دنباله[۱]

قسمت اوّل

(برای دانش‌آموزان دورهٔ پیش‌دانشگاهی، ریاضی و تجربی)

● احمد قندهاری

۱ ــ در یک مسابقه وزنه‌برداری، در حرکت دوضرب، ۸ نفر شرکت داشتند، و نفرات اوّل تا هشتم توانستند به ترتیب وزنه‌های زیر را بلند کنند.

نفرات	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
مقدار وزنه برحسب کیلوگرم	۲۱۰	۲۱۵	۲۰۰	۲۲۰	۲۲۵	۲۴۰	۲۳۰	۲۳۷/۵

این جدول، گویای این نتیجه است که مثلاً نفر اول ۲۱۰ کیلوگرم و نفر دوم ۲۱۵ کیلوگرم و نفر سوم ۲۰۰ کیلوگرم ... وزنه را توانستند بلند کنند.

برای پیداکردن نتایج بهتر، جدول بالا را به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتب نشان می‌دهیم :

$\{(۱,۲۱۰),(۲,۲۱۵),(۳,۲۰۰),(۴,۲۲۰),(۵,۲۲۵),(۶,۲۴۰),(۷,۲۳۰),(۸,۲۳۷/۵)\}$

حال این پرسش را مطرح می‌کنیم، که آیا مجموعه زوج مرتب بالا، تابعی را بیان می‌کند؟ با کمی دقّت می‌بینیم که این مجموعه زوج مرتب، تابعی را نشان می‌دهد، به طوری که دامنهٔ تابع مجموعه $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ و برد تابع مجموعه $\{۲۱۰,۲۱۵,۲۰۰,۲۲۰,۲۲۵,۲۴۰,۲۳۰,۲۳۷/۵\}$ است.

اینک اعداد ۲۱۰،۲۱۵،۲۰۰،۲۲۰،۲۲۵،۲۴۰،۲۳۰،۲۳۷/۵ را یک دنباله می‌گوییم. این دنباله شامل (۸) عدد است که مربوط به ۸ نفر وزنه بردار است. هریک از وزنه‌برداران به یک عدد از دنبالهٔ بالا مربوط شده‌اند. می‌توان گفت که یک تناظر یک به یک بین وزنه‌بردارها و وزنه‌های برداشته شده توسط آنها وجود دارد. چون تعداد جمله‌های این دنباله ۸ تاست، لذا به آن دنبالهٔ متناهی می‌گوییم. چنانچه تعداد جمله‌های یک دنباله، بی‌شمار باشد، آن را دنباله نامتناهی می‌گوییم. برای شناخت بهتر دنباله‌ها به مطالب زیر توجه کنید :

تعریف ۱: مجموعهٔ $N_K=\{۱,۲,۳,...,k\}, k\in N$ را قطعهٔ اعداد طبیعی از ۱ تا k گوییم، مثلاً مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$ را قطعهٔ اعداد طبیعی از ۱ تا ۸ می‌گوییم.

تعریف ۲: برد هر تابع تعریف شده در قطعه‌ای ازاعداد طبیعی یک دنباله متناهی (با پایان) می‌سازد برای درک بیشتر به مثالهای زیر نگاه کنید :

مثال ۱: تابع a با ضابطه $\begin{cases} a(n)=۲n \\ N\to R \end{cases} n<۹, n\in N,$ را درنظر می‌گیریم. بُرد این تابع مجموعهٔ $\{۲,۴,۶,...,۱۶\}$ است. اعداد ۱۶ و ۱۴ و ۱۲ و ۱۰ و ۸ و ۶ و ۴ و ۲ را یک دنبالهٔ متناهی می‌گوییم.

مثال ۲: تابع a با ضابطه $\begin{cases} a(n)=۵n \\ N\to R \end{cases} n<۸, n\in N,$ را

---

۱ ـ sequence

درنظر می‌گیریم. برد این تابع، مجموعهٔ $\{5,10,15,\dots,35\}$ است.

