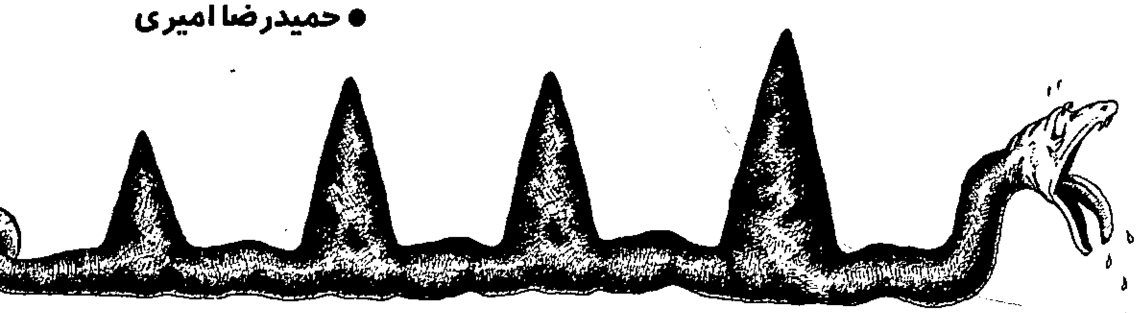
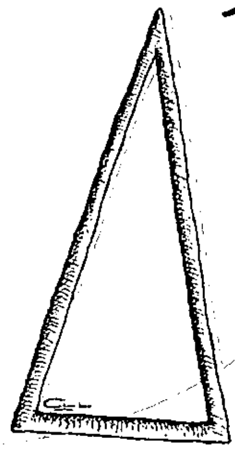
در حاشیهٔ مثلثات

(قسمت دوم)

دایرهٔ مثلثاتی و رابطهٔ بین نسبتهای مثلثاتی

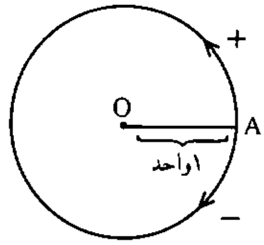
● حمیدرضا امیری





تعریف دایرهٔ مثلثاتی و محورهای نسبتهای مثلثاتی روی آن:

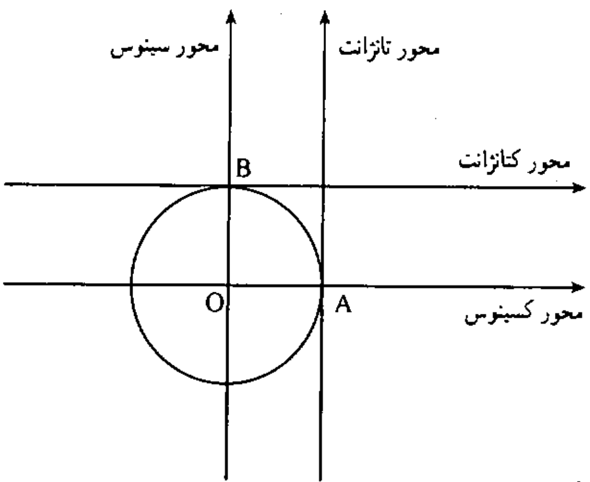
تعریف: دایرهٔ مثلثاتی، دایره‌ای است **جهت‌دار** با شعاع واحد، که جهت مثبت روی دایرهٔ مثلثاتی، خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت در نظر گرفته می‌شود (مطابق شکل ۵). نقطهٔ O را مرکز دایرهٔ مثلثاتی و نقطهٔ A را مبدأ دایرهٔ مثلثاتی می‌نامیم. حال روی



شکل۱

دایرهٔ مثلثاتی و مطابق با شکل (۲) محورهای نسبتهای مثلثاتی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

الف) محور سینوسها: محور عمودی که از مرکز دایرهٔ مثلثاتی



شکل۲

عبور می‌کند.

ب) محور کسینوسها: محور افقی که از مرکز دایرهٔ مثلثاتی عبور می‌کند.

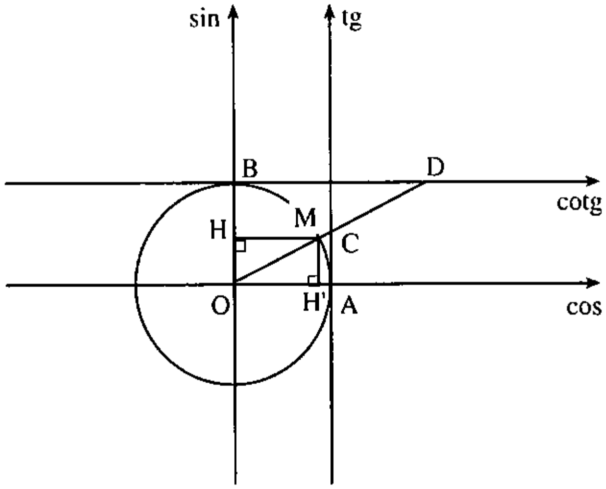
ج) محور تانژانتها: محور عمودی که از مبدأ دایرهٔ مثلثاتی (نقطهٔ A) عبور می‌کند.

