در حاشیهٔ تابع و مفهوم تابع
(قسمت سوّم)

• حمیدرضا امیری

اعمال جبری روی تابعها

اگر دو تابع f و g مفروض باشند، در این صورت مجموع $(f+g)$، تفاضل $(f-g)$، حاصل‌ضرب $(f.g)$ و خارج قسمت $(\frac{f}{g})$ این دو تابع تابعهایی هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

الف) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

ب) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$

ج) $(f.g)(x)=f(x).g(x)$

د) $(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$

هـ) اگر $r\in\mathbb{R}$ و $(rf)(x)=rf(x)$

دامنهٔ تابعهای $(f+g)$، $(f-g)$ و $(f.g)$ دقیقاً اشتراک دامنه‌های f و g است و دامنهٔ $\frac{f}{g}$ نیز به جز نقاطی که $g(x)=۰$، اشتراک دامنه‌های f و g است. دامنه (rf) همان دامنهٔ f است.

برای درکِ بهتر و فهمِ عمیقتر به مثالهای زیر توجه کنید:

مثال ۱: اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^۲-۱$، اولاً $(D_f\cap D_g)$ را مشخص کنید و ثانیاً حاصل $(f\pm g)$ و $(f.g)$ و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

$D_f=\mathbb{R}^+\cup\{۰\}\quad,\quad D_g=\mathbb{R}$

$\Rightarrow D_f\cap D_g=\mathbb{R}^+\cup\{۰\}$

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x}+x^۲-۱$

$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x}-x^۲+۱$

$(f.g)(x)=f(x).g(x)=\sqrt{x}(x^۲-۱)$

$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x}}{x^۲-۱}$

توجه: دامنهٔ تابعهای $(f\pm g)$ و $(f.g)$ همان $D_f\cap D_g$ است ولی دامنهٔ تابع $(\frac{f}{g})(x)$ شامل ±۱ نمی‌باشد یعنی،

$D_{\frac{f}{g}}=(\mathbb{R}^+\cup\{۰\})-\{-۱,۱\}$

مثال ۲: اگر دو تابع $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۵),(۴,۵),(۵,۰)\}$ و $g=\{(۱,۴),(۳,۰),(۵,۲),(۶,۱),(۷,۳)\}$ مفروض باشند، تابعهای $(f\pm g)$ و $(f.g)$ و $\frac{f}{g}$ و $(۴f)$ را مشخص کنید. قبل از هر چیز ابتدا $(D_f\cap D_g)$ را معین می‌کنیم،

$D_f=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$,

$D_g=\{۱,۳,۵,۶,۷\}\Rightarrow D_f\cap D_g=\{۱,۳,۵\}$

$\Rightarrow D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f.g}=\{1,3,5\}$,

$D_{\frac{f}{g}}=\{1,3,5\}-\{3\}=\{1,5\}$

با توجه به $D_f\cap D_g$ واضح است که تابعهای $f+g$ ، $f-g$ ، و $f.g$ فقط می‌توانند روی ۱ و ۳ و ۵ اثر کنند و طبق تعریف داریم :

الف) $(f+g)(1)=f(1)+g(1)=2+4=6$

$(f+g)(3)=f(3)+g(3)=5+0=5$

$(f+g)(5)=f(5)+g(5)=0+2=2$

به عبارت دیگر می‌توان نوشت :

$f+g=\{(1,2+4),(3,5+0),(5,0+2)\}$

ب) به همین ترتیب $(f-g)$ نیز معین می‌شود (بعهدهٔ خواننده)، و در مورد $f.g$ داریم،

ج) $(f.g)(1)=f(1)\times g(1)=2\times 4=8$

$(f.g)(3)=f(3)\times g(3)=5\times 0=0$

$(f.g)(5)=f(5)\times g(5)=0\times 2=0$

یا $\rightarrow f.g=\{(1,2\times 4),(3,5\times 0),(5,0\times 2)\}$

د) $(\frac{f}{g})(1)=\frac{f(1)}{g(1)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$(\frac{f}{g})(5)=\frac{f(5)}{g(5)}=\frac{0}{2}=0$

یا $\rightarrow \frac{f}{g}=\left\{(1,\frac{2}{4}),(5,\frac{0}{2})\right\}=\left\{(1,\frac{1}{2}),(5,0)\right\}$