اعداد ۳۵ و ۳۰ و ۲۵ و ۲۰ و ۱۵ و ۱۰ و ۵ را یک دنباله متناهی اعداد طبیعی مضرب ۵ کوچکتر از ۴۰ می‌گوییم. حال به صورت کامل دنباله را تعریف می‌کنیم:

تعریف ۳: به مجموعه‌ای از اعداد که چنان مرتب شوند که با مجموعه عددهای طبیعی یا قطعه‌ای از آنها در تناظر یک به یک باشد، یک دنباله گفته می‌شود.

تعریف ۴: یک دنباله تابعی است که دامنه‌اش مجموعهٔ اعداد طبیعی یا قطعه‌ای از آن باشد. به هریک از مقادیر برد این تابع، یک جملهٔ دنباله گفته می‌شود. چنانچه دامنهٔ این تابع، مجموعهٔ اعداد طبیعی باشد. دنبالهٔ حاصل از آن را دنباله نامتناهی می‌گویند.

از این به بعد هرجا کلمهٔ دنباله به‌کار می‌رود، منظور دنباله نامتناهی است. حال به مثالهای زیر دقت کنید.

مثال ۱: تابع $a:N\to R$ با ضابطه $a(n)=\frac{1}{n}$ را درنظر می‌گیریم. $n\in N$ این تابع بنا به تعریف (۴) یک دنباله را بیان می‌کند؛ یعنی مقادیر بُرد این تابع، جمله‌های دنباله را تشکیل می‌دهند. با قرار دادن اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ... و n و ... در معادله تابع $a(n)=\frac{1}{n}$ جمله‌های دنباله به دست می‌آید:

$$a(1)=1,\ a(2)=\frac{1}{2},\ a(3)=\frac{1}{3},\dots,\ a(n)=\frac{1}{n},\dots$$

بنابراین، اعداد $1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{n},\dots$ را یک دنباله می‌گوییم.

توجه داشته باشید که جمله اوّل دنباله را با a_1 و جمله دوم دنباله را با a_2 و جمله سوم دنباله را با a_3،... و جمله (n) ام دنباله را با a_n نشان می‌دهیم و خود دنباله را با $\{a_n\}$ نشان می‌دهیم.

مثال۲: تابع a با ضابطه $\begin{cases}a(n)=\frac{n}{n+2}\\ N\longrightarrow R\end{cases}, n\in N$ را در نظر می‌گیریم. برد این تابع مجموعهٔ $\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\dots,\frac{n}{n+2},\dots\right\}$ است، بنابراین اعداد $\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\dots,\frac{n}{n+2},\dots$ را یک دنباله می‌گوییم.

مثال ۳: تابع a با ضابطهٔ $\begin{cases}a(n)=5^{n-1}\\ N\to R\end{cases}, n\in N$ را درنظر می‌گیریم. برد این تابع مجموعهٔ $\{1,5,25,\dots,5^{n-1},\dots\}$ است، لذا اعداد $1,5,25,\dots,5^{n-1},\dots$ را دنباله می‌گوییم.

همان‌طوری‌که در مثال ۲ گفته شد، $a_1=1$ و $a_2=5$ و $a_3=25$ و ... و $a_n=5^{n-1}$ و ... است.

۲ ــ جملهٔ عمومی دنباله: گفتیم که جمله (n)ام دنباله را با a_n نشان می‌دهیم، این جمله را جملهٔ عمومی دنباله می‌نامیم. اگر جمله عمومی یک دنباله معلوم باشد، کلیهٔ جمله‌های دنباله از روی جمله عمومی دنباله، با قرار دادن $n=1,2,3,\dots$ معلوم می‌شود.

