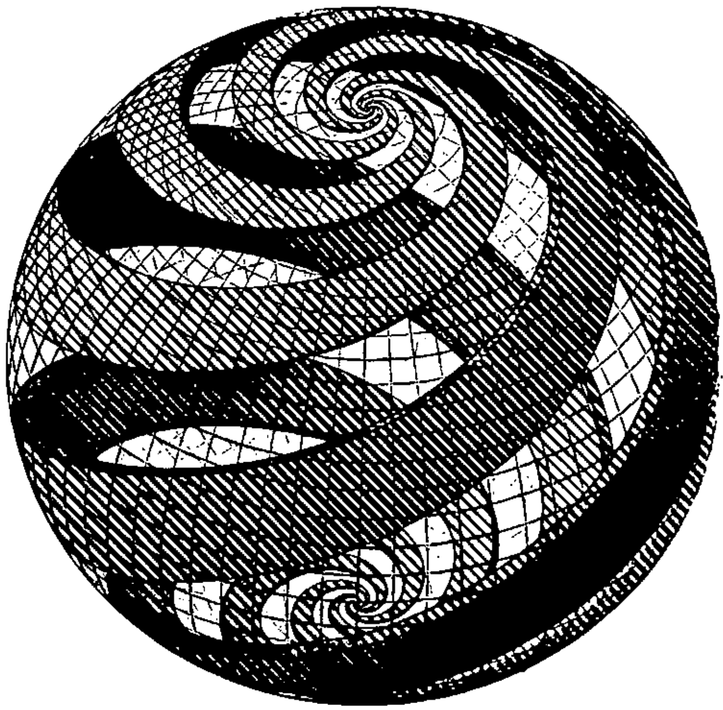


در حاشیهٔ مشتق و مشتق‌پذیری

● حمیدرضا امیری

معمولاً مشتق‌پذیر بودن یک تابع مانند f در نقطه‌ای به طول x_0، از دیدگاه «آنالیزی» مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد و در واقع، با توجه به تعریف مشتق و مشتقهای چپ و راستِ تابع f در نقطه‌ای به طولِ x_0، پی به چگونگی وضع تابع در نقطه‌ای به طول x_0 می‌برند و روی مشتق‌پذیری یا مشتق‌ناپذیری آن بحث می‌کنند.

در این مقاله سعی شده است که حالتهای مختلف مشتق، وجود یا عدم وجود مشتق در نقطه‌ای به طولِ x_0 را ابتدا به طریق هندسی و شهودی شناسایی و بررسی کنیم و سپس از طریق تعریف مشتق، این یافته‌های هندسی و درک شهودی را آزمایش کرده و صحّت آنها را تأیید کنیم.

یادآوری: اگر تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ در نقطه‌ای به طول x_0 پیوسته بوده و $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ موجود و برابر با عددی حقیقی باشد، این عدد حقیقی را مشتق تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 نامیده و با $f'(x_0)$ نمایش می‌دهند. در این حالت، می‌گوییم تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 مشتق‌پذیر است.

توجه دارید که اگر فرض کنیم $x - x_0 = h$، در این صورت:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

اگر تعبیر هندسی مشتق را به‌خاطر داشته باشید، $f'(x_0)$ را همان «**ضریب زاویهٔ**» خط مماس بر منحنی نمایش f، در نقطه‌ای به طول x_0 (نقطه‌ای به طول x_0 روی منحنی است) نامیدیم. بنابراین بحث روی حالتهای مختلف مشتق در یک نقطه، یا وجود و عدم وجود مشتق در یک نقطه، به بحث روی حالتهای مختلف ضریب زاویهٔ خط یا خطهای مماس بر آن نقطه می‌پردازد و درنتیجه به بحث روی حالتهای مختلف خط یا خطهای مماس و وجود یا عدم وجود مماس در آن نقطه می‌انجامد.

