دنباله‌های عددی

تعریف دنباله

برد تابعی مانند $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ ، مجموعه‌ای از عددهای حقیقی را تولید می‌کند که اگر این عددها را پشت سر هم قرار دهیم، به آن یک «دنباله»[1] می‌گویند. برای مثال، تابع $\begin{cases} f:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \\ f(n)=(-1)^n \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. بُرد این تابع مجموعه‌ی $R=\{-1,1\}$ است و دنباله‌ی زیر توسط این مجموعه تولید می‌شود:

دنباله‌ی f : $-1,1,-1,1,-1,1,\cdots$

مگر آن که دامنه‌ی آن زیر مجموعه‌ی متناهی از ($\mathbb{N}$) باشد.

مثال: جمله‌های دنباله‌ی $f(n)=\frac{1}{n}$ عبارت‌اند از:

$$a_1=1\ ,\ a_2=\frac{1}{2}\ ,\ a_3=\frac{1}{3}\ ,\ \cdots,a_n=\frac{1}{n}\ ,\cdots$$

حد دنباله

دنباله‌ی نامتناهی $\{a_n\}$ وقتی دارای حد است که وقتی $n\to\infty$ جمله‌ی عمومی آن به سمت عدد حقیقی l میل کند $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l)$. و یا به ازای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند $M\in\mathbb{N}$ موجود باشد؛ به قسمی که به ازای $n\geq M$ داشته باشیم:

$|a_n - L| < \varepsilon$. در حالت خاص، a_n را وقتی بی‌نهایت کوچک می‌گویند که: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. دنباله‌ای که حد داشته باشد، «همگرا»ست و در غیر این صورت، دنباله را «واگرا» می‌گویند.

حد نامتناهی

نماد $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ یعنی:

$$\forall N > 0, \exists M \in \mathbb{N}: n \ge M \Rightarrow |a_n| > N$$

هرگاه حد دنباله‌ی $\{a_n\}$ نامتناهی باشد، $|a_n|$ را بی‌نهایت بزرگ می‌گویند. یادآوری می‌شود که نماد $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ ، یک نماد سمبلیک است؛ زیرا مفهوم حد با نماد ∞ نه تنها سازگار نیست، بلکه متناقض نیز هست.

چند نکته درباره‌ی حد دنباله

فرض می‌کنیم: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ و $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$ و L_1 و $L_2 \in \mathbb{R}$.

داریم:

۱. $a_n \le b_n \Rightarrow L_1 \le L_2$

۲. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = L_1 \pm L_2$

۳. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n . b_n) = L_1 . L_2$

۴. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2} \quad b_n, L_2 \neq 0$

۵. اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا و دنباله‌ی $\{b_n\}$ واگرا باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $\{a_n + b_n\}$ واگرا ولی دنباله‌ی $\{a_n . b_n\}$ ممکن است همگرا یا واگرا باشد.

مثال: دنباله‌ی همگرای $\{a_n\} = \left\{\frac{2n}{n^2 - 1}\right\}$ و دنباله‌ی واگرای $\{b_n\} = \left\{\frac{n^2+1}{3n}\right\}$ را درنظر می‌گیریم. دنباله‌ی $\{a_n + b_n\} = \left\{\frac{n^4 + 6n^2 - 1}{3n^3 - 3n}\right\}$ واگرا و دنباله‌ی $\{a_n . b_n\} = \left\{\frac{2(n^2+1)}{3(n^2-1)}\right\}$ همگراست.

۶. اگر دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ واگرا باشند، در مورد همگرایی یا واگرایی دنباله‌های: $\{a_n + b_n\}$ و $\{a_n . b_n\}$ نمی‌توان قضاوت کرد.

مثال: دنباله‌های $\{a_n\} = \{1 - (-1)^n\}$ و $\{b_n\} = \{1 + (-1)^n\}$ واگرا، ولی دنباله‌های $\{a_n + b_n\}$ و $\{a_n . b_n\}$ همگرا هستند.

هم‌چنین دنباله‌های $\{a_n\} = \left\{\frac{n^2}{n+4}\right\}$ و $\{b_n\} = \left\{\frac{n^2}{3-n}\right\}$ واگرا هستند، ولی دنباله‌ی $\{a_n + b_n\}$ همگرا و دنباله‌ی $\{a_n . b_n\}$ واگراست.

۷. اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ و $\{b_n\}$ دنباله‌ی نامشخصی باشد، آن‌گاه همواره نمی‌توان نتیجه گرفت: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n . b_n = 0$.

مثال: دنباله‌های $\{a_n\} = \left\{\sin\frac{\pi}{2}\right\}$ و $\{b_n\} = \left\{\frac{n}{2}\right\}$ را درنظر می‌گیریم. داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n . b_n = \frac{\pi}{2} . \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi/n)}{(\pi/n)} = \frac{\pi}{2}$$

۸. هرگاه $a_n . b_n = 0$ باشد، آن‌گاه همواره نمی‌توان نتیجه گرفت که: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ یا $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

مثال: دنباله‌های $\{a_n\} = \left\{\frac{1 + (-1)^n}{3}\right\}$ و $\{b_n\} = \left\{\frac{1 - (-1)^n}{2}\right\}$ را درنظر بگیرید.

۹. هرگاه $\{A_n\} = \{L + a_n\}$ و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ (a_n بی‌نهایت کوچک باشد)، آن‌گاه: $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = L$.

