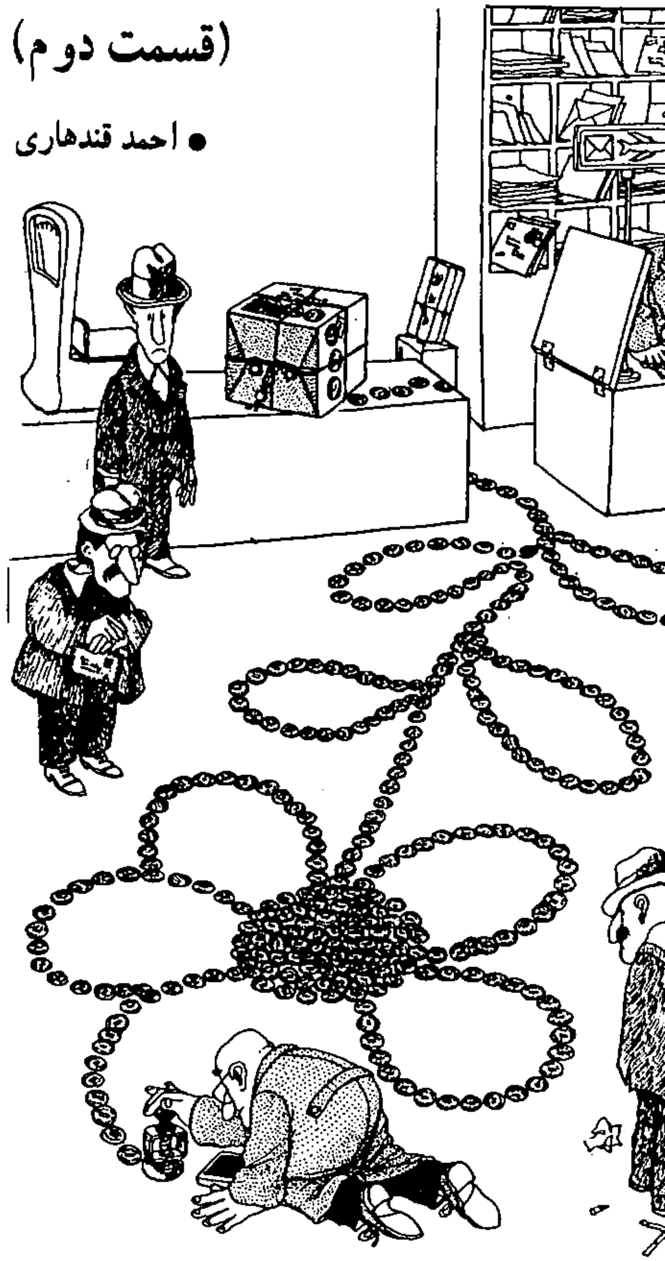
دنباله

(قسمت دوم)

• احمد قندهاری



دنباله‌ها یکی از مفاهیم اساسی آنالیز است. زیرا دنباله‌ها تابعهای ساده‌ای هستند که دامنه تعریف (حوزه تعریف) آنها مجموعه اعداد طبیعی یا قطعه‌ای از آن و برد آن‌ها زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است، این تابعهای ساده می‌توانند مفهوم حدّ را دقیقاً نشان دهند.

تابع a با ضابطه $\begin{cases} a(n)=2n-5 \\ N\to R \end{cases}$ ، $n\in N$ را در نظر می‌گیریم.

در این تابع می‌توان نوشت.

$a_1=-3$

$a_2=-1$

$a_3=1$

$a_4=3$

$a_n=2n-5$

....

ملاحظه می‌کنیم که مجموعه $n\in N$ ، $\{-3,-1,1,3,\ldots,2n-5,\ldots\}$ برد این تابع است.

اعداد بی‌پایان $-3,-1,1,3,\ldots,2n-5,\ldots$ را یک دنباله نامتناهی گوییم، به‌طوری که قبلاً گفته شد، یک دنبالهٔ نامتناهی، مجموعه برد تابعی است که دامنه آن مجموعه N و برد آن زیر مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد.