هـ) $(4f)(1)=4f(1)=4\times 2=8$

$(4f)(2)=4f(2)=4\times 3=8$

$(4f)(3)=4f(3)=4\times 5=20$

$(4f)(4)=4f(4)=4\times 5=20$

$(4f)(5)=4f(5)=4\times 0=0$

و یا $\rightarrow 4f=\{(1,4\times 2),(2,4\times 3),(3,4\times 5),(4,4\times 5),(5,4\times 0)\}$

مثال ۳: اگر

$g(x)=\begin{cases}-x+1 & x\ge 2\\ x-2 & x<2\end{cases}$ و $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\ge 1\\ 2x-1 & x<1\end{cases}$

مطلوب است محاسبهٔ $(f+g)$ و $f.g$

$D_g=D_f=\mathbb{R}\Rightarrow D_f\cap D_g=\mathbb{R}$

اگر $x\ge 2\Rightarrow (f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$=(x^2+1)+(-x+1)=x^2-x+2$

اگر $x<2$:

I) $1<x<2\Rightarrow (f+g)(x)$
$=(x^2+1)+(x-2)=x^2+x-1$

II) $x<1\Rightarrow (f+g)(x)$
$=(2x-1)+(x-2)=3x-3$

III) $x=1\Rightarrow (f+g)(1)=f(1)+g(1)$
$=2+(-1)=-1$

محاسبهٔ $(f.g)$ مطابق مطالب فوق و در حالتهای ذکر شده به عهدهٔ خواننده، واگذار می‌شود.

مثال ۴: اگر $f(x)=2\sqrt{x}$، و $g(x)=3\sqrt{x}$ تابع $(f.g)$ و دامنهٔ آن را مشخص کنید

$(f.g)(x)=f(x).g(x)=2\sqrt{x}\times 3\sqrt{n}=6x$

در نگاه اول توقع داریم دامنهٔ $(f.g)$، $\mathbb{R}$ باشد زیرا $6x$ برای هر عدد حقیقی معنی دارد امّا $D_f=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ و $D_g=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ و $D_{f.g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$.

تذکر (قرارداد): برای نمایش $f.f$ از نماد f^2 استفاده می‌شود و به همین ترتیب داریم :

$f^3=f.f^2$, $f^4=f.f^3$, ... , $f^n=f.f^{n-1}$

ترکیب توابع

فرض کنیم تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^2$ و تابع g با ضابطهٔ $g(x)=(x+1)$ موجود بوده و بخواهیم عددی حقیقی مانند k را ابتدا تحت تأثیر تابع f و سپس حاصل آن را تحت تأثیر تابع g قرار دهیم در این صورت خواهیم داشت :

$f(k)=k^2$, $g(k^2)=(k^2+1)$

حال اگر بخواهیم تابعی بسازیم که کار این دو تابع را یکجا برای ما انجام دهد و مستقیماً عدد حقیقی k را به (k^2+1) تبدیل کند باید دو تابع f و g را با هم ترکیب کنیم، که در این صورت از نماد (gof) استفاده کرده و داریم :

$(gof)(x)=g(f(x))$

بنابراین با توجه به تابعهای f و g و تعریف فوق تابعی که

انتظارش را داشتیم به دست می‌آید،

$$(gof)(x)=g(f(x))=(f(x)+1)=(x^2+1)$$
$$\Rightarrow (gof)(k)=k^2+1$$

در واقع برای محاسبهٔ $(gof)(x)$ یا $g(f(x))$ در تابع g به جای xها، $f(x)$ را قرار می‌دهیم و همین مطلب به راحتی می‌تواند دامنهٔ (gof) را نیز برای ما تعریف کند پس :

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

یعنی دامنهٔ gof شامل همهٔ xهایی از دامنهٔ f است (زیرا اول f باید روی آنها اثر کند) که تأثیر f روی آنها و یا حاصل $f(x)$ در دامنهٔ g واقع باشد (تا بتواند g روی آنها اثر کند).

توجه دارید که fog نیز به طریق مشابه تعریف خواهد شد و بنابراین،

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

مثال ۱: اگر $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$ مطلوب است محاسبهٔ (fog)، (gof)، (fof)، (gog) و دامنه‌های هر یک.