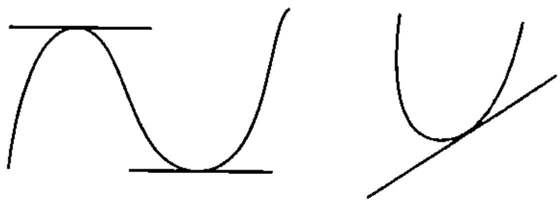
به عبارت دیگر، می‌خواهیم حالتهایی را که یک منحنی می‌تواند در نقطه‌ای دارای خط مماس باشد یا انواع مماس را که در نقاط مختلف منحنی یک تابع می‌توان بر آن رسم کرد، مورد بررسی قرار داده و از آن طریق، به انواع مشتق، وجود یا عدم وجود مشتق در یک نقطه، برسیم.

برای این منظور، همهٔ حالتهای ممکن را بررسی می‌کنیم و در هر حالت، نظر خودمان را با تعریف ریاضی مشتق، انطباق می‌دهیم.

حالت اوّل: نقطه‌ای به طول x_0 روی منحنی به گونه‌ای واقع شده است که از آن نقطه نمی‌توان بیش از یک مماس بر منحنی عبور داد، بنابراین از آن نقطه، فقط یک خط مماس بر منحنی می‌توانیم رسم کنیم که در این حالت، بنابر تعریفِ «حدّ»، حدّ چپ و حدّ راستِ کسر $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x \to x_0}$ وقتی $x \to x_0$ که به ترتیب مشتق چپ و مشتق راستِ تابع f نامیده می‌شوند، با هم برابر بوده و با عددی حقیقی و منحصر به‌فرد مانند L مساوی‌اند. (عدد L

همان $(f'(x_0)$ یا $tg\alpha$ یا ضریب زاویهٔ خط مماس بر منحنی f در نقطه‌ای به طول x_0 است.)

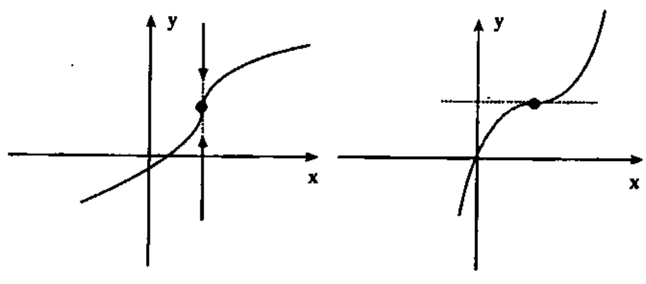
این حالت، حالتی است که تابع f در نقطه‌ای به طول x_0 مشتق‌پذیر می‌باشد که قبلاً در تعریف مشتق به آن اشاره شد و بهترین نقاط برای نمایش این حالت، نقاط اکسترمم (ماکزیمم یا مینیمم) هستند. به شکلهای زیر توجه کنید :



پرسش: چرا برای یافتن طول نقاط اکسترمم، مشتق تابع را مساوی صفر قرار می‌دهیم؟ یا به اصطلاح، ریشه‌های مشتق را می‌یابیم؟

(راهنمایی: خط مماس در نقطه‌های ماکزیمم یا مینیمم، موازی با محور xها بوده و ضریب زاویهٔ آن صفر است.)

حالت دوم: نقطه‌ای به طول x_0 روی منحنی، به گونه‌ای واقع شده است که اگر بخواهیم از آن نقطه، مماسی بر منحنی رسم کنیم، این مماس با محور xها یا با محور yها موازی بوده و منحنی را قطع می‌کند. به شکلهای زیر توجه کنید :



(الف) (ب)

همان‌طور که می‌دانید، این نقاط را نقاط «**عطف**» منحنی می‌نامند. در حالت (الف) مماس بر منحنی، موازی با محور xها بوده و همواره ضریب زاویهٔ آن صفر است. بنابراین مشتق در آن نقطه تعریف شده و مقدارش صفر است. در این‌گونه نقطه‌ها، تابع مشتق‌پذیر است و مقدار مشتق نیز منحصر به فرد و برابر با صفر است.