د) محور کتانژانتها: محور افقی که برمحورهای سینوس و تانژانت عمود است و مطابق شکل، از نقطهٔ B عبور می‌کند.

تبصره: روی همهٔ این محورها، از مبدأ هر محور افقی به

سمت راست، مثبت و به سمت چپ را منفی قرارداد می‌کنیم و نیز روی محورهای عمودی، از مبدأ محور به سمت بالا را مثبت و به سمت پایین را منفی قرارداد می‌کنیم.

حال فرض کنیم α، زاویه‌ای دلخواه باشد، انتهای کمان این زاویه را M می‌نامیم و از نقطهٔ M مطابق شکل (۳) عمودهایی بر محورهای سینوس و کسینوس رسم می‌کنیم، تا بترتیب این محورها را در نقاط H و H' قطع نمایند و نیز از نقطهٔ M به مرکز دایرهٔ مثلثاتی وصل کرده و امتداد می‌دهیم، تا از یک سمت، محورهای تانژانت و کتانژانت را بترتیب در نقاط C و D قطع کند. حال ثابت می‌کنیم: $\cos\alpha = \overline{OH}'$ و $\sin\alpha = \overline{OH}$ و $tg\alpha = \overline{AC}$ و $cotg\alpha = \overline{BD}$.



شکل۳

در صورتی که روابط فوق اثبات شوند، با توجه به توضیحات بالا برای یافتن نسبتهای مثلثاتی یک زاویه، کافی است از انتهای کمان مربوط به آن زاویه، عمودهایی بر محورهای سینوس و کسینوس رسم کرده و اندازهٔ جبری $\overline{OH}$ و $\overline{OH}'$ را بترتیب، سینوس و کسینوس آن زاویه بنامیم و نیز از انتهای کمان به مرکز دایرهٔ مثلثاتی وصل کرده، امتداد دهیم تا محورهای تانژانت و کتانژانت را قطع نماید و اندازهٔ جبری $\overline{AC}$ و $\overline{BD}$ را تانژانت و کتانژانت آن زاویه بنامیم. حال، با توجه به شکل به اثبات روابط فوق می‌پردازیم:

الف) در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMH داریم: (OM شعاع دایرهٔ مثلثاتی) $\cos\alpha = \frac{OH}{OM} = \frac{OH}{۱} = OH$ ؛ پس $\cos\alpha = OH$، یعنی فاصلهٔ پای عمود تا مرکز دایرهٔ مثلثاتی.

ب) در مثلث قائم‌الزاویه OMH داریم:

$$\sin\alpha = \frac{MH}{\underbrace{OM}_{\text{شعاع دایره مثلثاتی}}} = \frac{MH}{۱} \Rightarrow \sin\alpha = MH$$

و چون چهارضلعی $OHMH'$ مستطیل است، پس $MH = OH'$، لذا $\sin\alpha = OH'$ که OH' فاصلهٔ پای عمود بر محور سینوسها تا مرکز دایره مثلثاتی است.

ج) مثلث قائم‌الزاویهٔ OAC را در نظر می‌گیریم، در این مثلث، داریم:

$$tg\alpha = \frac{AC}{\underbrace{OA}_{\text{شعاع دایره مثلثاتی}}} = \frac{AC}{۱} = AC$$

پس $tg\alpha = AC$، که AC محل تقاطع امتدادِ انتهای کمان α با محور تانژانتها می‌باشد.

د) در مثلث قائم‌الزاویه ODB بنابر خاصیت خطوط موازی و مورّب، $\angle D = \alpha$ و داریم:

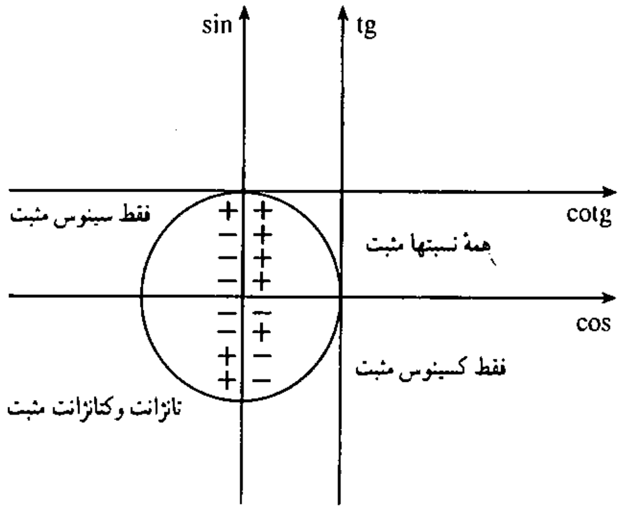
$$cotg\alpha = \frac{BD}{\underbrace{OB}_{\text{شعاع دایره مثلثاتی}}} = \frac{BD}{۱} \Rightarrow cotg\alpha = BD$$

که BD محل تقاطع امتدادِ انتهای کمانِ α با محور کتانژانتها می‌باشد.