تابع a با ضابطهٔ $\begin{cases} a(n)=\frac{1}{n} \\ N\to R \end{cases}$ ، $n\in N$ را در نظر می‌گیریم.

برد این تابع مجموعه $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots\right\}$ ، $n\in N$ است.

اعداد $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots,\frac{1}{n},\ldots$ را یک دنباله نامتناهی گوییم. همان طوری که قبلاً گفته شد. اگر دامنه تعریف این گونه تابعها، قطعه‌ای از مجموعهٔ N باشد، آن گاه برد تابع یک دنباله متناهی خواهد شد. مثلاً تابع با ضابطه

$$\begin{cases} a(n)=2n+5 \\ N\to R\ ,\ n\in N\ ,\ n<63 \end{cases}$$

برد این تابع مجموعهٔ $\{7,9,11,\ldots,129\}$ است، اعداد $7,9,11,\ldots,129$ را یک دنباله متناهی گوییم.

پس به طور خلاصه:

برد تابع a از N به R را یک دنباله نامتناهی گوییم.

مانند توابع زیر $n\in N$

۱) $\begin{cases} a(n)=5n-1 \\ N\to R \end{cases}$

۲) $\begin{cases} a(n)=2n+3 \\ N\to R \end{cases}$

۳) $\begin{cases} a(n)=\dfrac{n}{n+۴} \\ N \to R \end{cases}$

۴) $\begin{cases} a(n)=\sqrt{n(n+۱)} \\ N \to R \end{cases}$

توجه: از این به بعد هر جا دنباله‌ای مطرح می‌شود، منظور دنباله نامتناهی است مگر آن که قید متناهی بیان شود.

تابع a با ضابطه $\begin{cases} a(n)=\dfrac{n+۱}{۲n-۱} \\ N \to R \end{cases}$ $n \in N$ را در نظر می‌گیریم.

در این تابع داریم :

$a_۱=\dfrac{۲}{۱}=۲$

$a_۲=\dfrac{۳}{۳}=۱$

$a_۳=\dfrac{۴}{۵}$

....

$a_n=\dfrac{n+۱}{۲n-۱}$

....

قبلاً گفتیم که جمله اول دنباله را با $a_۱$ و جمله دوم دنباله را با $a_۲$ و جمله سوم دنباله را با $a_۳$ و ... و جمله (n)ام دنباله را با a_n نشان می‌دهیم و ... و این دنباله را چنین نشان می‌دهیم. $a_۱,a_۲,a_۳,\dots,a_n,\dots$ سه نقطه‌ای که بعد از a_n در اعداد بالا نوشتیم، به این منظور است که تعداد جملات این دنباله نامتناهی است.

قبلاً گفتیم جمله عمومی دنباله را با a_n و خود دنباله را با نماد $\{a_n\}$ نشان می‌دهیم پس می‌توان نوشت :

$\{a_n\}=۲,۱,\dfrac{۴}{۵},\dots,\dfrac{n+۱}{۲n-۱},\dots$

مثال: تصاعد عددی نوعی دنباله است، مانند تصاعد عددی زیر :

$$\begin{cases} a_۱=۵ \\ d=۷ \end{cases} \Rightarrow a_n=a_۱+(n-۱)d=۵+(n-۱)\times ۷=۷n-۲$$

اعداد $۵,۱۲,۱۹,\dots,۷n-۲,\dots$ را یک دنباله گوییم.

مثال: تصاعد هندسی نوعی دنباله است، مانند تصاعد هندسی زیر :

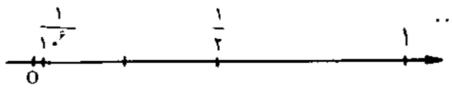
$$\begin{cases} a_۱=۳ \\ q=\dfrac{۱}{۲} \end{cases} \Rightarrow a_q=a_۱q^{n-۱}=۳(\frac{۱}{۲})^{n-۱}=\frac{۳}{۲^{n-۱}}$$

در نتیجه اعداد $۳,\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۴},\dots,\frac{۳}{۲^{n-۱}},\dots$ یک دنباله است.