مثال: تحقیق کنید: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

حل:

$$\sqrt[n]{n} = 1 + a_n \Rightarrow n = (1 + a_n)^n$$

$$\Rightarrow n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2!} a_n^2 + \cdots + a_n^n$$

به‌ازای $n > 1$ ، همه‌ی جمله‌های بسط بالا مثبت هستند. پس داریم:

$$n > 1 + \frac{n(n-1)}{2} . a_n^2 \text{ یا } n - 1 > \frac{n(n-1)}{2} . a_n^2 \Rightarrow a_n < \sqrt{\frac{2}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

تمرین

الف) بزرگ‌ترین جمله‌ی دنباله‌های زیر را معین کنید.

۱. $\{a_n\} = \left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}$

۲. $\{a_n\} = \left\{\frac{\sqrt{n}}{100 + n}\right\}$

۳. $\{a_n\} = \left\{\frac{1000^n}{n!}\right\}$

ب) کوچک‌ترین جمله‌ی دنباله‌های زیر را معین کنید.

۴. $\{a_n\} = \{n^2 - 9n - 100\}$

۵. $\{a_n\} = \left\{n + \frac{100}{n}\right\}$

ج) با استفاده از تعریف حد دنباله (تعیین $M(\varepsilon)$ برای هر $\varepsilon > 0$)، ثابت کنید حد دنباله‌های زیر برابر صفر است (یعنی بی نهایت کوچک هستند).

۶. $\{a_n\} = \{(-1)^n (0/999)^n\}$

۷. $\{a_n\} = \left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$

۸. $\{a_n\} = \left\{\frac{2n}{n^3+1}\right\}$

۹. $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n!}\right\}$

د) با استفاده از تعریف حد نامتناهی دنباله (تعیین $M(N)$ برای هر عدد $N > 0$)، ثابت کنید دنباله‌های زیر حد نامتناهی دارند (یعنی بی‌نهایت بزرگ هستند).

۱۰. $\{a_n\} = \{2^{\sqrt{n}}\}$

۱۱. $\{a_n\} = \{\log\log n\}\ ,\ n \geq 2$

هـ) حاصل عبارت‌های زیر را بنویسید $(n \in \mathbb{N})$.

۱۲. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$

۱۳. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

۱۴. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + (3)^{n+1}}$

۱۵. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+a+\cdots+a^n}{1+b+\cdots+b^n}\ ,\ |a|,|b| < 1$

۱۶. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$

راهنمایی و جواب تمرین‌ها

۱. a_k وقتی بزرگ‌ترین جمله‌ی دنباله است که داشته باشیم:

$$a_k - a_{k-1} > 0 \Rightarrow 1 \leq k < 2+\sqrt{2}\ ,\ a_k - a_{k+1} > 0$$
$$\Rightarrow k > 1+\sqrt{2} \Rightarrow 1+\sqrt{2} < k < 2+\sqrt{2}\ ,\ k \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow k = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{9}{8}$$ بزرگ‌ترین جمله

۲. $$(a_k)^2 - (a_{k-1})^2 > 0 \Rightarrow 1 \leq k < \frac{1+\sqrt{40001}}{2}$$
$$(a_k)^2 - (a_{k+1})^2 > 0 \Rightarrow k > \frac{-1+\sqrt{40001}}{2}$$
$$\Rightarrow k = 100\ ,\ a_{100} = \frac{1}{20}$$

۳. $$a_{1000} = \frac{1000^{1000}}{1000!}$$

۴. $$a_k - a_{k-1} < 0\ ,\ a_k - a_{k+1} < 0 \Rightarrow a_4 = a_5 = -120$$

۵. $a_{10} = 20$

۶. $$\varepsilon > 0\ ,\ |a_n| < \varepsilon \Rightarrow n\log(0/999) < \log\varepsilon$$
$$\log(0/999) < 0\ ,\ 0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow \log\varepsilon < 0$$
$$n > \frac{\log\varepsilon}{\log(0/999)}\ ,\ \frac{1}{\log(0/999)} \approx -2301$$
$$\Rightarrow M > 2301\left\lfloor \log\frac{1}{\varepsilon}\right\rfloor$$
$$\forall\varepsilon > 0 \exists \in \mathbb{N} : n \geq M \Rightarrow |a_n| < \varepsilon$$

۷. $$M > \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor$$

۸. $$M > \left\lfloor \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \right\rfloor$$

۹. به آسانی می‌توان ثابت کرد: $n! \geq 2^n\ ,\ n > 1$ و $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n! \geq 2^{n-1}$.

$$\varepsilon > 0\ ,\ \frac{1}{n!} < \varepsilon \Rightarrow n! \geq 2^{n-1} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow M > 1 + \left\lfloor \frac{\log(1/4)}{\log 2} \right\rfloor$$

۱۰. $$N > 0\ ,\ a_n > N \Rightarrow 2^{\sqrt{n}} > N \Rightarrow \sqrt{n} > \frac{\log N}{\log 2}$$
$$\Rightarrow M > \left\lfloor \left(\frac{\log N}{\log 2}\right)^2 \right\rfloor$$
$$\Rightarrow \forall N > 0, \exists M \in N : n \geq M \Rightarrow a_n > N$$

۱۱. $M \geq 10^{10^N}$

۱۲. $$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n!)}{n^{1/3} + \frac{1}{n^{2/3}}} = 0$$

۱۳. $$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

۱۴. $$L = \lim_{n\to\infty} \frac{(-2/3)^n + 1}{-2\times(-2/3)^n + 3} = \frac{1}{3}$$

۱۵. $$L = \frac{1-b}{1-a}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^n}{1-b^n}\ ,\ \lim_{n\to\infty} a^n = \lim_{n\to\infty} b^n = 0 \Rightarrow L = 1$$

۱۶. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = 1$$
$$\Rightarrow L = \lim_{n\to\infty} 2^{1/2} \times 2^{1/2^2} \times \cdots \times 2^{1/2^n} = 2$$

1. Sequence