علامت جبری نسبتهای مثلثاتی در نواحی مختلف دایرهٔ مثلثاتی

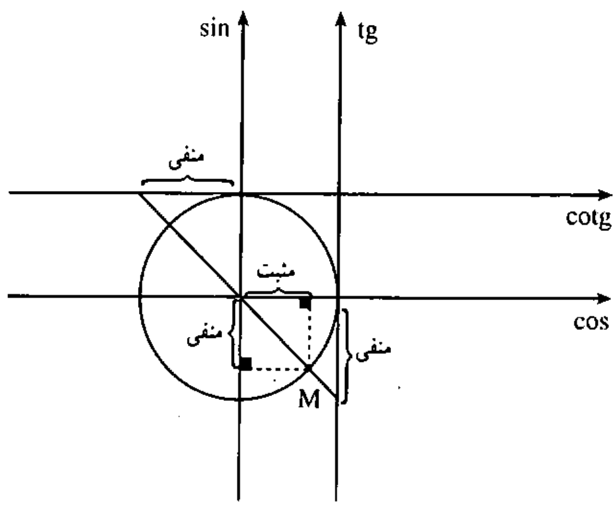
با توجه به تعریف دایرهٔ مثلثاتی، تعریف محورهای نسبتهای مثلثاتی روی این دایره و نحوهٔ محاسبهٔ سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت یک زاویهٔ دلخواه که قبلاً ذکر شد، علامت جبری نسبتهای مثلثاتی روی دایرهٔ مثلثاتی، مطابق شکل (۴) می‌باشد.

تبصره: در حالت کلّی، برای یافتن علامتهای جبری نسبتهای مثلثاتی در هر ناحیه، یک زاویهٔ دلخواه در آن ناحیه در نظر می‌گیریم و انتهای کمان مربوط به آن زاویه را مشخص کرده (مطابق شکل ۵) و از آن نقطه، عمودهایی بر محورهای سینوس و کسینوس رسم می‌کنیم. سمت راست و بالا را مثبت، سمت چپ و پایین را منفی درنظر می‌گیریم، و اگر از انتهای کمانِ زاویهٔ دلخواه، به



شکل۴

مرکز، وصل و امتداد دهیم تا محور کتانژانتها و تانژانتها را قطع کند، بترتیب، مانند محورهای سینوس و کسینوس درنظر می‌گیریم.



شکل۵

حدود تغییرات نسبتهای مثلثاتی

الف) حدود تغییرات سینوس: با توجه به شکل (۶) تغییرات سینوس را از زاویهٔ صفر درجه تا °۳۶۰ بررسی می‌کنیم که به قرار زیر است (توجه داریم که شعاع دایرهٔ مثلثاتی ۱ واحد است) :

$\sin ۰ = ۰$

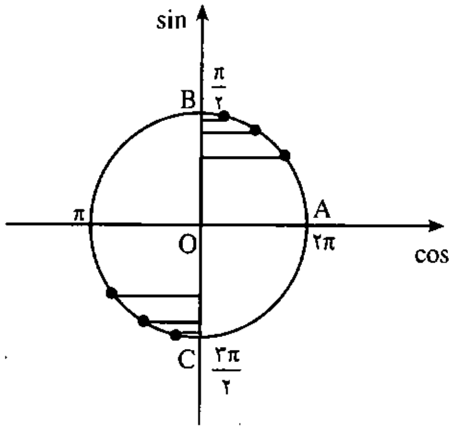
$\sin\frac{\pi}{۲} = OB = ۱$

$\sin \pi = ۰$

$\sin\frac{۳\pi}{۲} = OC = -۱$

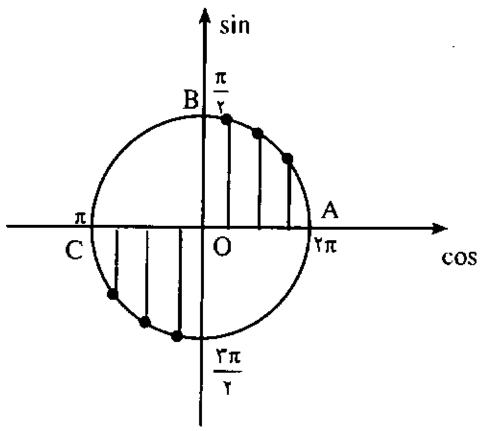
$\sin ۲\pi = ۰$

بطور کلّی اگر $۰ \le \alpha \le ۲\pi \Rightarrow -۱ < \sin\alpha \le ۱$



شکل۶

ب) حدود تغییرات کسینوس: با توجه به شکل (۷) تغییرات کسینوس یک زاویه، به ازای تغییر آن زاویه از صفر درجه تا ۳۶۰ درجه، به‌صورت زیر می‌باشد :