تابع a با ضابطه $\begin{cases} a(n)=\dfrac{۱}{n} \\ N \to R \end{cases}$, $n \in N$ را در نظر می‌گیریم :

$\{a_n\}=۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\dots\frac{۱}{n},\dots$

جملات این دنباله به تدریج به عدد صفر نزدیک می‌شود، یعنی هر چه n بزرگتر باشد جمله nامی به صفر نزدیکتر است. مسلماً تمام جملات دنباله به صفر خیلی نزدیک نیست مثلاً اگر $n>۱۰$، آن گاه $a_n<\frac{۱}{۱۰}$، اگر $n>۱۰۰$، $a_n<\frac{۱}{۱۰۰}$ اگر $n=۱۰^۶$ ، آنگاه : $a_n<\frac{۱}{۱۰^۶}$ یعنی $a_n<\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰}$ می‌توان گفت اگر ۱۰۰۰۰۰۰ جملات اولیه این دنباله را کنار بگذاریم، بقیه جملات دنباله که تعدادشان نامتناهی است، همگی در بازه $I=(۰,\frac{۱}{۱۰^۶})$ قــرار دارند یعنی $a_{۱۰^۶+۱}\in I$ و $a_{۱۰^۶+۲}\in I$ و $a_{۱۰^۶+۳}\in I$ و ...



در اینجا می‌گوییم وقتی n بزرگ و بزرگتر شود مثلاً اگر $n>۱۰^۶$ ، آنگاه $۰<a_n<\frac{۱}{۱۰^۶}$ و اگـــــر $n>۱۰^{۶۰}$، آنگاه $۰<a_n<\frac{۱}{۱۰^{۶۰}}$.

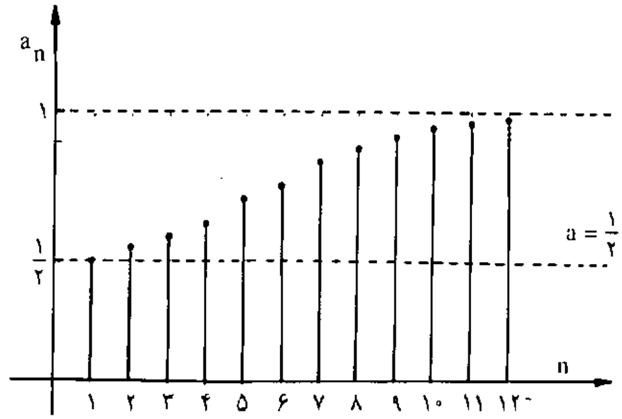
ملاحظه می‌کنیم وقتی n از عدد بزرگی مانند $۱۰^{۶۰}$ بزرگتر شود، بقیه جملات دنباله که تعدادشان بی‌نهایت است در بازه $(۰,\frac{۱}{۱۰^{۶۰}})$ قرار می‌گیرند و عدد $\frac{۱}{۱۰^{۶۰}}$ خیلی خیلی به صفر نزدیک می‌شود و در اینجا می‌گوییم حدّ دنباله صفر است.

مثال: تابع a با ضابطه $\begin{cases} a(n)=\dfrac{n}{n+۱} \\ N \to R \end{cases}$, $n \in N$ را در نظر می‌گیریم. می‌توان نوشت:

$a_۱=\frac{۱}{۲}$, $a_۲=\frac{۲}{۳}$, $a_۳=\frac{۳}{۴}$, $a_۴=\frac{۴}{۵}$, $a_۵=\frac{۵}{۶}$,
$a_۶=\frac{۶}{۷}$, $a_۷=\frac{۷}{۸}$, $a_۸=\frac{۸}{۹}$, $a_۹=\frac{۹}{۱۰}$, $a_{۱۰}=\frac{۱۰}{۱۱}$,
$a_{۱۱}=\frac{۱۱}{۱۲}$, $a_{۱۲}=\frac{۱۲}{۱۳}$, ...

و می‌دانیم که اعداد $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\dots,\frac{n}{n+1},\dots$ را یک دنباله می‌نامیم و می‌توان آن را به صورت زوج مرتب $\left\{(1,\frac{1}{2}),(2,\frac{2}{3}),(3,\frac{3}{4}),\dots\right\}$ نشان داد.

حال نمودار این تابع را رسم می‌کنیم.



