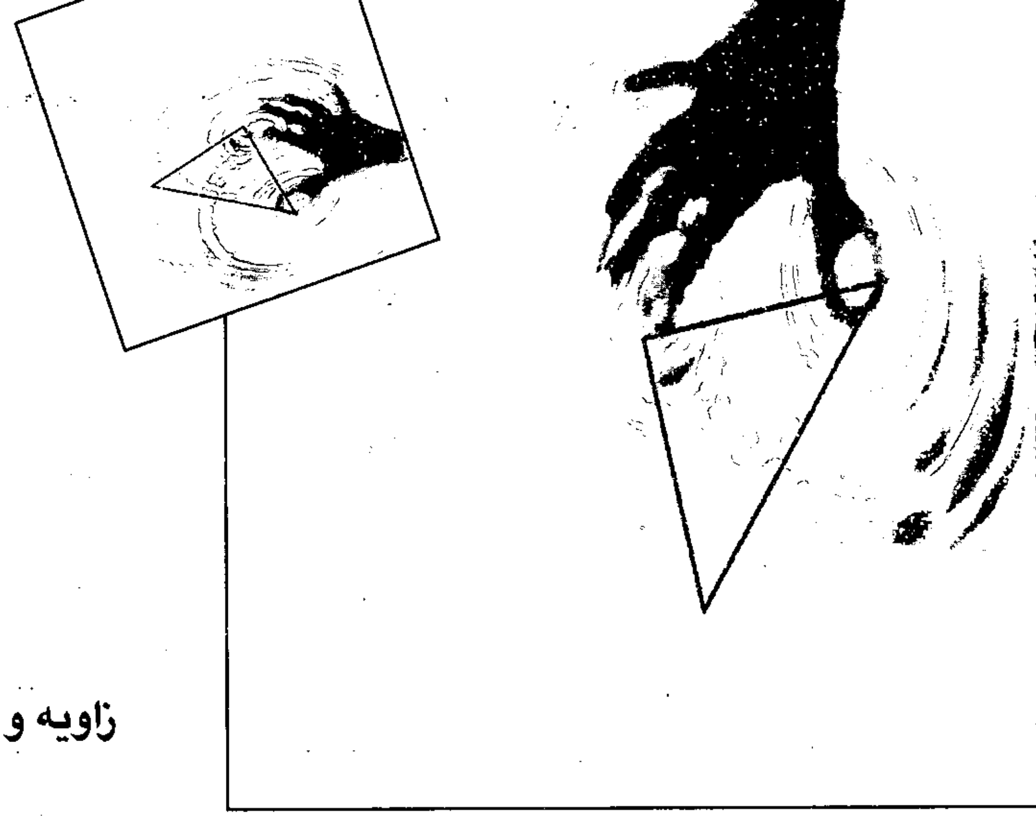


در حاشیه مثلثات

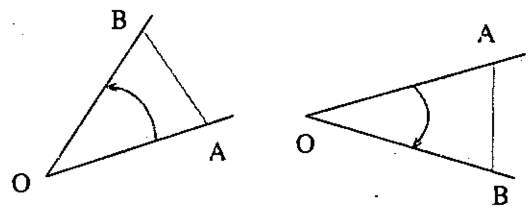
(قسمت اوّل)

زاویه و مقیاسهای اندازه گیریِ آن

● حمیدرضا امیری

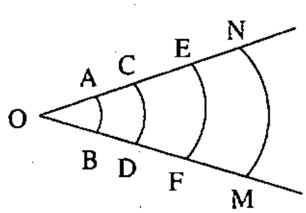
تعریف زاویه:

هرگاه نیمخطی مانند OA، حول یکی از نقاطش دوران کند (برای راحتی نقطهٔ ابتدا یعنی O را در نظر می‌گیریم) تا به وضعیت جدید OB برسد (مطابق شکل ۱). آن قسمت از صفحه که باید نیمخط OA جاروب کند تا بر وضعیت ثانویه خود یعنی OB منطبق شود، زاویه بین OA و OB می‌نامیم. به‌طورکلّی، زاویه از دوران یک نیمخط حول یکی از نقاطش حاصل می‌شود.



شکل ۱

با توجه به تعریف زاویه، واضح است که می‌توان زاویه‌ای چون $\angle MON$ را (مطابق شکل ۲) با هر یک از کمانهای AB، CD، EF یا MN نمایش داد.



شکل ۲

مقیاسهای اندازه‌گیری زاویه *(درجه، گراد، رادیان و اجزای آنها ـ مسأله‌های حل شده)*

الف) تعریف درجه و اجزای آن: هرگاه نیمخطی چون OA حول نقطهٔ O، آن‌قدر دوران کند تا بر خودش منطبق شود، شکل حاصل یک دایره بوده و گوییم نیمخط OA یک دوران کامل انجام داده است. اگر این دوران کامل را (دایره را) به ۳۶۰ قسمت تقسیم کنیم، اندازهٔ یک قسمت از این ۳۶۰ قسمت را ۱ درجه می‌نامیم. به عبارت دیگر، اندازهٔ زاویه‌ای در یک دایره را که اندازهٔ کمان روبه‌روی آن $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره باشد، ۱ درجه می‌نامیم.