مثال: اگر جمله عمومی دنباله‌ای به صورت $a_n=\frac{n-1}{2n+1}$، $n\in N$ باشد، آنگاه می‌توان نوشت:

$$n=1\Rightarrow a_1=0$$

$$n=2\Rightarrow a_2=\frac{1}{5}$$

$$n=3\Rightarrow a_3=\frac{2}{7}$$

$$n=4\Rightarrow a_4=\frac{3}{9}$$

$$n=5\Rightarrow a_5=\frac{4}{11}$$

در نتیجه اعداد $0,\frac{1}{5},\frac{2}{7},\frac{3}{9},\frac{4}{11},\dots,\frac{n-1}{2n+1},\dots$ را یک دنباله با جملهٔ عمومی $a_n=\frac{n-1}{2n+1}$ می‌گوییم.

توجه: گاهی، دنباله را با یک رابطه بین جمله (n)ام و جمله (n−1)ام یا با یک رابطه بین جمله (n)ام و جمله‌های پیش از آن تعریف می‌کنند. مثلاً دنباله: $a_1=3$، $a_n=a_{n-1}+3$ که در آن

$$n=1\Rightarrow a_1=3$$
$$n=2\Rightarrow a_2=a_1+3=3+3=6$$
$$n=3\Rightarrow a_3=a_2+3=6+3=9$$
$$n=4\Rightarrow a_4=a_3+3=9+3=12$$

به همین ترتیب، کلیه جمله‌های دنباله مشخص می‌شود.

رابطهٔ $a_1=3$، $a_n=a_{n-1}+3$ را رابطهٔ **بازگشت** یا رابطه **بازگشتی** می‌گویند.

دنباله: $a_1=a_2=1$ ، $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$، برای $n\ge 3$ دنباله معروف **فیبوناتچی** است. پس از این در مورد این دنباله، مطالبی خواهیم گفت.

دیدید که اگر جمله عمومی دنباله‌ای معلوم باشد یا رابطه بازگشت در یک دنباله مطرح باشد، جمله‌های دنباله از روی آنها با قراردادن $n=1,2,3,\dots$ به دست می‌آید. حال پرسش مهم زیر مطرح می‌شود:

پرسش ۱: با داشتن چند جمله اولیه یک دنباله نامتناهی، می‌توانیم جملهٔ عمومی آن را پیدا کنیم؟

پاسخ: پاسخ این پرسش گاهی مثبت و گاهی منفی است. یعنی در دست داشتن چند جمله اول یک دنبالهٔ نامتناهی، برای تعریف دنباله و تعیین جمله عمومی آن کافی نیست، زیرا در چنین مسأله‌ای باید یک دستور استقرایی ساده و سازگار با جمله‌های دنباله یافت و اگر نتوانیم چنین دستوری را بیابیم، یافتن جمله عمومی مقدور نیست. مانند دنباله عددهای اوّل و دنباله رقمهای اعشاری عدد π که در هر دو، یافتن جمله عمومی مقدور نیست.
حال به مثالهای زیر توجه کنید.

مثال۱: جمله عمومی دنباله $\frac{1}{5},\frac{3}{10},\frac{5}{15},\frac{7}{20},\dots$ را بیابید.

حل: با کمی دقّت متوجه می‌شویم که صورت این کسرها، اعداد طبیعی فرد و مخرج این کسرها مضرب‌های (۵) اعداد طبیعی است، پس ظاهراً جملهٔ عمومی این دنباله به صورت $a_n=\frac{2n-1}{5n}$ می‌تواند باشد.
حال پرسش دیگری را مطرح می‌کنیم:

پرسش۲: آیا جمله عمومی بالا تنها جمله عمومی این دنباله است؟

پاسخ: پاسخ این پرسش منفی است و می‌توان جمله‌های عمومی دیگری یافت که چهار جمله اول آن $\frac{1}{5},\frac{3}{10},\frac{5}{15},\frac{7}{20}$ باشد، مثلاً دنباله با جمله عمومی $a_n=\frac{2n-1}{5n}+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$، که چهار جمله اوّل دنباله با این جملهٔ عمومی، در واقع همان چهار جمله بالاست، زیرا:

$$n=1\Rightarrow a_1=\frac{1}{5}$$
$$n=2\Rightarrow a_2=\frac{3}{10}$$
$$n=3\Rightarrow a_3=\frac{5}{15}$$
$$n=4\Rightarrow a_4=\frac{7}{20}$$

ولی جملهٔ پنجم آن $a_5=\frac{9}{25}+24$ که با جمله پنجم دنباله با جملهٔ عمومی $a_n=\frac{2n-1}{5n}$ که مساوی $(\frac{9}{25})$ است، متفاوت است.

