b}{x} = q ; x^2 = ab ;$$

$$x = \pm \sqrt{ab} \quad (ab \geq 0)$$

درج و واسطه‌های هندسی بین دو عدد

مقصود از درج m واسطه هندسی بین دو عدد معلوم a و b این است که یک دنباله هندسی متناهی تشکیل دهیم که $(m+2)$ جمله داشته باشد و a و b بترتیب، جمله‌های اول و آخر آن باشند:

$$t_{m+2} = t_1 q^{m+2-1} ; b = a q^{m+1} ;$$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

دنباله هندسی (تصاعد هندسی)

دنباله‌ای است که هر جمله آن، با ضرب کردن جمله پیش از آن در عددی ثابت غیر صفر و یک، به دست می‌آید. عدد ثابت را نسبت مشترک یا «قدرنسبت» دنباله هندسی گویند.

مثال ۷. دنباله زیر، یک دنباله هندسی با قدرنسبت ۳ است:

$$1, 3, 9, 27, 81, \dots$$

تعیین جمله عمومی (جمله n ام) دنباله هندسی (تصاعد هندسی)

جمله اول دنباله را t_1 و قدرنسبت آن را q می‌نامیم. بنا به تعریف دنباله هندسی:

$$\text{جمله اول} = t_1, \text{ جمله دوم} = t_1 q = t_2,$$

$$\text{جمله سوم} = t_1 q \cdot q = t_1 q^2 = t_3, \dots$$

ملاحظه می‌شود که نمای q در هر جمله، یکی کمتر از عددی است که مرتبه آن را مشخص می‌کند (زیرا q برای نخستین بار برای تعیین جمله دوم در t_1 ضرب شده است) پس اگر عمل فوق را انجام دهیم، به طور مثال، جمله بیستم دنباله هندسی، برابر $t_1 q^{19}$ است و به طور کلی می‌توان نوشت:

$$(جمله n ام تصاعد هندسی) $t_n = t_1 q^{n-1}$ (جمله عمومی)$$

مسئله ۶. جمله ششم دنباله هندسی زیر را حساب کرده و

تعیین کنید که آیا جمله‌ای از آن هست که برابر با $\frac{4}{243}$ باشد؟

$$108, 36, 12, 4, \dots$$

حل: در این دنباله، $t_1 = 108$ و $q = \frac{36}{108} = \frac{1}{3}$ است، پس:

$$t_6 = t_1 q^{6-1} = 108 \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{4}{9}$$

اگر جمله n ام این دنباله، برابر با $\frac{4}{243}$ باشد، خواهیم داشت:

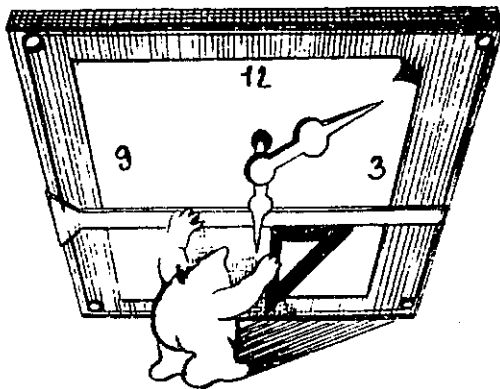
$$t_n q^{n-1} = \frac{4}{243} ; 108 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{4}{243} ;$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{4}{108 \times 243} = \left(\frac{1}{3}\right)^8 ; n-1 = 8 ; n = 9$$

حل: $S = 2$; $t_1 = 1, q = \frac{1}{2} : S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$; $S = 2$

یادداشتها:

۱. t حرف اول کلمه لاتین (term) به معنای (جمله) است.



عقره‌های ساعت شمار و دقیقه‌شمار ساعت، طی ۲۴ ساعت، چند بار زاویه قائمه تشکیل می‌دهند؟

• از کتاب تفریح اندیشه با بازبهای عددی ترجمه سیمین دخت ترکور

جواب در صفحه ۸۸

$q = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m+1}}$ (m عددی زوج باشد) ;

$q = \pm \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m+1}}$ (m عددی فرد باشد)

بنابراین، برای درج m واسطه هندسی بین a و b، کافی است

قدرنسبت: $\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{m+1}}$ را در جمله اول و سپس در جمله دوم و ...

ضرب کنیم. واسطه هندسی بین دو عدد a و b، جذر حاصلضرب a در b، با شرط $ab > 0$ است.

محاسبه مجموع n جمله دنباله هندسی

مجموع جمله‌های دنباله هندسی را به S_n نمایش می‌دهیم:

بنابراین:

$S_n = t_1 + t_1q + t_1q^2 + \dots + t_1q^{n-2} + t_1q^{n-1}$ (۱)

اگر دو طرف رابطه (۱) را در q ضرب کنیم:

$qS_n = t_1q + t_1q^2 + t_1q^3 + \dots + t_1q^{n-1} + t_1q^n$ (۲)

حال رابطه (۲) را از رابطه (۱) کم می‌کنیم:

$S_n - qS_n = t_1 - t_1q^n$;

$S_n(1 - q) = t_1(1 - q^n)$;

$S_n = \frac{t_1(1 - q^n)}{(1 - q)}$ ($q \neq 1$)

مثال ۸. مجموع n جمله دنباله هندسی $1, 2, 4, 8, \dots, 2^{n-1}$

برابر $S_n = \frac{1(1 - 2^n)}{1 - 2}$ یا $S_n = 2^n - 1$ است.

وقتی که $|q| < 1$ و n بزرگترین عدد طبیعی فرض شود، دنباله

هندسی نامتناهی است و مجموع جمله‌های آن (S) از رابطه زیر

به دست می‌آید:

(مجموع جمله‌های دنباله هندسی نامتناهی) $S = \frac{t_1}{1 - q} : |q| < 1$

مثال ۹. مجموع جمله‌های دنباله هندسی نامتناهی

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ را بیابید.