اجزای درجه، عبارت است از : دقیقه و ثانیه که بترتیب با نمادهای (′) و (″) نمایش می‌دهیم. هر درجه، ۶۰ دقیقه و هر دقیقه ۶۰ ثانیه است (مشابه رابطهٔ ساعت و دقیقه و ثانیه).

برای تبدیل این اجزا به یکدیگر، به این صورت عمل می‌کنیم که اگر بخواهیم درجه را به دقیقه یا ثانیه، و یا دقیقه را به ثانیه تبدیل کنیم، عمل ضرب را انجام می‌دهیم و بعکس.

مسألهٔ ۱: اندازهٔ زاویه‌ای برابر است با $\alpha = ۲۵^\circ, ۲۰', ۴۵''$، اندازهٔ این زاویه را :

الف) برحسب دقیقه ب) برحسب ثانیه ج) برحسب درجه محاسبه کنید.

$$\alpha = (۲۵^\circ \times ۶۰) + ۲۰' + \left(\frac{۴۵}{۶۰}\right) =$$ برحسب دقیقه

$$۱۵۰' + ۲۰' + \frac{۳'}{۴} = ۱۷۰/۷۵'$$

$$\alpha = (۲۵^\circ \times ۳۶۰۰) + (۲۰' \times ۶۰) + ۴۵'' =$$ برحسب ثانیه

$$۹۰۰۰۰'' + ۱۲۰۰'' + ۴۵'' = ۹۱۲۴۵''$$

$$\alpha = ۲۵^\circ + (\frac{۲۰}{۶۰}) + (\frac{۴۵}{۳۶۰۰}) =$$ برحسب درجه

$$۲۵ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۸۰} = \frac{۶۰۸۳}{۲۴۰}$$

ب) تعریف گراد و اجزای آن: هرگاه نیمخطی چون OA یک دوران کامل انجام دهد و این دوران کامل را به ۴۰۰ قسمت مساوی تقسیم کنیم، اندازهٔ هر قسمت از این اقسام را یک گراد می‌نامیم ($\frac{۱}{۴۰۰}$ از یک دوران کامل، ۱ گراد نام دارد). به‌طور خلاصه، ۱ گراد اندازهٔ زاویه‌ای است که اندازهٔ کمان روبه‌روی آن زاویه در دایره، $\frac{۱}{۴۰۰}$ اندازهٔ محیط دایره است.

پرسش: اگر اندازهٔ زاویهٔ α یک درجه و اندازهٔ زاویهٔ β یک گراد باشد، کدام بزرگترند؟ اجزای گراد عبارت است از : دسیگراد، سانتیگراد و میلیگراد، که هر گراد ۱۰ دسیگراد و هر دسیگراد ۱۰۰ سانتیگراد (هر گراد ۱۰۰ سانتیگراد) و هر سانتیگراد ۱۰ میلیگراد (هر گراد ۱۰۰۰ میلیگراد) می‌باشد. در این‌جا نیز برای تبدیل اجزای بزرگتر به کوچکتر، عمل ضرب و برای تبدیل اجزای کوچکتر به بزرگتر، عمل تقسیم را انجام می‌دهیم.

مسألهٔ ۲: اندازهٔ زاویه β عبارت است از ۱۰۰ گراد (gr)، ۲۰ دسیگراد (dgr)، ۴۴ سانتیگراد (cgr) و ۱۲ میلیگراد (mgr). اندازهٔ این زاویه را :

الف) برحسب گراد ب) برحسب دسیگراد ج) برحسب سانتیگراد د) برحسب میلیگراد محاسبه کنید.

الف) برحسب گراد $\beta = ۱۰۰_{gr} + (\frac{۲۰}{۱۰})_{gr} + (\frac{۴۴}{۱۰۰})_{gr}$

$$+(\frac{۱۲}{۱۰۰۰})_{gr} = (۱۰۲/۴۵۲)_{gr}$$

ب) برحسب دسیگراد $\beta = (۱۰۰\times۱۰)_{dgr} + ۲۰_{dgr}$

$$+(\frac{۴۴}{۱۰})_{dgr} + (\frac{۱۲}{۱۰۰})_{dgr} = (۱۰۲۴/۵۲)_{dgr}$$

برحسب دسیگراد : روش دوم $\beta = (۱۰۲/۴۵۲)_{gr}$

$$\times۱۰ = ۱۰۲۴/۵۲_{dgr}$$

ج) برحسب سانتیگراد $\beta = (۱۰۰\times۱۰۰)_{cgr} + (۲۰\times۱۰)_{cgr}$

$$+۴۴_{cgr} + (\frac{۱۲}{۱۰})_{cgr} = (۱۰۲۴۵/۲)_{cgr}$$

برحسب سانتیگراد : روش دوم $\beta = (۱۰۲۴/۵۲)_{dgr}$

$$\times۱۰ = ۱۰۲۴۵/۲_{cgr}$$

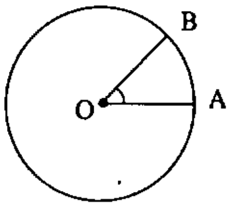
د) برحسب میلیگراد $\beta = (۱۰۰\times۱۰۰۰)_{mgr} + (۲۰\times۱۰۰)_{mgr}$

