دسته خط

● سیامک جعفری

تعریف: مجموعه خطوط مستقیم همرس در نقطه A را دسته خط به مرکز A تعریف می‌کنند.

اگر معادلات $A_1x+B_1y+C_1=0$ و $A_2x+B_2y+C_2=0$ دو خط از دسته خط بالا باشند آنگاه معادله

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

که در آن α و β با هم صفر نیستند، خطی متعلق به دسته خط مذکور است و از A می‌گذرد. توجه کنید: اگر $\alpha\neq 0$ و $\lambda=\frac{\beta}{\alpha}$ فرض کنیم معادله بالا را می‌توان به این صورت نوشت:

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

که شامل تمام حالتهای دسته خط هست به جز وقتی $A_2x+B_2y+C_2=0$ باشد.

تذکر: با توجه به مطالب کلاسیک درباره خطوط موازی و منطبق، اگر دو معادله مفروض $A_1x+B_1y+C_1=0$ و $A_2x+B_2y+C_2=0$ طوری باشند که

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}\Rightarrow$$ دو خط موازی

$\Rightarrow$ دسته‌خط مرکز نخواهد داشت.

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\Rightarrow$$ دو خط منطبق

$\Rightarrow$ دسته خط بی‌نهایت مرکز دارد.

شیب و عرض از مبدأ دسته خط:

اگر معادله را مرتب کنیم.

$$(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y+C_1+\lambda C_2=0$$

شیب دسته خط $\quad m=-\frac{A_1+\lambda A_2}{B_1+\lambda B_2}$

عرض از مبدأ دسته خط $\quad y_0=-\frac{C_1+\lambda C_2}{B_1+\lambda B_2}$

مثال: معادله خطی را بنویسید که با خط $6x+5y+13=0$ موازی باشد و از محل تلاقی دو خط $11x+17y-19=0$ و $5x+12y-2=0$ بگذرد.

حل:

شیب دسته $\quad m=-\frac{11+5\lambda}{17+12\lambda}$

$$\rightarrow\rightarrow\rightarrow -\frac{11+5\lambda}{17+12\lambda}=-\frac{6}{5}\Rightarrow\lambda=-1$$

شیب خط اول $\quad m'=-\frac{6}{5}$

اگر این مقدار λ را در معادله دسته خط بگذاریم خط مورد نظر بدست می‌آید.

$$(11x+17y-19)-1(5x+12y-2)=0$$

خواهد شد. $\quad 6x+5y-17=0$

توجه: اگر می‌خواستیم بدون استفاده از دسته خط مسأله

را حل کنیم باید ابتدا دستگاه زیر را حل کرده سپس معادله خطی را بنویسیم که از یک نقطه می‌گذرد و شیب معلوم دارد.

$$\begin{cases}5x+12y-2=0\\ 11x+17y-19=0\end{cases}$$

مثال: دسته خط به معادلهٔ $\alpha(x-4)+\beta(x-y+4)=0$ مفروض است. مرکز این دسته خط کدام نقطه است.

a) $(8,-4)$ b) $(4,-8)$

c) $(8,4)$ d) $(4,8)$

حل:

$$\begin{cases}x-4=0 & \Rightarrow x=4\\ x-y+4=0 & \xrightarrow{\downarrow} y=8\end{cases}$$

جواب d

* می‌توان نشان داد معادله خطی که از محل تلاقی دو خط $A_1x+B_1y+C_1=0$ و $A_2x+B_2y+C_2=0$ گذشته و عمود برخط $A_3x+B_3y+C_3=0$ است خواهد شد.

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_2x+B_2y+C_2}=\frac{A_1A_3+B_1B_3}{A_2A_3+B_2B_3}$$

اثبات: معادلهٔ دسته خط را به دست آورده و شرط عمود بودن را اعمال می‌کنیم.