شکل۷

$\cos ۰ = OA = ۱$

$\cos\frac{\pi}{۲} = ۰$

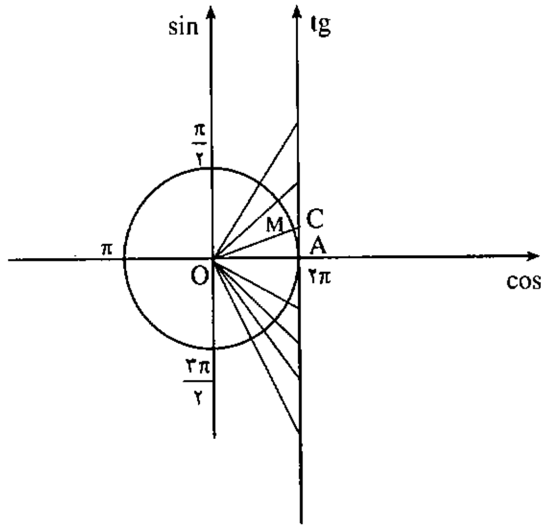
$\cos \pi = OC = -۱$

$$\cos\frac{۳\pi}{۲}=۰$$

$$\cos ۲\pi = OA = ۱$$

پس اگر $۰ \le \alpha \le ۲\pi \Rightarrow -۱ \le \cos\alpha \le ۱$

ج) حدود تغییرات تانژانت: با توجه به شکل (۸) تغییرات تانژانت یک زاویه به ازای تغییرات آن زاویه از صفر تا ۳۶۰° به‌صورت زیر است : هرگاه زاویه از صفر تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر کند، تانژانت



شکل۸

آن زاویه، یعنی مثلاً اندازهٔ AC از صفر به سمت اعداد خیلی بزرگ مثبت تغییر می‌کند، و هرقدر زاویه به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیکتر می‌شود، مقدار AC بزرگتر خواهد شد و به سمت $+\infty$ نزدیک می‌شود ؛ ولی در نقطهٔ $\frac{\pi}{۲}$ چون امتداد OM محور تانژانتها را قطع نمی‌کند، تانژانت تعریف نمی‌شود (با توجه به فرمول $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$، اگر $\cos\alpha = ۰$، آن گاه تانژانت تعریف نمی‌شود و داریم $\cos\frac{\pi}{۲}=۰$) و اگر تغییرات زاویه از $\frac{\pi}{۲}$ تا π ادامه یابد به محض این که زاویه به مقدار خیلی کم از $\frac{\pi}{۲}$ بیشتر شود و در ربع دوم قرار گیرد، مقدار AC از مقادیر خیلی کوچک و منفی (از $-\infty$) به طرف صفر تغییر می‌کند، و نیز در صورت تغییر زاویه از π تا $\frac{۳\pi}{۲}$، مقادیر AC از صفر تا $+\infty$ تغییر کرده و در خود نقطهٔ $\frac{۳\pi}{۲}$ تعریف نمی‌شود ($\cos\frac{۳\pi}{۲}=۰$) و اگر زاویه از $\frac{۳\pi}{۲}$ تا ۲π تغییر کند، مقدار AC از $-\infty$ تا صفر تغییر خواهد کرد و به طور کلّی :

اگر $۰ \le \alpha \le ۲\pi \Rightarrow -\infty < tg\alpha < +\infty$

$tg\,۰ = ۰$ یا $tg\,۰ = \frac{\sin ۰}{\cos ۰} = \frac{۰}{۱} = ۰$

$tg\frac{\pi}{۲} =$ تعریف‌نشده یا $tg\frac{\pi}{۲} = \frac{\sin\frac{\pi}{۲}}{\cos\frac{\pi}{۲}} = \frac{۱}{۰} =$ تعریف نشده

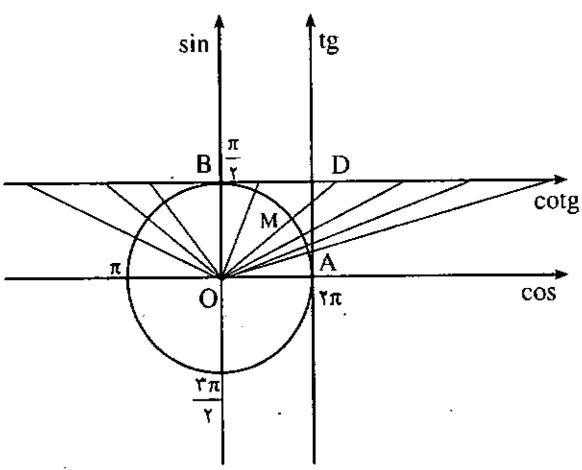
$tg\pi = ۰$ یا $tg\pi = \frac{\sin\pi}{\cos\pi} = \frac{۰}{-۱} = ۰$

$tg\frac{۳\pi}{۲} =$ تعریف نشده یا $tg\frac{۳\pi}{۲} = \frac{\sin\frac{۳\pi}{۲}}{\cos\frac{۳\pi}{۲}}$