$$+(۴۴\times۱۰)_{mgr} + ۱۲_{mgr} = (۱۰۲۴۵۲)_{mgr}$$

برحسب میلیگراد : روش دوم $\beta = (۱۰۲۴۵/۲)_{cgr} \times ۱۰$

$$= ۱۰۲۴۵۲_{mgr}$$

ج) تعریف رادیان: دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA را در نظر می‌گیریم (شکل ۳). اگر شعاع OA آن‌قدر دوران کند تا اندازهٔ کمان به‌دست آمده از این دوران (کمان AB) برابر با اندازهٔ شعاع دایره، یعنی OA شود، اندازهٔ زاویهٔ روبه‌روی چنین کمانی را، یک **رادیان** می‌نامیم (۱ رادیان، اندازهٔ زاویه‌ای است که اندازهٔ کمان مقابل آن زاویه، برابر با شعاع دایره باشد).



شکل ۳

$$\overline{\overset{\frown}{AB}} = \overline{OA} \Rightarrow \angle AOB = ۱ \text{ رادیان}$$

برای محاسبهٔ اندازهٔ محیط دایره برحسب رادیان، کافی است محیط دایره را به اندازهٔ کمانی که زاویهٔ روبه‌رو به آن ۱ رادیان است، تقسیم کنیم، در این‌صورت، اگر شعاع دایره را L بنامیم، خواهیم داشت :

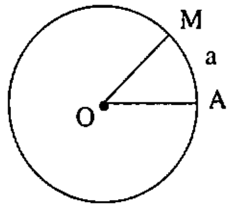
$$\text{اندازهٔ محیط دایره برحسب رادیان} = \frac{\text{محیط دایره}}{\text{اندازهٔ طول کمانی برابر با شعاع}}$$

$$= \frac{۲\pi L}{L} = ۲\pi$$

تبصره: با توجه به تعاریف درجه، گراد و رادیان، اندازهٔ محیط دایره عبارت است از : ۳۶۰درجه یا ۴۰۰ گراد یا ۲π رادیان.

رابطهٔ تبدیل مقیاسهای اندازه‌گیری زاویه به یکدیگر ـ مسأله‌های حل شده

دایره‌ای به مرکز O و به شعاع L را در نظر می‌گیریم، اگر طول کمان AM را مطابق شکل (۴) a بنامیم، خواهیم داشت :



شکل ۴

$$a=\frac{\text{محیط دایره}\times\text{اندازهٔ زاویه روبه‌روی کمان AM برحسب درجه}}{۳۶۰}$$

$$a=\frac{\text{محیط دایره}\times\text{اندازهٔ زاویه روبه‌روی کمان AM بر حسب گراد}}{۴۰۰}$$

$$a=\frac{\text{محیط دایره}\times\text{اندازهٔ زاویه روبه‌روی کمان AM بر حسب رادیان}}{۲\pi}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{اندازهٔ زاویه برحسب درجه}\\ a=\dfrac{۲\pi L\times D}{۳۶۰}\\ \text{اندازهٔ زاویه برحسب گراد}\\ a=\dfrac{۲\pi L\times G}{۴۰۰}\\ \text{اندازهٔ زاویه برحسب رادیان}\\ a=\dfrac{۲\pi L\times R}{۲\pi}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\frac{۲\pi L\times D}{۳۶۰}=\frac{۲\pi L\times G}{۴۰۰}=\frac{۲\pi L\times R}{۲\pi}$$

$$\Rightarrow\frac{D}{۳۶۰}=\frac{G}{۴۰۰}=\frac{R}{۲\pi}$$

$$\Rightarrow\boxed{\frac{D}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}}\ (۱)$$

توجه ۱: D را اندازهٔ زاویه برحسب درجه می‌خوانیم و G را اندازهٔ زاویه برحسب گراد و هیچ‌گاه D را درجه و G را گراد نمی‌خوانیم و همین‌طور R را.

توجه ۲: با توجه به دو نسبت اوّل رابطهٔ (۱) داریم :

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}\Rightarrow\boxed{\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰}}\ (۲)$$

و فراموش نمی‌کنیم که از رابطهٔ (۲) فقط و فقط برای تبدیل درجه و گراد به یکدیگر استفاده می‌کنیم و هر کجا که پای رادیان به میان کشیده شود، پای رابطهٔ (۱) را باید به میان کشید!