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

$$\Rightarrow m=-\frac{A_1+\lambda A_2}{B_1+\lambda B_2}$$

$$L_3 \text{ شیب خط } m'=-\frac{A_3}{B_3}$$

$$-\frac{A_1+A_2\lambda}{B_1+B_2\lambda}\times\left(-\frac{A_3}{B_3}\right)=-1$$

$$\Rightarrow \lambda=-\frac{A_1A_3+B_1B_3}{A_2A_3+B_2B_3}$$

که معادله خط به دست می‌آید.

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_2x+B_2y+C_2}=\frac{A_1A_3+B_1B_3}{A_2A_3+B_2B_3}$$

** اکنون معادله خطی را به دست می‌آوریم که متعلق به یک دسته خط باشد و با خط سومی موازی است.

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

شرط توازی را اعمال خواهیم کرد.

$$\begin{cases}\text{شیب دسته}=-\dfrac{A_1+\lambda A_2}{B_1+\lambda B_2}\\ \qquad\qquad\Rightarrow -\dfrac{A_1+\lambda A_2}{B_1+\lambda B_2}=-\dfrac{A_3}{B_3}\\ L_3 \text{ شیب خط}=-\dfrac{A_3}{B_3}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{A_1B_3-B_1A_3}{A_3B_2-B_3A_2}$$

خط مورد نظر خواهد شد.

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_2x+B_2y+C_2}=\frac{A_1B_3-A_3B_1}{A_2B_3-A_3B_2}$$

*** اگر معادلهٔ $Ax+By+C=0$ را به صورت $f(x,y)=0$ نمایش دهیم، آنگاه معادله دسته خط شامل دو خط $f(x,y)=0$ و $g(x,y)=0$ خواهد شد.

$$f(x,y)+\lambda g(x,y)=0$$

می‌توان نشان داد معادله خطی از دسته خط بالا که از نقطه (x_1,y_1) گذشته است به صورت زیر به دست می‌آید.

$$f(x_1,y_1)+\lambda g(x_1,y_1)=0$$

نقطه در خط صدق می‌کند.

$$\lambda=-\frac{f(x_1,y_1)}{g(x_1,y_1)}$$

خط خواهد شد.

$$\frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{f(x_1,y_1)}{g(x_1,y_1)}$$

که اگر بخواهیم روابط را باز شده بنویسیم خواهیم داشت.

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{A_2x+B_2y+C_2}=\frac{A_1x_1+B_1y_1+C_1}{A_2x_1+B_2y_1+C_2}$$

****دسته خط مزدوج (قایم)

اگر $A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$ یک دسته خط باشد. و نقطه‌ای مانند $\left|\begin{smallmatrix}x_2\\ y_2\end{smallmatrix}\right.$ باشد، معادله خطی که از این نقطه گذشته و برخطی از دسته خط بالا عمود است چنین به

دست می‌آید.

$$\begin{cases} \text{شیب دسته} = -\dfrac{A_1+\lambda A_2}{B_1+\lambda B_2} \\ \text{شیب خط} = -\dfrac{A}{B} \end{cases} \quad \xRightarrow[\text{عمود}]{\text{شرط}} -\frac{A}{B}=\frac{B_1+\lambda B_2}{A_1+\lambda A_2}$$

و خط مورد نظر خواهد شد.

$(B_1+\lambda B_2)x-(A_1+\lambda A_2)y-$

$(B_1+\lambda B_2)x_2+(A_1+\lambda A_2)y_2=0$

از آنجا که (x_1,y_1) مرکز دسته خط در معادلات خطوط اول و دوم صدق می‌کند معادله دسته خط را می‌توان چنین تبدیل کرد:

$(A_1+\lambda A_2)x+(B_1+\lambda B_2)y-(A_1+\lambda A_2)x_1-$

$(B_1+\lambda B_2)y_1=0$

با تبدیلات $A_1+\lambda A_2=a$ و $B_1+\lambda B_2=b$ خواهیم داشت.

$$\begin{cases} ax+by-ax_1-by_1=0 \\ bx-ay-bx_2+ay_2=0 \end{cases}$$

معادله $bx-ay-bx_2+ay_2=0$ یا $bx-ay+C'=0$ را دسته خط مزدوج می‌گوییم.