بنابراین اگرچند جملهٔ اولیه از یک دنباله معلوم باشد و بتوانیم جملهٔ عمومی آن را پیدا کنیم. نمی‌توان گفت که این تنها جمله عمومی به دست آمده است. دنباله می‌تواند جمله‌های عمومی دیگری هم داشته باشد، ولی در این نوع مسایل، یافتن ساده‌ترین جملهٔ عمومی مورد نظر است.

مثال ۲: چند جملهٔ اوّلیه دنباله‌ای به صورت $\frac{2}{7},\frac{5}{11},\frac{10}{15},\frac{17}{19}$ است. ساده‌ترین جمله عمومی این دنباله را بیابید.

حل: اگر با دقت، اعداد صورت کسرها را درنظر بگیریم می‌بینیم که صورت کسرها به شکل (۱+ مربع عدد آن جمله) می‌باشد، ازاینجا نتیجه می‌گیریم که صورت کسر جملهٔ عمومی، می‌تواند به شکل (n^2+1) باشد.

دربارهٔ اعداد مخرج: اعداد مخرج یک تصاعد عددی[1] می‌سازند که جمله اوّل آن ۷ و قدر نسبت آن ۴ است، پس می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}t_1=7\\ d=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_n=t_1+(n-1)d\\ t_n=7+4(n-1)\end{cases}\Rightarrow t_n=4n+3$$

پس مخرج کسر جمله عمومی، به شکل $(4n+3)$ می‌تواند باشد. در نتیجه ساده‌ترین جملهٔ عمومی دنباله فوق به شکل $a_n=\frac{n^2+1}{4n+3}$ است.

مسایل:

مسأله ۱: ده جمله اوّل دنباله فیبوناتچی را بنویسید.

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}\qquad n\geq 3$$
$$a_1=a_2=1$$
$$n=3\Rightarrow a_3=a_2+a_1=1+1=2$$
$$n=4\Rightarrow a_4=a_3+a_2=2+1=3$$
$$n=5\Rightarrow a_5=a_4+a_3=3+2=5$$
$$n=6\Rightarrow a_6=a_5+a_4=5+3=8$$
$$n=7\Rightarrow a_7=a_6+a_5=8+5=13$$

۱ـ در آینده در مورد تصاعدها بحث خواهیم کرد.

$n=8 \Rightarrow a_8 = a_7 + a_6 = 13+8 = 21$

$n=9 \Rightarrow a_9 = a_8 + a_7 = 21+13 = 34$

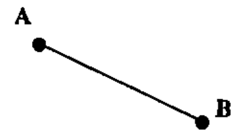
$n=10 \Rightarrow a_{10} = a_9 + a_8 = 34+21 = 55$

نتیجه : $1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\ldots$

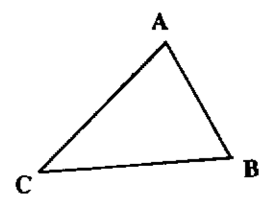
مسأله ۲ : n نقطه متمایز در یک صفحه داریم که هیچ سه نقطه آن بر یک استقامت نیستند. اگر a_n تعداد پاره‌خط‌های متمایزی باشد که این نقاط را به هم وصل می‌کند، پنج جمله اول این دنباله را بنویسید و ساده‌ترین جمله عمومی آن را بیابید.