مسألهٔ ۳: اندازهٔ زاویهٔ α عبارت است از $\alpha=۳۲/۶_{gr}$ ، اندازهٔ این زاویه را :

الف) برحسب درجه ب) برحسب رادیان، محاسبه کنید.

داریم $\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰}\Rightarrow\frac{D}{۹}=\frac{۳۲/۶}{۱۰}\Rightarrow ۱۰D=۲۹۳/۴$

$\Rightarrow D=۲۹/۳۴$

حال ۰/۳۴ را به دقیقه و ثانیه تبدیل می‌کنیم :

$۰/۳۴=۰/۳۴\times۶۰=(۲۰/۴)'$ برحسب دقیقه

و حالا $۰/۴'$ را به ثانیه تبدیل می‌کنیم :

$۰/۴=۰/۴'\times۶۰=۲۴''$ برحسب ثانیه

پس اندازهٔ زاویه α بر حسب درجه، یعنی D، برابر است با :

$\alpha=۲۹^{\circ},\ ۲۰',\ ۲۴''$

ب) طبق رابطه تبدیل داریم: $\frac{G}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{۳۲/۶}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}$

$\Rightarrow ۳۲/۶\pi=۲۰۰R\Rightarrow R=۰/۱۶۳\pi\Rightarrow$

$\alpha=۰/۱۶۳\pi$ رادیان

مسألهٔ ۴: اگر ۲/۱ برابر اندازهٔ زاویه‌ای برحسب گراد را به اندازهٔ همان زاویه، برحسب درجه اضافه کنیم، عدد ۴۵ به‌دست می‌آید. اندازهٔ این زاویه را برحسب رادیان محاسبه کنید.

طبق فرض مسأله داریم: $۲/۱G+D=۴۵\Rightarrow$

$D=۴۵-۲/۱G\ \ (۱)$

از طرفی داریم : $\frac{D}{۹}=\frac{G}{۱۰}\overset{(۱)}{\Rightarrow}\frac{۴۵-۲/۱G}{۹}=\frac{G}{۱۰}$

(دو مجهول را به یک مجهول تبدیل کردیم.)

$\Rightarrow ۴۵۰-۲۱G=۹G\Rightarrow ۴۵۰=۳۰G\Rightarrow G=۱۵$

اندازهٔ زاویه برحسب گراد

و نیز داریم: $\frac{G}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow\frac{۱۵}{۲۰۰}=\frac{R}{\pi}\Rightarrow R=\frac{۱۵}{۲۰۰}\pi\Rightarrow$

$R=\frac{۳}{۴}\pi$

(اندازهٔ زاویه بر حسب رادیان)

مسألهٔ ۵: اندازهٔ زاویه‌ای برحسب رادیان، برابر است با حاصل تقسیم 5π بر اندازهٔ همان زاویه برحسب درجه، اندازهٔ این زاویه را بر حسب گراد محاسبه کنید:

طبق فرض داریم : $R=\frac{5\pi}{D}$

از طرفی طبق رابطهٔ تبدیل داریم : $\frac{R}{\pi}=\frac{D}{180} \xRightarrow{R=\frac{5\pi}{D}} \frac{\frac{5\pi}{D}}{\pi}$

$$=\frac{D}{180}\Rightarrow\frac{5\cancel{\pi}}{D\cancel{\pi}}=\frac{D}{180}\Rightarrow D^{2}=900\Rightarrow D=\pm 30$$

از طرفی : $\frac{D}{9}=\frac{G}{10}\Rightarrow\frac{\pm 30}{9}=\frac{G}{10}\Rightarrow 9G=\pm 300$

$$\Rightarrow G=\pm 33/\overline{3}$$

توجه بسیار مهم : همان‌طور که در مسائل گذشته مشاهده کردید، ما هیچ‌گاه D را به معنای درجه در نظر نگرفته‌ایم یا G را به معنای گراد یا R را به معنای رادیان ؛ بلکه D یعنی اندازهٔ زاویه‌ای برحسب درجه، G یعنی اندازهٔ زاویه‌ای برحسب گراد و R یعنی اندازهٔ زاویه برحسب رادیان، که توجه به این نکته، کمک قابل توجهی در حل مسائل می‌کند.

مسألهٔ ۶: در مثلث ABC، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}=80^\circ$ و اندازهٔ زاویه C برحسب گراد $\frac{5}{3}$ اندازهٔ زاویهٔ B است، برحسب درجه، ثابت کنید مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

طبق فرض داریم : $\hat{C}_{gr}=\frac{5}{3}\hat{B}^\circ$

از طرفی $\hat{A}=80^\circ\Rightarrow\hat{B}+\hat{C}=100^\circ$ (1)

حال اندازهٔ زاویهٔ $\hat{C}$ را که برحسب گراد داریم، برحسب درجه به‌دست می‌آوریم تا رابطه دیگری بین زوایای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ برحسب درجه به‌دست آید و با توجه به رابطهٔ (۱) دو معادله دو مجهول به‌دست آید.