$= \frac{-۱}{۰} =$ تعریف نشده

$tg۲\pi = ۰$ یا $tg۲\pi = \frac{\sin ۲\pi}{\cos ۲\pi} = \frac{۰}{۱} = ۰$

د) حدود تغییرات کتانژانت: با توجه به شکل (۹) و مشابه



شکل۹

آنچه در مورد تانژانت ذکر شد، از زاویه از صفر تا π/۲ تغییر کند، کتانژانت آن زاویه، یعنی :BD از مقادیر خیلی بزرگ $(+\infty)$ به سمت صفر نزدیک خواهد شد، در خود نقطهٔ A یعنی صفر درجه کتانژانت تعریف نمی‌شود ؛ زیرا امتداد OM محور کتانژانتها را قطع نمی‌کند (با توجه به فرمول $\cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ اگر $\sin\alpha = 0$، آن‌گاه کتانژانت تعریف نخواهد شد و توجه داریم، $\sin 0 = 0$) و اگر تغییرات زاویه از $\frac{\pi}{2}$ تا π ادامه یابد، تغییرات کتانژانت زاویه یا تغییرات اندازهٔ BD از صفر تا $-\infty$ خواهد بود و در صورت تغییرات زاویه از π تا $\frac{3\pi}{2}$، مقدار کتانژانت زاویه از $+\infty$ تا صفر و در صورت تغییر زاویه از $\frac{3\pi}{2}$ تا 2π اندازهٔ کتانژانت زاویه از صفر تا $-\infty$ تغییر خواهد کرد. (در نقاط π و 2π نیز کتانژانت تعریف نشده است و به‌طور کلّی

اگر $0<\alpha<2\pi \Rightarrow -\infty < \cot g\alpha < +\infty$

$$\cot g\,0 = \frac{\cos 0}{\sin 0} = \frac{1}{0}$$ یا تعریف نشده $= \cot g\,0$

$$\cot g\frac{\pi}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}} = \frac{0}{1} = 0$$ یا $\cot g\frac{\pi}{2} = 0$

$$\cot g\pi = \frac{\cos\pi}{\sin\pi} = \frac{-1}{0}$$ یا تعریف نشده $= \cot g\pi$

$$\cot g\frac{3\pi}{2} = \frac{\cos\frac{3\pi}{2}}{\sin\frac{3\pi}{2}} = \frac{0}{-1} = 0$$ یا $\cot g\frac{3\pi}{2} = 0$

$$\cot g 2\pi = \frac{\cos 2\pi}{\sin 2\pi} = \frac{1}{0}$$ یا تعریف نشده $= \cot g 2\pi$

مسألهٔ ۱) ثابت کنید : تانژانت و کتانژانت هر زاویه، در هر یک از نواحی دایرهٔ مثلثاتی، همیشه هم علامتند.

می‌دانیم $tg\alpha.\cot g\alpha = 1$ پس در صورتی می‌تواند حاصل‌ضرب ۲ عدد حقیقی برابر با مقدار مثبتی باشد که علامت آنها یکی باشند ؛ یعنی یا هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند.

تبصره: هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، خواهیم داشت :

اگر $a\times b<0 \Rightarrow$ b,a مختلف‌العلامه‌اند

اگر $a\times b>0 \Rightarrow$ b,a متحدالعلامه‌اند

اگر $a\times b=0 \Rightarrow a=0$ یا $b=0$

مسألهٔ ۲) اگر $\sin^2\alpha\times\cot g\alpha<0$ معین کنید : انتهای کمان مربوط به α در کدام ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی است؟ مسأله را به دو روش حل می‌کنیم :

روش اوّل: چون $\sin^2\alpha\geq 0$ پس تأثیری در جهت نامساوی ندارد، لذا برای برقراری نامساوی، می‌بایست $\cot g\alpha<0$ و این امکان‌پذیر نیست، مگر در ناحیه دوم و چهارم دایرهٔ مثلثاتی که $\cot g\alpha$ منفی می‌باشد.

روش دوم : $\sin^2\alpha.\cot g\alpha<0 \Rightarrow \sin^2\alpha.\frac{\cos\alpha}{\cancel{\sin\alpha}}<0$

$\Rightarrow \sin\alpha.\cos\alpha<0$

بنابراین، می‌بایست $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ علامتهای گوناگون داشته باشند، پس α، باید زاویه‌ای در ربع دوم دایره مثلثاتی ($\sin\alpha$ مثبت و $\cos\alpha$ منفی) یا در ربع چهارم ($\cos\alpha$ مثبت و $\sin\alpha$ منفی) واقع باشد.

مسألهٔ ۳) اگر $A=\frac{tg\alpha.\cot g^2\alpha}{(1-\cos\alpha)}<0$ معین کنید : α در کدام ناحیهٔ دایرهٔ مثلثاتی باید واقع باشد. ابتدا کسر فوق را ساده می‌کنیم.

$$A=\frac{\overbrace{tg\alpha.\cot g\alpha}^{1}.\cot g\alpha}{(1-\cos\alpha)}<0 \Rightarrow A=\frac{\cot g\alpha}{1-\cos\alpha}<0$$

اولاً : با توجه به مخرج کسر $\cos\alpha\neq 1$، پس $\alpha\neq 2\pi$ و $\alpha\neq 0$

و ثانیاً : با توجه به حدود تغییرات کسینوس $(-1\leq\cos\alpha\leq 1)$ مخرج کسر فوق، یعنی : $1-\cos\alpha$، همواره مثبت است، پس علامت کسر فقط به صورت آن بستگی پیدا می‌کند، پس باید $\cot g\alpha<0$ باشد و این ممکن نیست جز این‌که α در ناحیهٔ دوم یا چهارم دایرهٔ مثلثاتی واقع باشد.