به‌عنوان مثال، تابع f با ضابطهٔ $f(x)=(x-1)^3+1$ را در نظر بگیرید که نمودار (الف) منحنی نمایش این تابع است :

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left[(x-1)^3+1\right]-1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^3}{(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2-2x+1)}{\cancel{(x-1)}}=0$$

$\Rightarrow f'(1)=0=tg\alpha \Rightarrow \alpha=0 \Rightarrow$ مماس با محور xها موازی است.

امّا در حالتی که مماس در نقطهٔ عطف عمود بر محور xها باشد، ضریب زاویه‌اش نمی‌تواند عددی حقیقی باشد ؛ زیرا اگر $\alpha\to\frac{\pi}{2}$ آن‌گاه $tg\alpha\to\infty$ و بسته به این که زاویهٔ α از چه سمتی به $\frac{\pi}{2}$ میل کند، $tg\alpha$ به سوی $+\infty$ یا $-\infty$ میل خواهد کرد. بنابراین $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ برابر با $+\infty$ یا $-\infty$ خواهد شد و لذا طبق تعریف، تابع در این نوع نقطه‌ها مشتق‌پذیر نیست و می‌توان گفت :

اگر f در همسایگی نقطه‌ای به طول x_0 پیوسته بوده و مشتقهای راست و چپ آن در x_0 برابر با ∞ و هم علامت باشند، آن نقطه‌ای به طول x_0 نقطهٔ عطف منحنی خواهد بود.

تذکر: توجه دارید که عکس مطلب فوق، در حالت کلّی برقرار نیست ؛ یعنی اگر نقطهٔ $A\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$ نقطهٔ عطف منحنی باشد، لازم نیست تابع در آن نقطه، مشتقی برابر با ∞ داشته باشد ؛ مانند تابع با ضابطهٔ $f(x)=(x-1)^3+1$ که در مثال قبل بررسی شد.

به مثال زیر توجه کنید :

تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)}+\frac{1}{2}$ را که نمودار (ب) منحنی نمایش آن می‌باشد، در نظر می‌گیریم :

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left[\sqrt[3]{x-1}+\frac{1}{2}\right]-\frac{1}{2}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x-1}}{x-1}=\lim_{x\to1}\sqrt[3]{\frac{(x-1)}{(x-1)^3}}$$

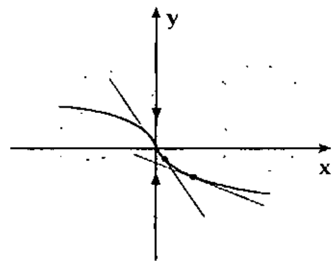
$$=\lim_{x\to1}\sqrt[3]{\frac{1}{(x-1)^2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty\ ,$$

$$\lim_{x\to 1^+}\sqrt[3]{\frac{1}{(x-1)^2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty\quad ,$$

$$\lim_{x\to 1^-}\sqrt[3]{\frac{1}{(x-1)^2}}=\frac{1}{0^+}=+\infty\Rightarrow f'(1)=+\infty$$

تذکر: با توجه به انحنای منحنی در نقطه‌ای به طول ۱، ملاحظه می‌کنید که وقتی مماس بر منحنی را به سمت نقطه‌ای به طول ۱ میل می‌دهید، در واقع زاویهٔ خط مماس از سمت چپ به سمت $\frac{\pi}{2}$ میل می‌کند و می‌دانیم اگر زاویه‌ای از چپ به $\frac{\pi}{2}$ میل کند (مقادیر کمتر از $\frac{\pi}{2}$)، تانژانت آن زاویه، به سمت $+\infty$ میل خواهد کرد. در قسمت پایین منحنی (نسبت به نقطهٔ عطف) نیز رفتار مماس، مشابه قبل است.