مثال: اگر d_2 فاصله نقطه (x_1,y_1) از خط مزدوجش، و d_1 فاصله نقطه (x_2,y_2) از دسته خط اصلی باشد ثابت کنید.

$bd_1+ad_2=\sqrt{a^2+b^2}(y_2-y_1)$

$ad_1-bd_2=\sqrt{a^2+b^2}(x_2-x_1)$

حل: اثبات این مسأله با نوشتن فرمولهای فاصله و جمع مناسب به سادگی به دست می‌آید.

مثال: دسته خط $f(x,y)+\lambda g(x,y)=0$ را در نظر بگیرید و خطی را به دست آورید که از نقطه $\left|\begin{smallmatrix}x_1\\y_1\end{smallmatrix}\right.$ گذشته و با این خط از دسته خط بالا موازی باشد. و آنرا دسته خط موازی بنامید.

حتماً تاکنون متوجه شده‌اید که این دو نقطه (x_1,y_1)، (x_2,y_2) در واقع می‌توانند دو سر قطر یک دایره باشند. خطی که (قطر دایره) دو نقطه را به هم وصل می‌کند، مزدوج ندارد.

مثال: معادله خطی را بنویسید که از دسته خطوط متعلق به معادلات $3x-2y+5=0$ و $4x+3y-1=0$ بوده و به علاوه محور عرضها را به عرض ۳- قطع کند.

حل:

$$\text{عرض از مبدأ} = -\frac{C_1+\lambda C_2}{B_1+\lambda B_2}=-3 \Rightarrow -\frac{-1+5\lambda}{3-2\lambda}=-3$$

$\Rightarrow \lambda=\frac{10}{11}$

معادله خط $\quad 4x+3y-1+\frac{10}{11}(3x-2y+5)=0$

مثال: α را طوری تعیین کنید که خط $\alpha x+5y+9=0$ متعلق به دسته خط زیر باشد.

$\alpha(5x+3y-7)+\beta(3x+10y+4)=0$

حل: دسته خط را مرتب می‌کنیم.

$(5\alpha+3\beta)x+(3\alpha+10\beta)y-7\alpha+4\beta=0$

با مقایسه با خط مورد نظر:

$$\begin{cases} 5\alpha+3\beta=\alpha \\ 3\alpha+10\beta=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha+3\beta=0 \\ 3\alpha+10\beta=5 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\frac{15}{31}$$

*** این موضوع دسته خط را می‌توان برای سه خط هم بسط داد. سه خط به معادلات

$f(x,y)=A_1x+B_1y+C_1=0$

$g(x,y)=A_2x+B_2y+C_2=0$

$h(x,y)=A_3x+B_3y+C_3=0$

در یک نقطه همرسند، اگر و تنها اگر، بتوان سه عدد ثابت λ_1، λ_2 و λ_3 پیدا کرد (که همه آنها صفر نباشند) به طوری که

$\lambda_1 f(x,y)+\lambda_2 g(x,y)+\lambda_3 h(x,y)=0$

اثبات: اگر $f(x,y)=0$ و $g(x,y)=0$ و $h(x,y)=0$ همرس باشند، هرکدام از آنها، مثلاً $f(x,y)=0$ را می‌توان یک خط از دسته خط $\alpha g(x,y)+\beta h(x,y)=0$ فرض کرد. یعنی:

$f(x,y)=\alpha g(x,y)+\beta h(x,y) \Rightarrow f-\alpha g-\beta h=0$

که همان شکل $\lambda_1 f+\lambda_2 g+\lambda_3 h=0$ است.

