در حاشیهٔ تابع و مفهوم تابع

(قسمت اول)

(ریاضی (۳) نظام جدید و حسابان ۱)

◄ حمیدرضا امیری

می‌خواهیم راجع به یکی از مهمترین مفاهیم ریاضی یعنی **تابع** صحبت کنیم، مفهومی که ریاضیات بدون آن تقریباً هیچ است! مفهومی که حد و پیوستگیِ آن، مشتق و انتگرال گیری از آن، رسمِ آن، انواع مختلف آن و خواصِ آن، کتابهای ریاضیِ ما را اشباع کرده و ریاضی دانان بسیاری را به خود مشغول داشته است. مفهومی که توانسته در علوم دیگر همچون فیزیک، مکانیک و کلیه رشته‌های فنی نقشهای مهّم ایفا کند.

درشاخه‌های مختلف ریاضیات برای معرفی تابع و تعریفِ آن شیوه‌های مختلفی به کار می‌رود که البته همگی معنی واحدی می‌دهند وفقط نوع گفتار و یاابزارهای معرفیِ تابع فرق می‌کند، امّا آنچه اهمیت دارد این است که مفهوم تابع با مفهوم **مجموعه‌ها**، همواره درهم آمیخته به طوری که حتی می‌توان برای شروع **تابع** را مجموعه‌ای از **زوجهای مرتب** تعریف کرد که درآن هیچ دو زوج مرتبِ متمایزی با مؤلفه‌های اولِ برابر یافت نشود.

به عنوان مثال $f=\{(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵),(۵,۶)\}$ یک تابع است.

امّا $g=\{(۲,۴),(۱,۱),(۱,-۱),(۴,۸)\}$ تابع نیست، زیرا $(۱,۱)\in g$ و $(۱,-۱)\in g$ و این با تعریف فوق تناقض دارد.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید f مجموعه‌ای است از زوجهای مرتب و می‌دانیم هر مجموعه از زوجهای مرتب حاصلِ عمل ضرب دکارتی بینِ **دو مجموعه** است. درواقع، می‌توان مجموعه‌ای از مؤلفه‌های اول زوج مرتبهای f و مجموعه‌ای از مؤلفه‌های دوم آنها، تشکیل داد که اگر مجموعهٔ اول را دامنهٔ f بنامیم و مجموعهٔ دوم را بُرد f و به ترتیب با نمادهای D_f و R_f نمایش دهیم در این صورت، $f\subseteq D_f\times R_f$.

درمثال فوق $D_f=\{۲,۳,۴,۵\}$ و $R_f=\{۳,۴,۵,۶\}$

تعریفی که به صورت فوق برای تابع آوردیم تعریفی بسیار **محض** بوده و این تعریف در عین حال که حالت کلّی و عمومی دارد از نظر کاربردی احتیاجات همهٔ شاخه‌های ریاضیات را برآورده نمی‌سازد و به همین دلیل این تعریف را به نوعی دیگر امّا با رعایت همان کلیات، می‌توان بیان کرد.

در مثال قبل تابع f به صورتِ $f=\{(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵),(۵,۶)\}$ رادرنظر داشته باشید، اگر کمی دقت کنید، ارتباط خاصّی بین مؤلفه‌های اول و دومِ تمام زوجهای مرتبِ (بین اعضای دامنه و بُرد) f ، می‌یابید. در این مجموعه زوج مرتبها دارای این ویژگی هستند که، مؤلفه‌های دوم آنها یک واحد از مؤلفهٔ اول بیشتر است پس می‌توان نوشت $f=\{(x,y)|y=x+۱\}$ که $x\in\{۲,۳,۴,۵\}$ یا می‌توانیم بنویسیم $f=\{(x,x+۱)|x\in D\}$ و $D=\{۲,۳,۴,۵\}$. حال اگر تابع f را به عنوان قاعده یا قانونی که هر x از D_f را به $(x+۱)$ مربوط می‌سازد، معرفی کنیم در واقع به نوعی دیگر تابع را تعریف کرده‌ایم، توجه دارید که دراین تعریف تابع f به عنوان یک قاعده و یا در حالت کلّی‌تر به عنوان یک **عملگر**، معرفی

می‌گردد که با قاعدهٔ خاصی روی اعضای دامنه‌اش عمل می‌کند یا اثر می‌کند و اعضای بُرد را تولید می‌کند، در این تعبیر نکتهٔ دیگری که قابل توجه می‌باشد، آن است که همواره قاعدهٔ f روی هر x از D_f اثر می‌کند و با تغییر x، اعضای جدیدی از R_f به دست می‌آید و مشاهده کردید که در تعریف f به صورت $f=\{(x,y)|y=x+۱\}$ مجموعه‌ای برای x ها به شکل $D=\{۲,۳,۴,۵\}$ معرفی کردیم واین بدان معنی است که y ها، **تابع تغییرات** x ها هستند و یا« y **تابع** x است» بنابراین برای مشخص کردن تابع f کافی است دو ویژگی از f برای ما مشخص باشد،یکی D_f و دیگری قاعدهٔ تأثیر f روی اعضای D_f.