حل: با یک نقطه پاره خط تشکیل نمی‌شود، پس : $a_1 = 0$

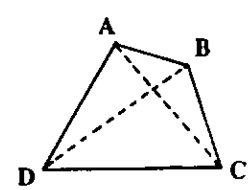
با دو نقطه یک پاره‌خط تشکیل می‌شود، پس : $a_2 = 1$



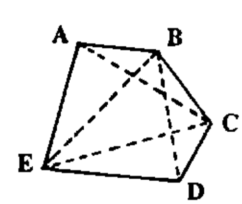
با سه نقطه غیرواقع بر یک استقامت سه پاره‌خط تشکیل می‌شود (مانند مثلث)، پس : $a_3 = 3$



با چهار نقطه که سه به سه غیرواقع بر یک استقامت باشند، شش پاره‌خط تشکیل می‌شود (چهارضلعی با دو قطر)، پس : $a_4 = 6$



با پنج نقطه که سه به سه غیرواقع بر یک استقامت باشند، ۱۰ پاره‌خط تشکیل می‌شود (پنج ضلعی محدّب با قطرهای آن)، پس : $a_5 = 10$



در نتیجه پنج جمله اوّل این دنباله عبارت است از : ۱۰ و ۶ و ۳ و ۱ و ۰.

حال می‌خواهیم جمله عمومی این دنباله را پیدا کنیم.

چون جمله اول دنباله، صفر است، بنابراین در جملهٔ عمومی باید عامل $(n-1)$ داشته باشیم با کمی دقت و بررسی متوجه می‌شویم که جمله عمومی می‌تواند به صورت $\frac{n(n-1)}{2}$ باشد.

در مورد جملهٔ عمومی این دنباله کمی بحث کنیم. اگر n تعداد اضلاع n ضلعی محدب واقع در یک صفحه باشد، می‌توان گفت که در این دنباله، اگر $n=3$ ، آن‌گاه یک مثلث تشکیل می‌شود ؛ اگر $n=4$ آن‌گاه یک چهارضلعی محدّب تشکیل می‌شود و اگر $n=5$ ، آن‌گاه یک پنج ضلعی محدب تشکیل می‌شود و در حالت کلی اگر n نقطه متمایز داشته باشیم که هیچ سه نقطه آن بر یک استقامت نباشند، یک n ضلعی محدّب تشکیل می‌شود، می‌خواهیم مجموع تعداد اضلاع و تعداد قطرهای آن را بیابیم. n ضلعی محدب دارای n ضلع و $\frac{n(n-3)}{2}$ قطر است. پس :

$$\text{مجموع اضلاع و قطرها} = n + \frac{n(n-3)}{2}$$

$$= \frac{2n+n(n-3)}{2} = \frac{n^2-n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

بنابراین مجموع تعداد کل اضلاع و قطرها در یک n ضلعی محدب $\frac{n(n-1)}{2}$ است که همان جملهٔ عمومی دنباله مورد بحث است.

مسأله ۳: دنباله با جمله عمومی $a_n n^2 - n$ مفروض است. عدد (۷۲) و عدد (۱۲۵) نسبت به جمله‌های این دنباله چه وضعی دارند؟

حل: چنین عمل می‌کنیم

$$n^2 - n = 72 \Rightarrow n^2 - n - 72 = 0$$

$$\Rightarrow (n-9)(n+8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = -8 & \text{غیرقابل قبول} \\ n = 9 \Rightarrow & \text{پس عدد (۷۲) جمله نهم این دنباله است.} \end{cases}$$

$$n^2 - n - 125 = 0 \Rightarrow n = \frac{1 \pm \sqrt{1+4(125)}}{2}$$

$$=\frac{۱\pm\sqrt{۵۰۱}}{۲}=\frac{۱\pm ۲۲/۳۸}{۲}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} n=\dfrac{۱-۲۲/۳۸}{۲}=-۱۰/۶۹ & \text{قابل قبول نیست} \\ n=\dfrac{۱+۲۲/۳۸}{۲}=۱۱/۶۹ \end{cases}$$

(۱۱/۶۹) بین (۱۱) و (۱۲) است، نتیجه می‌گیریم که عدد (۱۲۵) بین جمله‌های مرتبه یازدهم و دوازدهم است.