مسألهٔ ۴) هرگاه $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ و $\cos\alpha=2m-1$، حدود تغییرات m را معین کنید.

طبق فرض داریم $\pi/2<\alpha<\pi \Rightarrow -1<\cos\alpha<0$

$\Rightarrow -1<2m-1<0$

$$\left.\begin{array}{l}(\text{الف})\ \ 2m-1<0 \Rightarrow 2m<1 \Rightarrow m<\frac{1}{2}\\ (\text{ب})\ \ 2m-1>-1 \Rightarrow 2m>0 \Rightarrow m>0\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{حدود تغییرات } m} 0<m<\frac{1}{2}$$

مسألهٔ ۵) هرگاه $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ و $\cos 4\alpha=\frac{m-1}{4m+2}$ حدود تغییرات m را معین کنید.

داریم: $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi<4\alpha<2\pi \Rightarrow -1<\cos 4\alpha<1$

$$\Rightarrow -1<\frac{m-1}{4m+2}<1$$

(الف) $\frac{m-1}{4m+2}<1 \Rightarrow 1-\frac{m-1}{4m+2}>0$

$$\Rightarrow \frac{4m+2-m+1}{4m+2}>0 \Rightarrow \frac{3m+3}{4m+2}>0 \qquad (1)$$

m	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3m+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$4m+2$		$-$		$-$	0	$+$	
کسر		$+$	0	$-$	تعریف‌نشده	$+$	

با توجه به نامساوی (۱) و جدول فوق برای حالت «الف»، حدود تغییرات m عبارت است از: $m>-\frac{1}{2}$ یا $m<-1$.

(ب) $\frac{m-1}{4m+2}>-1 \Rightarrow \frac{m-1}{4m+2}+1>0$

$$\Rightarrow \frac{m-1+4m+2}{4m+2}>0 \Rightarrow \frac{5m+1}{4m+2}>0 \qquad (2)$$

m	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{5}$		$+\infty$
$5m+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$4m+2$		$-$	0	$+$		$+$	
کسر		$+$	تعریف‌نشده	$-$	0	$+$	

با توجه به نامساوی (۲) و جدول برای حالت «ب»، حدود تغییرات m عبارت است از: $m>-\frac{1}{5}$ یا $m<-\frac{1}{2}$ که اشتراک جوابهای حالت «الف» و «ب» به قرار زیر است:

$$\left\{m \mid m<-\frac{1}{2}\right\} \cup \left\{m \mid m>-\frac{1}{5}\right\} \longrightarrow \text{حدود تغییرات } m$$

(اگر $m>-\frac{1}{5}$ داریم $m>-\frac{1}{2}$ و اگر $m<-\frac{1}{2}$ داریم $m<-1$)

مسألهٔ ۶) بیشترین و کمترین مقدار عبارت $A=\frac{1-2\sin x}{3}$ را معین کنید.

برای حل این گونه تمرینها که نسبتهای مثلثاتی از درجه ۱ می‌باشند، با توجه به حدود تغییرات نسبت مثلثاتی موجود، بیشترین و کمترین مقدار عبارت را محاسبه می‌کنیم.

کمترین مقدار A اگر $\sin x=1 \Rightarrow A=\frac{1-2}{3}=-\frac{1}{3}$

بیشترین مقدار A $=1$ اگر $\sin x=-1 \Rightarrow A=\frac{1+2}{3}=\frac{3}{3}=1$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در این مسأله، بیشترین مقدار عبارت A به ازای کمترین مقدار sinx یعنی ۱− و کمترین مقدار عبارت A به ازای بیشترین مقدار sinx یعنی ۱ به‌دست آمد.

مسألهٔ ۷) بیشترین و کمترین مقدار عددی عبارت $A=\sin^2 x-2\sin x+5$ را محاسبه کنید.

برای حلّ این مسأله، از تبدیل به مربع کامل استفاده می‌کنیم. لازم به یادآوری است که عبارتهای درجهٔ دوم به شکل x^2+bx+c را با اضافه و کم کردن $(\frac{b^2}{4})$ می‌توان به مربع کامل تبدیل کرد.

$$x^2+bx+c=x^2+ax+\frac{b^2}{4}+c-\frac{b^2}{4}$$

$$=(x+\frac{b}{2})^2+\frac{4c-b^2}{4}$$

داریم: $A=\sin^2 x-2\sin x+5$

$$=\sin^2 x-2\sin x+1+5-1=(\sin x-1)^2+4$$

$$\Rightarrow A=(\sin x-1)^2+4$$

حال، واضح است که اگر مقدار داخل پرانتز، صفر باشد؛ یعنی: $\sin x=1$ آنگاه عبارت A کمترین مقدار خود را خواهد داشت؛ یعنی: $\min A=4$ و اگر داخل پرانتز بیشترین مقدار را داشته باشد، A نیز بیشترین مقدار خود را خواهد داشت؛ یعنی: اگر $\sin x=-1$، داریم $\text{Max}A=8$.