اگر منحنی نمایش تابع f به صورت زیر باشد، برای رسم مماس در نقطهٔ عطف و میل کردنِ به سمت این مماس، ناچاریم زاویه را از سمت راست به $\frac{\pi}{2}$ میل داده و درنتیجه، $tg\alpha$ به سمت $-\infty$ میل خواهد کرد.



$$f(x)=-\sqrt[3]{x}\Rightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{-\sqrt[3]{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sqrt[3]{x}}{x}$$

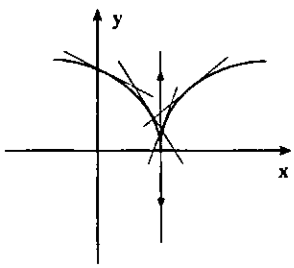
$$=\lim_{x\to 0}-\sqrt[3]{\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to 0}-\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}=-\frac{1}{0^+}=-\infty$$

حالت سوم: نقطه‌ای به طول x_0 روی منحنی، به‌گونه‌ای قرار دارد که وقتی از راست به x_0 نزدیک می‌شویم، زاویهٔ خط مماس از چپ یا راست، به $\frac{\pi}{2}$ میل می‌کند و درنتیجه، مقدار $tg\frac{\pi}{2}$ یا $f'(x_0)$ به ترتیب به $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند و وقتی از چپ به x_0 نزدیک می‌شویم، زاویهٔ خط مماس از راست یا چپ به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک شده و درنتیجه، مقدار $tg\frac{\pi}{2}$ یا $f'(x_0)$ به ترتیب به $-\infty$ یا $+\infty$ میل می‌کند.

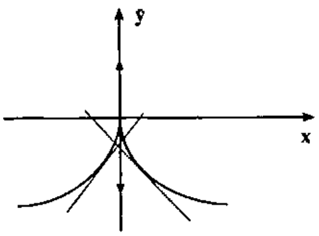
نقاطی که چنین وضعیتی دارند، به نقاط «**بازگشتی**» معروف بوده و با توجه به تعریف مشتق، بدیهی است که مشتقهای چپ و راست در x_0 با هم برابر نبوده و تابع در این نقاط مشتق‌پذیر نمی‌باشد.

پس می‌توان گفت:

اگر تابع f در نقطه‌ای به‌طول x_0 پیوسته و مشتقهای چپ و راستِ آن، یکی $-\infty$ و دیگری $+\infty$ باشد، آن نقطه، نقطهٔ بازگشت منحنی بوده و تابع در آن نقطه، مشتق‌پذیر نیست. به شکلهای زیر توجه کنید:



(الف)



(ب)

اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ را در نظر بگیریم (نمودار مربوط به آن (الف) است)، در این صورت خواهیم داشت:

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{(x-1)^3}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{\frac{1}{(x-1)}}\ ,$$

$$\lim_{x\to 1^+}\sqrt[3]{\frac{1}{x-1}}=\sqrt[3]{\frac{1}{0^+}}=+\infty\quad ,$$

$$\lim_{x\to 1^-}\sqrt[3]{\frac{1}{x-1}}=\sqrt[3]{\frac{1}{0^-}}=-\infty$$

همان‌طور که تعریف ریاضی مشتق نیز نشان داد، دیدیم که $f'(1^+)\neq f'(1^-)$ و تابع f در نقطه به طول ۱ مشتق‌پذیر نمی‌باشد و این نقطه، یک نقطهٔ بازگشتی است. همچنین ملاحظه می‌کنید که وقتی $x\to 1^+$ (از سمت راست به ۱ نزدیک می‌شویم) زاویهٔ خط مماس بر منحنی، از چپ به $\frac{\pi}{2}$ نزدیک می‌شود؛ یعنی $\alpha\to\frac{\pi}{2}^-$ (در ناحیهٔ اوّل زاویه‌ها همگی کمتر از $\frac{\pi}{2}$ هستند) و

در نتیجه، $tg\alpha = f'(1)$ به سمت $+\infty$ میل می‌کند و در حالتی که $x \to 1^-$ آن گاه $f'(1) = tg\alpha \to -\infty$.