داریم : $\frac{D}{9}=\frac{G}{10}\xRightarrow{\hat{C}_{gr}=\frac{5}{3}\hat{B}^\circ}\frac{D}{9}=\frac{\frac{5}{3}\hat{B}}{10}\Rightarrow 10D=\frac{45}{3}\hat{B}$

$$\Rightarrow D=\frac{45}{30}\hat{B}\Rightarrow D=\frac{15}{10}\hat{B}$$

(اندازهٔ زاویهٔ C برحسب درجه) $\Rightarrow\hat{C}^\circ=\frac{15}{10}\hat{B}^\circ$

طبق رابطهٔ (۱) داریم: $\hat{B}+\hat{C}=100^\circ\Rightarrow\hat{B}+\frac{15}{10}\hat{B}=100$

$$\Rightarrow\frac{25}{10}\hat{B}=100\Rightarrow 25\hat{B}=1000$$

$\Rightarrow\hat{B}=80^\circ$ و چون $\hat{A}=80^\circ\Rightarrow\hat{A}=\hat{B}=80^\circ$

پس مثلث متساوی‌الساقین است.

مسألهٔ ۷: α چه زاویه‌ای است، اگر حاصلضرب 900π در تفاضل عکس اندازه‌های آن برحسب درجه و گراد، برابر با دو برابر اندازهٔ آن برحسب رادیان باشد؟

طبق فرض داریم: $900\pi(\frac{1}{D}-\frac{1}{G})=2R$

این معادله دارای ۳ مجهول است ؛ ابتدا با استفاده از رابطهٔ $\frac{D}{9}=\frac{G}{10}$، معادله را به ۲ مجهول تبدیل می‌کنیم :

$$\frac{D}{9}=\frac{G}{10}\Rightarrow 10D=9G\Rightarrow D=\frac{9}{10}G$$

$$\Rightarrow 900\pi\left(\frac{1}{\frac{9G}{10}}-\frac{1}{G}\right)=2R\Rightarrow 900\pi\left(\frac{10}{9G}-\frac{1}{G}\right)=2R$$

$$\Rightarrow\cancel{900}^{100}\pi\left(\frac{1}{\cancel{9}G}\right)=2R\Rightarrow\frac{100\pi}{G}=2R\Rightarrow R=\frac{100\pi}{2G}$$

$=\frac{50\pi}{G}$ پس $\boxed{R=\frac{50\pi}{G}}$

از طرفی داریم ← $\frac{R}{\pi}=\frac{G}{200}\Rightarrow\frac{\frac{50\pi}{G}}{\pi}=\frac{G}{200}$

$$\Rightarrow\frac{50\pi}{G\pi}=\frac{G}{200}\Rightarrow G^{2}=10000$$

$\Rightarrow G=100$ اندازهٔ زاویهٔ α برحسب گراد

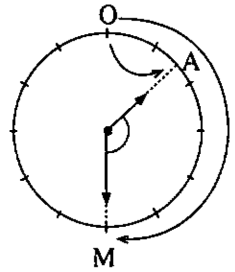
$$\alpha=100_{gr}\Rightarrow\alpha=90^\circ\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2rad}$$

تعیین زاویه‌های بین عقربه‌های ساعت در ساعتهای مختلف ـ مسأله‌های حل شده

صفحهٔ ساعت را دایره شکل فرض می‌کنیم و برای محاسبهٔ

بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار، به‌صورت زیر عمل می‌کنیم : (این روش با ذکر مثالی توضیح داده می‌شود).

مطابق (شکل ۵) مثلاً زاویهٔ بین عقربه‌های ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار در ساعت ۱/۵ را با توجه به تعریف زاویه، می‌توان با کمان AM نمایش داد که این کمان از تفاضل کمان OA از کمان OM به‌دست می‌آید ؛ یعنی : محاسبهٔ این زاویه مستلزم محاسبهٔ کمان OA که همان انحراف عقربه ساعت‌شمار است و محاسبهٔ کمان OM که انحراف عقربهٔ دقیقه‌شمار است، می‌باشد. انحراف این عقربه‌ها را در حالت کلّی، به‌ازای گذشت هر دقیقه بررسی می‌کنیم ؛ با توجه به این‌که صفحهٔ ساعت، دایره و °۳۶۰ است و نیز به ۱۲ قسمت تقسیم شده، هر قسمت یعنی : فاصلهٔ هر عدد با عدد بعدی $۳۰^\circ = \frac{۳۶۰}{۱۲}$ می‌باشد، پس،



شکل ۵

دقیقه	عقربه ساعت شمار
۶۰	۳۰°
۱	$x = ۰/۵$

(عقربهٔ ساعت‌شمار، هریک دقیقه، ۰/۵ درجه منحرف می‌شود)

دقیقه	عقربه دقیقه شمار
۵	۳۰°
۱	$x = ۶$

(عقربهٔ دقیقه‌شمار، هر یک دقیقه، ۶ درجه منحرف می‌شود)

تذکر ۱: عقربهٔ دقیقه‌شمار، فاصلهٔ ۲ عدد متوالی ساعت ؛ یعنی °۳۰ را در ۵ دقیقه و ساعت شمار را در ۱ ساعت یا ۶۰ دقیقه طی می‌کند، که از این مطالب، در تناسبهای فوق استفاده شده است.