مسألهٔ ۸) فقط کمترین مقدار عددی عبارت $A = tg^2x + 4tgx - 5$ را محاسبه کنید.

$$A = tg^2x + 4tgx - 5 = tg^2x + 4tgx + 4 - 5 - 4$$
$$= (tgx + 2)^2 - 9$$

اگر داخل پرانتز مخالف صفر باشد (مثبت باشد یا منفی) چون از درجهٔ ۲ است، همواره مثبت خواهد بود و مقدار عددی A از ۹- بیشتر می‌شود. پس کمترین مقدار عددی A زمانی است که پرانتز صفر باشد؛ یعنی $tgx = -2$ که در این حالت $\min A = -9$.

(با توجه به حدود تغییرات تانژانت که از $-\infty$ تا $+\infty$ می‌باشد، عبارت A دارای بیشترین مقدار یا Max نمی‌باشد. در حقیقت مقدار عددیِ A تا $+\infty$ پیش می‌رود.)

فرمول اساسی مثلثات و نتیجه‌های حاصل از آن (رابطه‌های تبدیل نسبتهای مثلثاتی به یکدیگر)

با توجه به فرمول اساسیِ مثلثات، یعنی $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ مشاهده کردیم که اگر مثلاً: سینوس زاویه‌ای مشخص باشد، می‌توان کسینوس، تانژانت و کتانژانت آن زاویه را با توجه به ناحیهٔ مثلثاتی که آن زاویه دارد، مشخص کرد.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$
$$\Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$
$$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

مسألهٔ ۹) اگر $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ و α زاویه‌ای در ربع چهارم دایرهٔ مثلثاتی باشد، سایر نسبتهای مثلثاتی زاویه α

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \xRightarrow{\text{در ربع چهارم } \alpha} \sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$
$$= -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{\sin\alpha = -\frac{4}{5}}$$
$$\Rightarrow tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-4/5}{3/5} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{tg\alpha = -\frac{4}{3}}$$

و داریم $cotg\alpha = \frac{1}{tg\alpha} \Rightarrow \boxed{cotg\alpha = -\frac{3}{4}}$

حال، اگر تانژانت یا کتانژانت زاویه‌ای معلوم باشد و بخواهیم سایر نسبتهای مثلثاتی آن را محاسبه کنیم، می‌بایست به دنبال روابطی بین تانژانت و کتانژانت با سینوس و کسینوس باشیم، که به‌ترتیب زیر، این روابط را با استفاده از فرمول اساسی مثلثات، محاسبه می‌کنیم.

رابطه‌های کسینوس برحسب تانژانت و کتانژانت:

داریم : $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \xRightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{دو طرف را بر } \cos^2\alpha} \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

$$= \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

۲طرف تساوی معکوس می‌شود $\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha}$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2\alpha}}}$$

$tg^2\alpha = \frac{1}{cotg^2\alpha}$ و داریم $\Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\frac{1}{cotg^2\alpha}}}$

$$= \frac{1}{\pm\sqrt{\frac{cotg^2\alpha+1}{cotg^2\alpha}}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\pm\frac{\sqrt{1+cotg^2\alpha}}{cotg\,\alpha}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{cotg\alpha}{\pm\sqrt{1+cotg^2\alpha}}}$$

رابطه‌های سینوس برحسب تانژانت و کتانژانت

داریم: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \xRightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{۲ طرف را بر } \sin^2\alpha} \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$

$$= \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow 1 + cotg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

۲ طرف تساوی معکوس می‌شود $\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{1+cotg^2\alpha}$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+cotg^2\alpha}}}$$

$$\mathrm{cotg}^۲\alpha=\frac{۱}{\mathrm{tg}^۲\alpha} \text{ و داریم } \Rightarrow \sin\alpha=\frac{۱}{\pm\sqrt{۱+\frac{۱}{\mathrm{tg}^۲\alpha}}}$$

$$=\frac{۱}{\pm\sqrt{\frac{۱+\mathrm{tg}^۲\alpha}{\mathrm{tg}^۲\alpha}}}=\frac{۱}{\pm\frac{\sqrt{۱+\mathrm{tg}^۲\alpha}}{\mathrm{tg}\,\alpha}}=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\pm\sqrt{۱+\mathrm{tg}^۲\alpha}}$$

$$\Rightarrow\boxed{\sin\alpha=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\pm\sqrt{۱+\mathrm{tg}^۲\alpha}}}$$

تبصره: لازم به تذکر است، در حلّ مسائل و استفاده از فرمولهای فوق، عملاً می‌توان فقط از دو فرمول $\sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha=۱$ و $\cos\alpha=\frac{۱}{\pm\sqrt{۱+\mathrm{tg}^۲\alpha}}$ استفاده کرد و سایر نسبتهای مثلثاتی مجهول را به‌دست آورد.