حال اگر تابع f با ضابطهٔ $f(x) = -\sqrt[3]{x^2}$ را در نظر بگیریم، مشاهده می‌شود که :

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

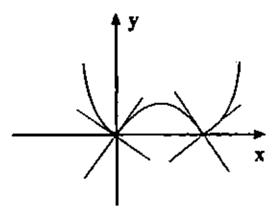
$$= \lim_{x\to 0} -\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}} = \lim_{x\to 0} -\sqrt[3]{\frac{1}{x}} \ ,$$

$$\lim_{x\to 0^+} -\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{0^+}} = -\infty \ ,$$

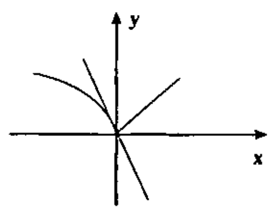
$$\lim_{x\to 0^-} -\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = -\sqrt[3]{\frac{1}{0^-}} = +\infty$$

این نقطه نیز یک نقطهٔ بازگشتی بوده و طبق شکل (ب) اگر $x \to 0^+$ ، در این صورت $\alpha \to \frac{\pi^+}{2}$ و در نتیجه $f'(0) = tg\alpha \to -\infty$ و اگر $x \to 0^+$ ، در این صورت $\alpha \to \frac{\pi^-}{2}$ و درنتیجه $f'(0) = tg\alpha \to +\infty$.

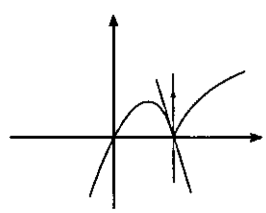
حالت چهارم: ممکن است نقطه‌ای به طول x_0 روی منحنی، به گونه‌ای قرار داشته باشد که از آن نقطه، بتوانیم دو مماس بر منحنی رسم کنیم، که البته یکی از این دو مماس، می‌تواند بر محور xها عمود باشد. به شکلهای زیر توجه کنید :



(الف)



(ب)



(ج)

واضح است که در این حالت نیز مشتقهای چپ و راست با هم برابر نبوده و حتّی یکی از آنها می‌تواند ∞ باشد که در هر صورت، تابع در چنین نقاطی که به نقاط «**زاویه‌دار**» معروف هستند، مشتق‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین می‌توان گفت :

هرگاه $f'(x_0^+) = L_1$ و $f'(x_0^-) = L_2$ و $L_1 \neq L_2$ و یا یکی از مشتق چپ یا راست در نقطهٔ به طول x_0 ، عددی حقیقی و دیگری $+\infty$ یا $-\infty$ باشد، در این حالت، چنین نقطه‌ای نقطهٔ «**زاویه‌دار**» نامیده شده و تابع در آن نقطه ، مشتق‌پذیر نمی‌باشد و همواره در این نقطه، دو مماس می‌توان بر منحنی رسم کرد.

به عنوان مثال، اگر فرض کنیم $y = |x^2 - 2x|$ ، در این صورت خواهیم داشت :

$$f(x) = |x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & x \geq 2 \ \text{یا} \ x \leq 0 \\ -x^2 + 2x & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x^2 - 2x| - 0}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{|x|\,|x-2|}{x} ,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|\,|x-2|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}|x-2|}{\cancel{x}} = 2 = f'(0^+) \ ,$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|\,|x-2|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\cancel{x}|x-2|}{\cancel{x}} = -2 = f'(0^-)$$

و همان‌طور که در شکل (الف) مربوط به این تابع می‌بینید، در نقطه‌ای به طول صفر، دو مماس بر منحنی رسم شده است که یکی دارای ضریب زاویهٔ ۲ و دیگری ۲- است.

تمرین: این مطلب را برای $f'(2)$ تحقیق کنید.