تذکر ۲: برای محاسبهٔ انحراف عقربهٔ دقیقه‌شمار، فقط دقیقه‌های وقتِ موردنظر را در عدد ۶ ضرب می‌کنیم و برای محاسبهٔ انحراف عقربه ساعت‌شمار، ساعت و دقیقهٔ وقت موردنظر را به دقیقه تبدیل کرده و در ۰/۵ ضرب می‌کنیم. مثلاً، در مورد یافتن زاویهٔ عقربه‌های ساعت در همان ساعت ۱/۵ (شکل ۵) داریم :

انحراف دقیقه‌شمار $= ۳۰\times۶ = ۱۸۰^\circ$

انحراف ساعت‌شمار $= [(۱\times۶۰)+۳۰]\times۰/۵ = ۹۰\times۰/۵ = ۴۵^\circ$

زاویهٔ بین دو عقربه $= ۱۸۰^\circ - ۴۵^\circ = ۱۳۵^\circ$

مسألهٔ ۸: در ساعت ۳ و ۳۵ دقیقه و ۴۵ ثانیه، زاویهٔ بین عقربه‌های ساعت و دقیقه شمار را حساب کنید.

برای حلّ مسأله، ابتدا ثانیه را به دقیقه تبدیل کرده و با دقیقه‌های وقتِ موردنظر جمع می‌کنیم :

۴۵ ثانیه $= \frac{۴۵}{۶۰} = \frac{۳}{۴} \Rightarrow$

جمع دقیقه و ثانیه بر حسب دقیقه $= ۳۵ + \frac{۳}{۴} = \frac{۱۴۳}{۴}$ دقیقه

انحراف دقیقه‌شمار $= \frac{۱۴۳}{۴}\times۶ = \frac{۴۲۹}{۲}$

انحراف ساعت‌شمار $= \left[(۳\times۶۰)+\frac{۱۴۳}{۴}\right]\times۰/۵$

$$= (۱۸۰+\frac{۱۴۳}{۴})\times\frac{۱}{۲} = (\frac{۸۶۳}{۴})\times\frac{۱}{۲} = \frac{۸۶۳}{۸} \Rightarrow$$

زاویه بین ۲ عقربه $= \frac{۴۲۹}{۲} - \frac{۸۶۳}{۸} = \frac{۱۷۱۶-۸۶۳}{۸} = (\frac{۸۵۳}{۸})^\circ$

تبصره: با توجه به این‌که عقربهٔ ثانیه‌شمار، فاصلهٔ هر دو عدد متوالی ساعت را در مدت ۵ ثانیه طی می‌کند، داریم :

ثانیه	
۵	۳۰°
۱	$x = ۶$

یعنی عقربهٔ ثانیه‌شمار، هر یک ثانیه، ۶ درجه منحرف می‌شود ؛ بنابراین، با همان روش بالا و با محاسبهٔ انحراف عقربهٔ ثانیه‌شمار، می‌توان زاویهٔ بین این عقربه و دو عقربهٔ ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار را نیز به‌دست آورد.

نسبتهای مثلثاتی و مثلث قائم‌الزاویه

مثلث قائم‌الزاویه:

تعریفها و قضیه‌هایی در ذیل خواهد آمد که بعضی از آنها حتی

فراوان در مباحث آینده مورد استفاده قرار خواهند گرفت، این قضیه‌ها را بدون اثبات بیان کرده‌ایم.

تعریف: هر مثلث که دارای یک زاویه قائمه باشد، مثلث قائم‌الزاویه می‌نامیم.

تعریف: در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویه قائمه را وتر می‌نامیم.

قضیهٔ ۱: (فیثاغورس) در هر مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ مربع وتر، برابر است با مجموع مربعات اندازه‌های دو ضلع دیگر.

قضیهٔ ۲: در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۳۰ درجه، نصف وتر است.

قضیهٔ ۳: هرگاه وتر و یک زاویهٔ حادّه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای، با وتر و یک زاویه حاده از مثلث قائم‌الزاویه دیگر، برابر باشند، آن دو مثلث متساویند.