در این نمودار ملاحظه می‌کنیم، هر قدر n بزرگتر شود، جملات دنباله به عدد (۱) نزدیکتر می‌شوند. می‌توانیم a_n را به عدد (۱) خیلی نزدیک کنیم به شرطی که عدد (n) را به اندازه کافی بزرگ اختیار کنیم.

مثلاً اگر $n=100$، آنگاه $a_{100}=\frac{100}{101}=0/990099$ و اگر $n=500$، آنگاه $a_{500}=\frac{500}{501}=0/9980039$ و اگر $n=1000$، آنگاه $a_{1000}=\frac{1000}{1001}=0/9990009$ خواهد شد. از این نوشته‌ها دو نتیجه می‌گیریم.

نتیجه اول: می‌توان گفت؛ اگر $n>100$، آنگاه بقیه جملات دنباله نزدیک عدد (۱) تجمع می‌کنند یا بقیه جملات دنباله در همسایگی عدد (۱) گرد هم می‌آیند. در این شرایط می‌گوییم این دنباله در عدد (۱) همگرا است.

نتیجه دوم: بیان دیگر نتیجه اول است و می‌توان گفت؛ حد دنباله عدد (۱) است و می‌نویسیم؛ $n\in N$ و

$$\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\right.$$

در این دنباله، همه جملات از عدد (۱) کوچکترند. اکنون می‌خواهیم a_n را به اندازه‌ای به عدد (۱) نزدیک کنیم تا اختلاف بین عدد (۱) و a_n از $\frac{1}{1000}$ کمتر باشد یعنی $1-a_n<\frac{1}{1000}$، در این صورت (n) را چه عددی باید انتخاب کنیم؟

به ترتیب زیر می‌نویسیم:

$$1-a_n<\frac{1}{1000}\Rightarrow 1-\frac{n}{n+1}<\frac{1}{1000}\Rightarrow\frac{n+1-n}{n+1}<\frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{n+1}<\frac{1}{1000}\Rightarrow n+1>1000\Rightarrow n>999\Rightarrow n\ge 1000$$

پس اگر $n\ge 1000$ انتخاب شود، آنگاه a_n به قدری به عدد (۱) نزدیک می‌شود که $1-a_n<\frac{1}{1000}$.

می‌دانیم (ε) عدد مثبت کوچکی است، حال اگر بخواهیم a_n را به عدد (۱) به قدری نزدیک کنیم تا $1-a_n<\varepsilon$، در این صورت (n) را چه عددی باید انتخاب کنیم. نظیر عملیات قبل را تکرار می‌کنیم.

$$1-a_n<\varepsilon\Rightarrow 1-\frac{n}{n+1}<\varepsilon\Rightarrow\frac{n+1-n}{n+1}<\varepsilon\Rightarrow\frac{1}{n+1}<\varepsilon$$

$$\Rightarrow n+1>\frac{1}{\varepsilon}\Rightarrow n>\frac{1}{\varepsilon}-1$$

می‌دانیم $\varepsilon>0$، ممکن است عدد $(\frac{1}{\varepsilon}-1)$ عددی اعشاری باشد مسلماً عدد $[\frac{1}{\varepsilon}-1]$ ([ ] نماد جزء صحیح است[1]) عدد صحیح است که ممکن است کوچکتر از $(\frac{1}{\varepsilon}-1)$ باشد ولی عدد $[\frac{1}{\varepsilon}]=[\frac{1}{\varepsilon}-1]+1$ بزرگتر از $(\frac{1}{\varepsilon}-1)$ است.

اگر $M\in N$ و $M=[\frac{1}{\varepsilon}]$ آن گاه می‌توان نوشت:

$$n>M\Rightarrow 1-a_n<\varepsilon$$

پس می‌توان گفت؛ برای هر $\varepsilon>0$ عددی مانند $M\in N$ وجود دارد که:

$$n>M\Rightarrow 1-a_n<\varepsilon$$

حال می‌گوییم حدّ این دنباله عدد (۱) است و می‌نویسیم:

$$\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\right.$$

در این صورت می‌گوییم دنباله $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ به عدد (۱) همگرا است.

