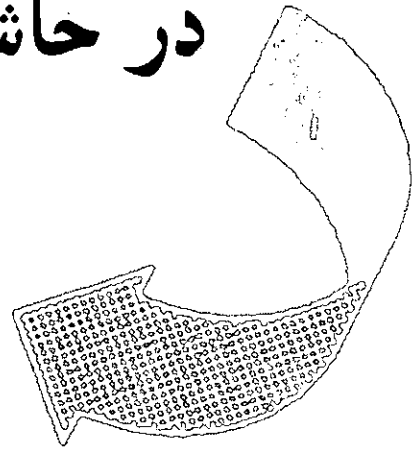
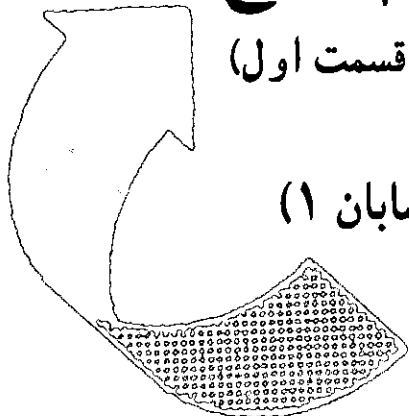


در حاشیه تابع و مفهوم تابع

(قسمت اول)

ریاضی (۳) نظام جدید و حسابان (۱)

◀ حمیدرضا امیری



مجموعه‌ای از مولفه‌های اول زوج مرتبهای f و مجموعه‌ای از مولفه‌های دوم آنها، تشکیل داد که اگر مجموعه اول را دامنه f بنامیم و مجموعه دوم را برد f و به ترتیب با نمادهای D_f و R_f نمایش دهیم در این صورت، $f \subseteq D_f \times R_f$.

در مثال فوق $D_f = \{2, 3, 4, 5\}$ و $R_f = \{3, 4, 5, 6\}$

تعریفی که به صورت فوق برای تابع آوردیم تعریفی بسیار محض بوده و این تعریف در عین حال که حالت کلی و عمومی دارد از نظر کاربردی احتیاجات همه شاخه‌های ریاضیات را برآورده نمی‌سازد و به همین دلیل این تعریف را به نوعی دیگر اما با رعایت همان کلیات، می‌توان بیان کرد.

در مثال قبیل تابع f به صورت $f = \{(2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$ را در نظر داشته باشید، اگر کمی دقت کنید، ارتباط خاصی بین مولفه‌های اول و دوم تمام زوجهای مرتب (بین اعضای دامنه و برد) f ، می‌یابید. در این مجموعه زوج مرتبها دارای این ویژگی هستند که، مولفه‌های دوم آنها یک واحد از مولفه اول بیشتر است پس می‌توان نوشت $f = \{(x, y) | y = x + 1\}$ که $x \in \{2, 3, 4, 5\}$ یا می‌توانیم بنویسیم $f = \{(x, x + 1) | x \in D\}$ حال اگر تابع f را به عنوان قاعده یا قانونی که هر x از D_f را به $(x + 1)$ مربوط می‌سازد، معرفی کنیم در واقع به نوعی دیگر تابع را تعریف کرده‌ایم، توجه دارید که در این تعریف تابع f به عنوان یک قاعده و یا در حالت کلی‌تر به عنوان یک عملگر، معرفی

می‌خواهیم راجع به یکی از مهمترین مفاهیم ریاضی یعنی تابع صحبت کنیم، مفهومی که ریاضیات بدون آن تقریباً هیچ است! مفهومی که حد و پیوستگی آن، مشتق و انتگرال‌گیری از آن، رسم آن، انواع مختلف آن و خواص آن، کتابهای ریاضی ما را اشباع کرده و ریاضی دانان بسیاری را به خود مشغول داشته است. مفهومی که توانسته در علوم دیگر همچون فیزیک، مکانیک و کلیه رشته‌های فنی نقشهای مهم ایفا کند.

در شاخه‌های مختلف ریاضیات برای معرفی تابع و تعریف آن شیوه‌های مختلفی به کار می‌رود که البته همگی معنی واحدی می‌دهند و فقط نوع گفتار و یا ابزارهای معرفی تابع فرق می‌کند، اما آنچه اهمیت دارد این است که مفهوم تابع با مفهوم مجموعه‌ها، همواره درهم آمیخته به طوری که حتی می‌توان برای شروع تابع را مجموعه‌ای از زوجهای مرتب تعریف کرد که در آن هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مولفه‌های اول برابر یافت نشود.

به عنوان مثال $f = \{(2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$ یک

تابع است.

اما $g = \{(2, 4), (1, 1), (1, -1), (4, 8)\}$ تابع نیست، زیرا

$(1, 1) \in g$ و $(1, -1) \in g$ و این با تعریف فوق تناقض دارد.

همان‌طور که مشاهده می‌کنید f مجموعه‌ای است از

زوجهای مرتب و می‌دانیم هر مجموعه از زوجهای مرتب حاصل عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعه است. در واقع، می‌توان

در ابتدا آمد، تناقض دارد.