تعریف نسبتهای مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه:

الف) اگر α، زاویه‌ای در مثلث قائم‌الزاویه باشد، سینوس این زاویه، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sin\alpha = \frac{\text{اندازهٔ ضلع روبه‌رو به } \alpha}{\text{اندازهٔ وتر}}$$

ب) اگر α، زاویه‌ای حادّه در مثلث قائم‌الزاویه باشد، کسینوس این زاویه، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\cos\alpha = \frac{\text{اندازهٔ ضلع مجاور به } \alpha}{\text{اندازهٔ وتر}}$$

ج) اگر α، زاویه‌ای حاده در مثلث قائم‌الزاویه باشد، تانژانت این زاویه، به‌صورت زیرتعریف می‌شود:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{اندازهٔ ضلع روبه‌رو به } \alpha}{\text{اندازهٔ ضلع مجاور به } \alpha}$$

د) اگر α، زاویه‌ای حاده در مثلث قائم‌الزاویه باشد، کتانژانت این زاویه، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\cot g\alpha = \frac{\text{اندازهٔ ضلع مجاور به } \alpha}{\text{اندازهٔ ضلع روبه‌رو به } \alpha}$$

هـ) عکسِ کسینوس هر زاویه را سکانت آن زاویه می‌نامیم:

$$\sec\alpha = \frac{۱}{\cos\alpha}$$

و) عکسِ سینوس هر زاویه را کسکانت آن زاویه می‌نامیم:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{۱}{\sin\alpha}$$

تبصرهٔ ۱: با توجه به بند «ج» و «د»، مشاهده می‌شود که $\operatorname{tg}\alpha$ و $\cot g\alpha$ عکس یکدیگرند، یعنی:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{۱}{\cot g\alpha},\ \cot g\alpha = \frac{۱}{\operatorname{tg}\alpha} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha.\cot g\alpha = ۱$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}^n\alpha.\cot g^n\alpha = ۱}$$

پس $\operatorname{tg}\alpha$ و $\cot g\alpha$ از هر توانی، عکس یکدیگر و حاصل‌ضربشان مساوی یک می‌شود.

تبصرهٔ ۲: با توجه به تعریف تانژانت، سینوس و کسینوس که قبلاً ذکر کردیم، داریم:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{اندازهٔ ضلع روبه‌رو به } \alpha}{\text{اندازهٔ ضلع مجاور به } \alpha} \Rightarrow$$

حال صورت و مخرج را بر اندازه وتر تقسیم می‌کنیم

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{\dfrac{\text{اندازهٔ ضلع روبه‌رو به } \alpha}{\text{اندازهٔ وتر}}}{\dfrac{\text{اندازهٔ ضلع مجاور به } \alpha}{\text{اندازهٔ وتر}}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

پس ثابت شد: $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ (۱)

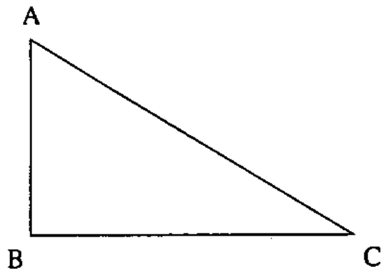
و داریم ← $\cot g\alpha = \frac{۱}{\operatorname{tg}\alpha} \Rightarrow \boxed{\cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$ (۲)

نتیجه:

$$(۱) \Rightarrow \sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha.\cos\alpha,\ \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$(۲) \Rightarrow \cos\alpha = \sin\alpha.\cot g\alpha,\ \sin\alpha = \frac{\cos\alpha}{\cot g\alpha}$$

فرض کنیم: مثلث ABC در رأس B قائمه باشد (شکل ۱) در این صورت، طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم: $\overline{AB}^۲ + \overline{BC}^۲ = \overline{AC}^۲$



شکل ۱

حال دو طرف این رابطه را بر $\overline{AC}^2$ (مربع اندازه وتر) تقسیم می‌کنیم که در این‌صورت خواهیم داشت :

$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}+\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2}=1$ که با توجه به تعریفهای سینوس وکسینوس برای زاویه‌های حادّه داریم :

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}+\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}^2}=1\Rightarrow \boxed{\sin^2 C+\cos^2 C=1}$$

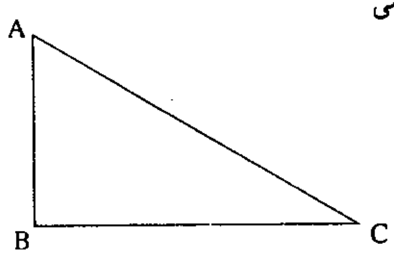
یا $\boxed{\cos^2 A+\sin^2 A=1}$

پس اگر به‌طورکلّی α، زاویه‌ای حادّه در مثلث قائم‌الزاویه باشد، رابطهٔ زیر همواره برقرار است، که آن را رابطهٔ اساسی مثلثات می‌نامیم. $\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1}$

رابطهٔ بالا را با توجه به روابط بین نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های منفرجه و حاده، می‌توان تعمیم داده و به‌طورکلّی برای هر زاویه (حاده، منفرجه و قائمه) اثبات کرد.