از طرف دیگر، اگر ثوابتی مانند λ_1، λ_2 و λ_3 باشد به گونه‌ای که $\lambda_1 f+\lambda_2 g+\lambda_3 h=0$ آنگاه $f=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}g-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}h$

که نشان می‌دهد $f(x,y)=0$ از نقطه تقاطع $g(x,y)=0$ و $h(x,y)=0$ می‌گذرد درنتیجه هر سه خط همرس می‌شوند.

مثال: ثابت کنید ارتفاعهای یک مثلث همرسند.

حل: اگر BC و CA و AB اضلاع مثلثی به معادلات $h(x,y)=0$ و $g(x,y)=0$ و $f(x,y)=0$ باشند. آنگاه $g(x,y)+\lambda h(x,y)=0$ معادله خطی است به ضریب زاویه $-\frac{A_2+\lambda A_3}{B_2+\lambda B_3}$ که از رأس A می‌گذرد. اگر این خط بر $f(x,y)=0$ عمود باشد داریم.

$$\left(-\frac{A_2+\lambda A_3}{B_2+\lambda B_3}\right)\times\left(-\frac{A_1}{B_1}\right)=-1\Rightarrow \lambda=-\frac{A_1A_2+B_1B_2}{A_3A_1+B_3B_1}$$

معادله ارتفاع AH خواهد شد.

$$g(x,y)-\frac{A_1A_2+B_1B_2}{A_3A_1+B_3B_1}.h(x,y)=0$$

به عبارت دیگر

ارتفاع AH: $k(x,y)\equiv(A_3A_1+B_3B_1)g(x,y)-(A_1A_2+B_1B_2)h(x,y)=0$

ارتفاع BH′: $k'(x,y)\equiv(A_1A_2+B_1B_2)h(x,y)-(A_2A_3+B_2B_3)f(x,y)=0$

ارتفاع CH″: $k''(x,y)\equiv(A_2A_3+B_2B_3)f(x,y)-(A_3A_1+B_3B_1)g(x,y)=0$

به سادگی مشخص است که

$$k(x,y)+k'(x,y)+k''(x,y)=0$$

که نشان می‌دهد ارتفاع‌های مثلث همرس هستند.

مثال: دو دسته خط به معادلات زیر مفروض‌اند. بدون پیدا کردن مراکز آنها معادله خطی را پیدا کنید که از مراکز هر دو دسته خط بگذرد (خطی که به هر دو دسته متعلق باشد).

$$5x+3y-2+\lambda(3x-y-4)=0$$

$$x-y+1+\lambda'(2x-y-2)=0$$

حل: بر عهدهٔ دانش‌آموزان عزیز.

مسایل:

۱) مقدار λ را طوری تعیین کنید که دو خط $\Delta:\lambda x+2y-4=0$ و $\Delta':3x-y=6$ روی محور طولها متقاطع باشند.

۲) مختصات نقطه ثابتی را که دسته خط (مرکز دسته خط) به معادله زیر از آن می‌گذرد را به دست آورید.

$$(m+1)x+(m-1)y-5=0$$

۳) α را طوری تعیین کنید که نقطه تلاقی دو خط $y+5x-1=0$ و $y=2x-1$ روی خط $\alpha x+(2\alpha-1)y-2=0$ قرار داشته باشد.

۴ـ ثابت کنید که سه خط به معادلات زیر در یک نقطه همرسند. $\Delta'':y-\frac{5}{2}x=-2$ ، $\Delta':y=-2x+7$ و $\Delta:y-2x+1=0$.

۵ـ اگر $(\alpha-1,\alpha+1)$ مرکز دسته خط $mx+(m-1)y-2=0$ باشد مختصات مرکز دسته خط را پیدا کنید.

◄ منابع

۱ ـ جبر تحلیلی — غلامرضا عسجدی

۲ ـ هندسه تحلیلی — ترجمه حسین ابراهیم زاده قلزم

۳ ـ مسایل هندسه تحلیلی

۴ ـ حساب — جورج. ب. توماس

5. Problems in analytical geometry D. KLETENIK