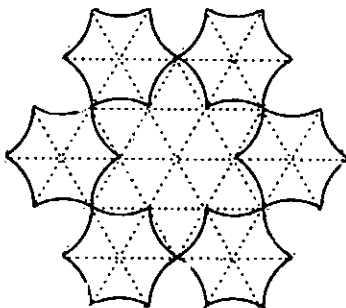
در این قسمت در نظر داریم اندکی بیشتر راجع به D_f بحث کنیم در واقع این سؤال را مطرح می‌کنیم که آیا فقط با داشتن ضابطه تعریف تابع f می‌توان تابع را مشخص کرد یا خیر؟ یعنی مثلاً اگر فقط این اطلاعات در دست باشد که f تابعی است حقیقی (تابع حقیقی تابعی است که $D_f \subset \mathbb{R}$) و قاعده تأثیر f روی اعضای D_f به صورت $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ تعریف شده است. آیا می‌توان تابع f را مشخص کرد؟ (آیا می‌توانیم D_f و R_f را تعیین کنیم؟)

به مثال زیر توجه کنید:

اگر $A = \{-1, 2, 3, 4\}$ و ضابطه تابع f به صورت $f(x) = \sqrt{x-1}$ تعریف شده باشد و بخواهیم تأثیر f را روی اعضای A تعیین کنیم، برای (-1) که عضوی است از A دچار مشکل خواهیم شد زیرا $f(-1) = \sqrt{-1-1} = \sqrt{-2}$ و می‌دانیم $\sqrt{-2}$ در حوزه اعداد حقیقی تعریف نشده است پس تابع f با توجه به ضابطه‌اش نمی‌تواند روی (-1) اثر کند، بنابراین اگر بخواهیم D_f را معین کنیم به شکل $D_f = \{2, 3, 4\}$ معرفی می‌شود و با توجه به D_f و ضابطه f ، $R_f = \{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ خواهد بود. پس می‌توان گفت:

«دامنه تعریف تابع f مجموعه همه مقادیری است که تابع f با توجه به ضابطه‌اش می‌تواند روی آنها اثر کند» بنابراین جواب سؤال قبل مثبت است، یعنی همواره فقط با در دست داشتن ضابطه تعریف تابع f می‌توان D_f و R_f و در نتیجه تابع f را مشخص کرد.

مثال: تابع حقیقی f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ مفروض است، D_f را برای این تابع مشخص کنید.
می‌دانیم تابع f فقط روی اعداد حقیقی، که باعث صفر شدن مخرج می‌شوند نمی‌تواند اثر کند پس اگر قرار دهیم $x^2 - 1 = 0$ خواهیم داشت: $x = \pm 1$ بنابراین $D_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$



می‌گردد که با قاعده خاصی روی اعضای دامنه‌اش عمل می‌کند یا اثر می‌کند و اعضای برد را تولید می‌کند، در این تعبیر نکته دیگری که قابل توجه می‌باشد، آن است که همواره قاعده f روی هر x از D_f اثر می‌کند و با تغییر x ، اعضای جدیدی از R_f به دست می‌آید و مشاهده کردید که در تعریف f به صورت $f = \{(x, y) | y = x + 1\}$ مجموعه‌ای برای x ها به شکل $D = \{2, 3, 4, 5\}$ معرفی کردیم و این بدان معنی است که y ها، تابع تغییرات x ها هستند و یا « y تابع x است» بنابراین برای مشخص کردن تابع f کافی است دو ویژگی از f برای ما مشخص باشد، یکی D_f و دیگری قاعده تأثیر f روی اعضای D_f .

معمولاً قاعده تأثیر f با چگونگی اثر تابع f روی اعضای D_f را با نماد $f(x)$ نمایش می‌دهند.

مثال: هر گاه $D_f = \{3, 6, 8, -1, 0\}$ و $f(x) = 2x + 2$ ، در این صورت تابع f را به شکل مجموعه‌ای از زوجهای مرتب و همچنین، برد f (R_f) را تعیین کنید:

$$f(x) = 2x + 2 \Rightarrow \begin{cases} f(3) = 2 \times 3 + 2 = 8 \\ f(6) = 2 \times 6 + 2 = 14 \\ f(8) = 2 \times 8 + 2 = 18 \\ f(-1) = 2 \times (-1) + 2 = 0 \\ f(0) = 2 \times 0 + 2 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_f = \{8, 14, 18, 0, 2\}$$

$$\text{و } f = \{(3, 8), (6, 14), (8, 18), (-1, 0), (0, 2)\}$$

حال با توجه به تعبیری که برای تابع و براساس تعریف کلی آن ذکر کردیم، می‌توانیم تابع را به شکل زیر نیز تعریف کنیم:
تعریف: تابع f قاعده‌ای است که به هر عضو مانند x از مجموعه D (دامنه) عضو منحصر بفردی به نام $f(x)$ از مجموعه R (برد) را نسبت می‌دهد.

توجه دارید در تعریف فوق صفت منحصر بفرد به این منظور به کار رفته که تعریف کلی تابع، خدشه دار نشود یعنی اگر f به x_1 عضو D از برد را نسبت دهد و به همان x_1 عضو D رانیز نسبت دهد و $y_1 \neq y_2$ در این صورت f به هر عضو D_f عضو منحصر بفردی نسبت نداده و اگر کمی دقت کنیم مشاهده می‌شود که $(x_1, y_1) \in f$ و $(x_1, y_2) \in f$ و این با تعریف تابع که