حال تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(x-1)} & x \geq 1 \\ -x^2 + x & x < 1 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. در این تابع، نقطه‌ای به طول $x_0 = 1$ را بررسی می‌کنیم که خواهیم داشت :

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \ ,$$

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt[3]{x-1} - 0}{x - 1}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \ ,$$

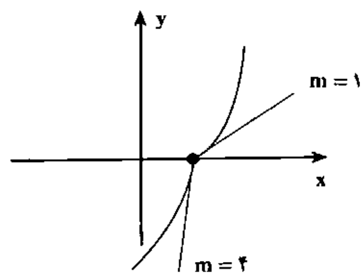
$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{-x^2+x-0}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = -1$$

همان‌طور که روی شکل (ج) مشاهده شد و نیز همان‌طور که از تعریف ریاضی مشتق برای این تابع به‌دست آمد، در نقطه‌ای به طول ۱، دو مماس، یکی عمود بر محور xها و دیگری خطی با ضریب زاویهٔ ۱-، می‌توانیم بر منحنی نمایش آن رسم کنیم.

تمرین: در تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & x \geq 1 \\ 2x^2 - 2 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ نشان دهید که نقطه‌ای به طول $x_0 = 1$ یک نقطهٔ زاویه‌دار است.

(**راهنمایی:** نمودار آن رسم شده است.)



حالت پنجم: ممکن است نقطه‌ای به طول x_0 روی منحنی، به‌گونه‌ای باشد که از آن نقطه نتوانیم بر منحنی مماسی رسم کنیم. در واقع، رفتار تابع در آن نقطه مشخص نیست و درنتیجه برای $f'(x_0)$ مقدار معلومی حاصل نخواهد شد و تابع f در این نقاط، مشتق‌پذیر نیست. به عنوان مثال، تابع با ضابطهٔ

$f(x) = \begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید :

می‌دانیم f در همسایگی صفر پیوسته است و داریم $f(0) = 0$ و از طرف دیگر :

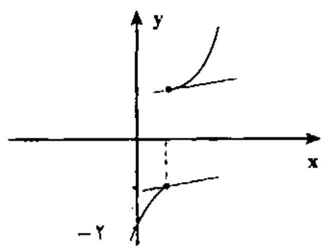
$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\cos\frac{1}{x} - 0}{\cancel{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$$

و چون $\left|\cos\frac{1}{x}\right| \leq 1$ ، بنابراین مقدار حدّ فوق، عددی حقیقی در بازهٔ $[-1,1]$ است ؛ امّا این مقدار نامعلوم است. پس $f'(0)$ وجود ندارد ؛ یعنی در نقطهٔ صفر، نمی‌توانیم بر منحنی نمایش تابع فوق، مماسی رسم کنیم.

تمرین: نقطهٔ به طول $x_0 = 0$ روی منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ چه نقطه‌ای است؟ آیا تابع در این نقطه مشتق‌پذیر است؟

حالت ششم: ممکن است نقطهٔ روی منحنی، به گونه‌ای واقع شده باشد که منحنی در آن نقطه، پیوسته نباشد ؛ در این حالت، مطابق شکل زیر، می‌توان دو مماس بر منحنی و در مجاورت آن نقطه رسم کرد که «**مشتقهای یکطرفه**» ایجاد شده و در این گونه نقاط نیز به طور مسلّم تابع مشتق‌پذیر نمی‌باشد.



مثال: تابع f با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 + 1 & x \geq 1 \\ -(x-1)^2 - 1 & x < 1 \end{cases}$ مفروض است. این تابع در نقطهٔ $x_0 = 1$ دارای مشتقهای یکطرفه بوده و شکل فوق مربوط به همین تابع است.

مسائل برای حل

۱ ـ نقطهٔ به طول $x_0 = -1$ روی منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x) = \big|2x + |x-1|\big|$ ، چه نوع نقطه‌ای است؟

۲ ـ نقطهٔ به طول $x_0 = 2$ روی منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x) = (x-2)^2[x-2]$ ، چه نوع نقطه‌ای است؟

۳ ـ نقطهٔ به طول $x_0 = 0$ روی منحنی نمایش تابع با ضابطهٔ $f(x) = x^2 + x[x]$ ، چه نوع نقطه‌ای است؟