مسأله ۴: نخستین جمله دنباله با جمله عمومی $a_n=\frac{۲n}{n^۲+۳}$ که کوچکتر از $(\frac{۱}{۲۰})$ باشد کدام است؟

حل:

$$\frac{۲n}{n^۲+۳}<\frac{۱}{۲۰}\Rightarrow\frac{۱}{۲۰}-\frac{۲n}{n^۲+۳}>۰\Rightarrow\frac{n^۲+۳-۴۰n}{۲۰(n^۲+۳)}>۰$$

$$\Rightarrow n^۲-۴۰n+۳>۰\Rightarrow n^۲-۴۰n+۳=۰\Rightarrow$$

$n=۳۹/۹۲$ یا $n=۰/۰۸$

$\Rightarrow n^۲-۴۰n+۳>۰\Rightarrow n>۳۹/۹۲$ یا $n<۰/۰۸$

چون n عددی طبیعی است، پس $n=۴۰$ در نتیجه، جملهٔ چهلم.

زیرا $\frac{۱}{۲۰}=۰/۰۵$ $\qquad a_{۴۰}=\frac{۸۰}{۱۶۰۳}=۰/۰۴۹<\frac{۱}{۲۰}$

تمرین‌ها

۱ ــ پنج جمله اولیه دنباله $a_n=۲-۳a_{n-۱}$ با فرض $a_۱=۲$ را بنویسید.

۲ ــ دنبالهٔ $\left\{\frac{۲n-۱}{n^۲}\right\}$ مفروض است پنج جمله آن را بیابید، نمودار این پنج جمله را در صفحه محورهای مختصات نشان دهید.

۳ ــ در روی محیط دایره‌ای، n نقطه متمایز وجود دارد. دنباله تعداد وترهای متمایز را تشکیل دهید و جمله عمومی آن را بنویسید.

۴ ــ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع (۱) مفروض است. اگر وسط‌های اضلاع را به هم وصل کنیم، مثلث جدیدی حاصل می‌شود، اگر وسط‌های اضلاع مثلث جدید را به هم وصل کنیم، مثلث سومی حاصل می‌شود و این عمل را بارها تکرار می‌کنیم.

الف : دنباله محیطهای مثلثها را بنویسید.

ب : دنباله ارتفاعهای مثلثها را بنویسید.

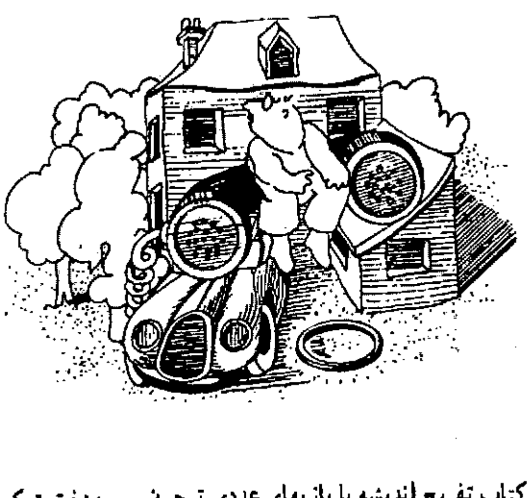
ج : دنباله مساحتهای مثلثها را بنویسید.

د : دنباله مساحتهای دایره‌های محیطی مثلثها را بنویسید.

تفریح اندیشه ۱

در شهری از هر ۱۰۰ نفر ۸۵ تن ازدواج کرده‌اند، ۷۰ نفر تلفن، ۷۵ نفر اتومبیل و ۸۰ نفر خانه دارند.

تعیین کنید در این شهر از هر صد نفر چند نفر هم ازدواج کرده‌اند و هم صاحب خانه، تلفن و اتومبیل هستند؟



● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمهٔ سیمین‌دخت ترکبور

جواب در صفحهٔ ۸۸