معمولاً قاعدهٔ تأثیر f یا چگونگی اثرتابع f روی اعضای D_f رابا نماد $f(x)$ نمایش می‌دهند.

مثال: هر گاه $D_f=\{۳,۶,۸,-۱,۰\}$ و $f(x)=۲x+۲$، دراین صورت تابع f رابه شکل مجموعه‌ای از زوجهای مرتب و همچنین، بُرد f (R_f) را تعیین کنید :

$$f(x)=۲x+۲\Rightarrow\begin{cases}f(۳)=۲\times۳+۲=۸\\f(۶)=۲\times۶+۲=۱۴\\f(۸)=۲\times۸+۲=۱۸\\f(-۱)=۲\times(-۱)+۲=۰\\f(۰)=۲\times۰+۲=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow R_f=\{۸,۱۴,۱۸,۰,۲\}$$

و $f=\{(۳,۸),(۶,۱۴),(۸,۱۸),(-۱,۰),(۰,۲)\}$

حال با توجه به تعبیری که برای تابع و براساس تعریف کلّی آن ذکر کردیم، می‌توانیم تابع رابه شکل زیرنیز تعریف کنیم :

تعریف : تابع f قاعده‌ای است که به هر عضو مانند x از مجموعهٔ D (دامنه) عضو **منحصر بفردی** به نام $f(x)$ از مجموعهٔ R (بُرد) را نسبت می دهد.

توجه دارید در تعریف فوق صفت **منحصربفرد** به این منظور به کار رفته که تعریف کلّی تابع، خدشه دار نشود یعنی اگر f به $x_۱$ عضو $y_۱$ از برد را نسبت دهد وبه همان $x_۱$ عضو $y_۲$ رانیز نسبت دهد و $y_۱\neq y_۲$ دراین صورت f به هر عضو D_f عضو منحصربفردی نسبت نداده واگر کمی دقت کنیم مشاهده می شود که $(x_۱,y_۱)\in f$ و $(x_۱,y_۲)\in f$ و این با تعریف تابع که درابتدا آمد، تناقض دارد.

دراین قسمت در نظر داریم اندکی بیشتر راجع به D_f بحث کنیم در واقع این سؤال را مطرح می‌کنیم که آیا فقط با داشتن ضابطهٔ تعریف تابع f می‌توان تابع را مشخص کرد یا خیر؟ یعنی مثلاً اگر فقط این اطلاعات در دست باشد که f تابعی است حقیقی (تابع حقیقی تابعی است که $D_f\subset\mathbb{R}$) و قاعدهٔ تأثیر f روی اعضای D_f به صورت $f(x)=\frac{x^۲+۱}{x-۱}$ تعریف شده است. آیا می‌توان تابع f را مشخص کرد؟ (آیا می‌توانیم D_f و R_f را تعیین کنیم؟)

به مثال زیر توجه کنید :

اگر $A=\{-۱,۲,۳,۴\}$ و ضابطهٔ تابع f به صورت $f(x)=\sqrt{x-۱}$ تعریف شده باشد و بخواهیم تأثیر f را روی اعضای A تعیین کنیم، برای (-۱) که عضوی است از A دچار مشکل خواهیم شد زیرا $f(-۱)=\sqrt{-۱-۱}$ و می‌دانیم $\sqrt{-۲}$ درحوزهٔ اعداد حقیقی **تعریف** نشده است پس تابع f با توجه به ضابطه‌اش نمی تواند روی (-۱) اثر کند، بنابراین اگر بخواهیم D_f را معین کنیم به شکل $D_f=\{۲,۳,۴\}$ معرفی می‌شود و با توجه به D_f و ضابطهٔ f، $R_f=\{۱,\sqrt{۲},\sqrt{۳}\}$ خواهد بود. پس می‌توان گفت :

«**دامنهٔ تعریف تابع** f مجموعهٔ همه مقادیری است که تابع f با توجه به ضابطه‌اش **می‌تواند** روی آنها اثرکند» بنابراین جواب سؤال قبل مثبت است، یعنی همواره فقط با در دست داشتن ضابطهٔ تعریف تابع f می‌توان D_f و R_f ودرنتیجه تابع f را مشخص کرد.

مثال : تابع حقیقی f با ضابطه $f(x)=\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}$ مفروض است، D_f را برای این تابع مشخص کنید :

می‌دانیم تابع f فقط روی اعداد حقیقی، که باعث صفر شدن مخرج می‌شوند نمی‌تواند اثرکند پس اگر قرار دهیم $x^۲-۱=۰$ خواهیم داشت : $x=\pm۱$ بنابراین $D_f=\mathbb{R}-\{-۱,۱\}$.