مسألهٔ ۱۰) اگر $\mathrm{cotg}\alpha=\frac{۴}{۵}$ و α زاویه‌ای در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد، سایر نسبتهای مثلثاتی زاویهٔ α را محاسبه کنید.

$$\mathrm{cotg}\alpha=\frac{۴}{۵}\xrightarrow{\mathrm{tg}\alpha=\frac{۱}{\mathrm{cotg}\alpha}}\mathrm{tg}\alpha=\frac{۱}{\frac{۴}{۵}}\Rightarrow\boxed{\mathrm{tg}\alpha=\frac{۵}{۴}}$$

$$\cos\alpha=\frac{۱}{\pm\sqrt{۱+\mathrm{tg}^۲\alpha}} \text{ و داریم } \xRightarrow{\alpha \text{ در ربع سوم}}$$

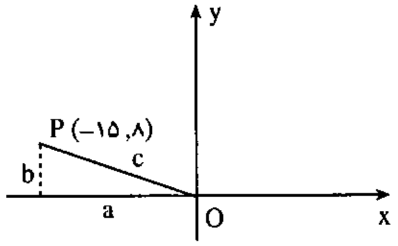
$$\cos\alpha=\frac{۱}{-\sqrt{۱+\mathrm{tg}^۲\alpha}}=\frac{۱}{-\sqrt{۱+\frac{۲۵}{۱۶}}}=\frac{۱}{-\sqrt{\frac{۴۱}{۱۶}}}=\frac{۴}{-\sqrt{۴۱}}$$

$$\text{گویا می‌کنیم } \Rightarrow\boxed{\cos\alpha=\frac{-۴\sqrt{۴۱}}{۴۱}}$$

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{۵}{۴}=\frac{\sin\alpha}{-\frac{۴\sqrt{۴۱}}{۴۱}} \text{ و داریم }$$

$$\Rightarrow\sin\alpha=\frac{-۲۰\sqrt{۴۱}}{۴\times۴۱}\Rightarrow\sin\alpha=\frac{-۵\sqrt{۴۱}}{۴۱}$$

مسألهٔ ۱۱) در صفحهٔ مختصات دکارتی،اگر $P\Big|^{-۱۵}_{۸}$ و O مبدأ مختصات باشد و زاویه ای را که OP با محور x ها می سازد(زاویهٔ حاده) θ بنامیم، مطلوب است محاسبهٔ کلیهٔ نسبتهای مثلثاتی زاویه θ.



شکل۱۰

$$c=\overline{OP}=\sqrt{(-۱۵)^۲+۸^۲}=\sqrt{۲۲۵+۶۴}=\sqrt{۲۸۹}=۱۷$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin\theta=\frac{۸}{۱۷} & \mathrm{cotg}\theta=-\frac{۱۵}{۸}\\ \cos\theta=-\frac{۱۵}{۱۷} & \sec\theta=-\frac{۱۷}{۱۵}\\ \mathrm{tg}\theta=-\frac{۸}{۱۵} & \mathrm{cosec}\theta=\frac{۱۷}{۱۸}\end{cases}$$

مسألهٔ ۱۲) اگر زاویه‌ای را که خط $y=۳x$ با محور xها می‌سازد، θ بنامیم، بدون استفاده از رابطه‌های تبدیل نسبتهای مثلثاتی به یکدیگر، همهٔ نسبتهای مثلثاتی θ را بیابید.

ابتدا خط $y=۳x$ را رسم می‌کنیم. برای رسم خط، به ۲ نقطهٔ آن نیازمندیم،که واضح است یک نقطهٔ آن $\Big|^{۰}_{۰}$O ونقطهٔ دیگرراقرار دهیم $x=۱$ ، خواهیم داشت $y=۳$ ، پس $P\Big|^{۱}_{۳}$. حال، با توجه به این دو نقطه، خط را رسم می کنیم (شکل ۱۱).

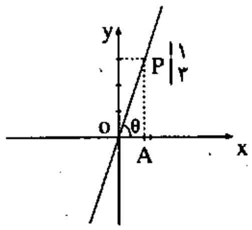
$$\overline{OP}=\sqrt{(۱)^۲+(۳)^۲}=\sqrt{۱۰}\Rightarrow\overline{OP}=\sqrt{۱۰}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAP داریم :

$$\sin\theta=\frac{۳}{\sqrt{۱۰}}=\frac{۳\sqrt{۱۰}}{۱۰} \qquad \cos\theta=\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۱۰}$$

$$\mathrm{cosec}\theta=\frac{۱}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{۱۰}}{۳} \qquad \sec\theta=\frac{۱}{\cos\theta}=\sqrt{۱۰}$$

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{۳}{۱}=۳ \qquad \mathrm{cotg}\theta=\frac{۱}{۳}$$



شکل۱۱