توجه کنید دنباله‌ای را همگرا گوییم که حدّ جمله عمومی آن وقتی $n\to\infty$ برابر عددی مانند $L\in R$ باشد بعداً به‌صورت دقیق‌تر همگرایی تعریف می‌شود.

حال دنباله زیر را در نظر می‌گیریم :

$$\{a_n\} = ۲, \frac{۳}{۲}, \frac{۴}{۳}, \ldots, \frac{n+۱}{n}, \ldots$$

جمله عمومی این دنباله $a_n = \frac{n+۱}{n}$

$$n = ۱۰ \Rightarrow a_{۱۰} = \frac{۱۱}{۱۰} = ۱/۱$$

$$n = ۵۰ \Rightarrow a_{۵۰} = \frac{۵۱}{۵۰} = ۱/۰۲$$

$$n = ۱۰۰ \Rightarrow a_{۱۰۰} = \frac{۱۰۱}{۱۰۰} = ۱/۰۱$$

$$n = ۱۰۰۰ \Rightarrow a_{۱۰۰۰} = \frac{۱۰۰۰}{۱۰۰۱} = ۱/۰۰۱$$

حدس می‌زنیم که حدّ این دنباله نیز عدد (۱) است. حال ثابت می‌کنیم که این حدس درست است، جملات این دنباله همگی از عدد (۱) بزرگترند.

می‌خواهیم a_n را به عدد (۱) آن قدر نزدیک کنیم تا $a_n - ۱ < \varepsilon$ ، در این صورت n را چه عددی باید انتخاب کنیم؟ می‌نویسیم :

$$a_n - ۱ < \varepsilon \Rightarrow \frac{n+۱}{n} - ۱ < \varepsilon \Rightarrow \frac{n+۱-n}{n} < \varepsilon$$

$\Rightarrow \frac{۱}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{۱}{\varepsilon} \Rightarrow$ اگـــر $M \in N\ ,\ M = [\frac{۱}{\varepsilon}] + ۱$

می‌توان گفت : برای هر $\varepsilon > ۰$ عددی طبیعی مانند M وجود دارد که $n > M \Rightarrow a_n - ۱ < \varepsilon$

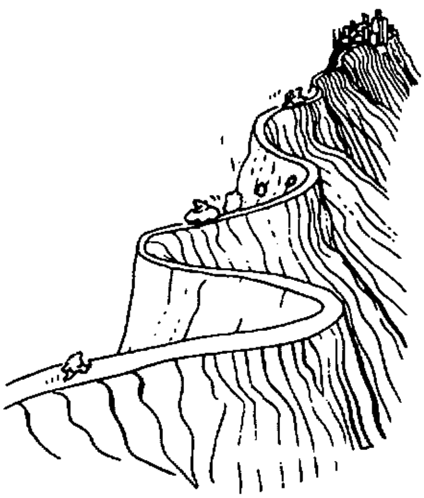
۱ــ نماد [x] را متأسفانه در بعضی از کتابها (براکت x) نوشته‌اند در حالی که براکت به معنی پرانتز یا کروشه است عبارت (جزء صحیح) هم فارسی است و هم مفهوم ریاضی را می‌رساند.

تفریح اندیشه ۲

مهرداد، علی و کیوان در یک زمان و از یک محلّ حرکت می‌کنند تا به شهری واقع در ۸ کیلومتری آنجا برسند.

مهرداد پیاده می‌رود و علی، کیوان را با اتومبیلش می‌برد. پس از مدتی کیوان از اتومبیل پیاده می‌شود و بقیهٔ راه را پیاده طی می‌کند، آن‌گاه علی به طرف مهرداد برمی‌گردد و او را سوار اتومبیل می‌کند و به شهر می‌رساند. هر سه دوست در یک زمان به مقصد می‌رسند.

مهرداد و کیوان در پیاده روی سرعتی یکسان برابر ۶ کیلومتر در ساعت دارند، و اتومبیل هم با سرعت ثابت ۳۰ کیلومتر در ساعت راه را طی کرده‌است. این مسافرت چند ساعت به طول انجامیده است؟



● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکپور

جواب در صفحهٔ ۸۸