محاسبهٔ نسبتهای مثلثاتی زاویه‌های ۳۰، ۶۰ و ۴۵ درجه:

الف) زاویهٔ ۳۰ درجه : در مثلث قائم‌الزاویه ABC فرض کنیم $\hat{C}=30^\circ$ (شکل ۲) طبق قضیه ضلع روبه‌روی این زاویه، نصف وتر است ؛ یعنی



شکل ۲

$\overline{AB}=\frac{\overline{AC}}{2}\Rightarrow \overline{AC}=2\overline{AB}$ از طرفی داریم $\to \sin C=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

$$\Rightarrow \sin 30^\circ=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\cancel{\overline{AB}}}{2\cancel{\overline{AB}}}=\frac{1}{2}\Rightarrow \sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

حال با توجه به فرمول اساسی مثلثات، یعنی $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$، داریم :

$$\sin^2 30^\circ+\cos^2 30^\circ=1\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2+\cos^2 30^\circ=1$$

$$\Rightarrow \cos^2 30^\circ=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{باتوجه به تعریف تانژانت}} tgx=\frac{\sin x}{\cos x}\Rightarrow tg30^\circ=\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

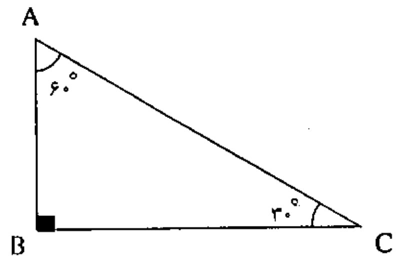
$$\Rightarrow tg30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}\overset{\text{گویا می‌کنیم}}{=}\frac{\sqrt{3}}{3}$$

ونیزداریم $\cot gx=\frac{\cos x}{\sin x}\Rightarrow \cot g30^\circ=\frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \cot g30^\circ=\sqrt{3}\ \left(\cot gx=\frac{1}{tgx}\Rightarrow \cot g30^\circ=\frac{1}{tg30^\circ}\right.$$

$$\left.=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}\right)$$

ب) زاویه 60° : فرض کنیم در مثلث قائم‌الزاویه ABC زاویهٔ $\angle A=60^\circ$ (مطابق شکل ۳) با توجه به این که مجموع زاویه‌های داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است، لذا $\angle C=30^\circ$ پس طبق قضیه ضلع روبه‌روی این زاویه، یعنی AB، نصف وتر است $AC=2AB$ یا $AB=\frac{AC}{2}$



شکل ۳

داریم: $\cos 60^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{2AB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

طبق فرمول اساسی $\Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

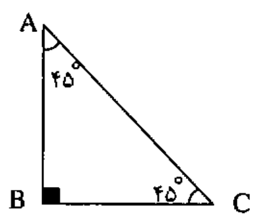
$$\Rightarrow \sin^2 60^\circ = 1 - \cos^2 60 = 1 - (\frac{1}{2})^2 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2 60 = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$tg 60^\circ = \frac{\sin 60}{\cos 60} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \cot g 60 = \frac{1}{tg 60}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

ج) زاویه 45° : فرض کنیم مثلث ABC در رأس B قائمه و زاویهٔ $\angle C = 45^\circ$، بنابراین واضح است که $\angle A = 45^\circ$ (مجموع زاویه‌های داخلی 180° است)؛ یعنی مثلث ABC یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است (مطابق شکل ۴) پس $AB = BC$.



شکل ۴

$$\left.\begin{array}{ll} \text{از طرفی} & \sin A = \sin 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{AB}{AC} \\ \text{و} & \cos A = \cos 45^\circ = \frac{AB}{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow \sin 45^\circ = \cos 45^\circ \quad (1)$$

طبق فرمول اساسی داریم : $\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ = 1$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \sin^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ = 1$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 45^\circ = 1 \Rightarrow \sin^2 45^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

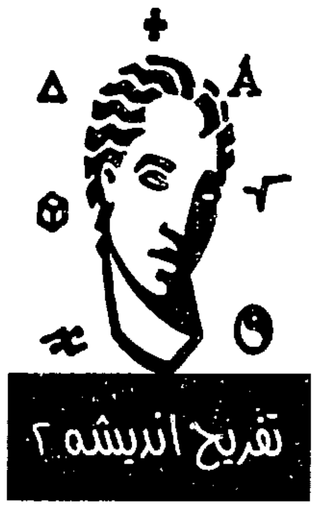
$$\Rightarrow \boxed{\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} \boxed{\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

پس $tg 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \boxed{tg 45^\circ = 1}$

چون

$$\cot g 45^\circ = \frac{1}{tg 45^\circ} \Rightarrow \boxed{\cot g 45^\circ = 1}$$



E
ECE
ECUCE
ECE
E

درشکل بالا با استفاده از حروف مجاز، به چند طریق کلمهٔ ECU را می‌توان خواند؟

● از کتاب تفریح اندیشه با بازیهای عددی ترجمه سیمین‌دخت ترکبور

جواب در صفحهٔ ۸۸