ابتدا دامنه‌های f و g را مشخص می‌کنیم که خواهیم داشت :

$$D_f=\mathbb{R} \quad , \quad D_g=\mathbb{R}-\{1\}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2-1=\frac{4x}{(x-1)^2}$$

$$D_{fog}=\{x\in(\mathbb{R}-\{1\}) \mid g(x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}-\{1\}$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=\frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1}=\frac{x^2}{x^2-2}$$

$$D_{gof}=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\in(\mathbb{R}-\{1\})\}=\{x\in\mathbb{R} \mid (x^2-1)\neq 1\}$$
$$=\{x\in\mathbb{R} \mid x\neq\pm\sqrt{2}\}$$

$$(fof)(x)=f(f(x))=(x^2-1)^2-1=x^4-2x^2$$

$$D_{fof}=\{x\in\mathbb{R} \mid f(x)\in\mathbb{R}\}=\mathbb{R}$$

$$(gog)(x)=g(g(x))=\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}=\frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{2}{x-1}}\Rightarrow x\neq 1$$

$g(g(x))=\frac{2x}{2}=x$ (با شرط $x\neq 1$)

$$D_{gog}=\{x\in(\mathbb{R}-\{1\}) \mid g(x)\in(\mathbb{R}-\{1\})\}$$
$$=\left\{x\in(\mathbb{R}-\{1\}) \,\middle|\, \frac{x+1}{x-1}\neq 1\right\}=\mathbb{R}-\{1\}$$

(زیرا برای هر عدد حقیقی مخالف یک همواره حاصل $\frac{x+1}{x-1}$ مخالف یک است).

مسائل حل شده

مسألهٔ ۱: تابع $h(x)=\sqrt{x^2-1}$ را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. برای محاسبهٔ $h(x)$ ابتدا می‌توان (x^2-1) را محاسبه کرده و سپس از آن ریشهٔ دوم بگیریم پس اگر $f(x)=x^2-1$ و $g(x)=\sqrt{x}$ در این صورت :

$$g(f(x))=\sqrt{(x^2-1)}$$

مسألهٔ ۲: فرض کنید $g(x)=x^3-1$ و

$$f(x)=\begin{cases}2x & x\leq 1\\ 4 & 1<x<3\\ \sqrt[3]{x} & x>3\end{cases}$$

مطلوب است محاسبهٔ (fog)

$$fog(x)=f(g(x))=\begin{cases}2(x^3-1) & g(x)\leq 1\\ 4 & 1<g(x)<3\\ \sqrt[3]{(x^3-1)} & g(x)>3\end{cases}$$

$g(x)\leq 1\Rightarrow x^3-1\leq 1\Rightarrow x^3\leq 2\Rightarrow x\leq\sqrt[3]{2}$ از طرفی

$$1<g(x)<3\Rightarrow 1<x^3-1<3\Rightarrow 2<x^3<4$$
$$\Rightarrow \sqrt[3]{2}<x<\sqrt[3]{4}$$
$$g(x)>3\Rightarrow x^3-1>3\Rightarrow x^3>4\Rightarrow x>\sqrt[3]{4}$$

$$\Rightarrow fog(x)=\begin{cases}2x^3-2 & x\leq\sqrt[3]{2}\\ 4 & \sqrt[3]{2}<x<\sqrt[3]{4}\\ \sqrt[3]{x^3-1} & x>\sqrt[3]{4}\end{cases}$$

مسألهٔ ۳: اگر $f(x-1)=x^2-x+1$ باشد، $f(x)$ را بیابید.

برای حل این نوع مسائل $x-1=z$ فرض کرده و سپس $f(z)$ را پیدا کرده و در نهایت $f(x)$ را تشکیل می‌دهیم (به جای z ، x قرار می‌دهیم)

$$x-1=z\Rightarrow x=z+1\Rightarrow f(z)=(z+1)^2-(z+1)+1$$
$$\Rightarrow f(z)=z^2-3z+1\Rightarrow f(x)=x^2-3x+1$$

مسألهٔ ۴: اگر $f(4x)=\sqrt{\sin 4x-x}$ ، $f(x)$ را محاسبه کنید.

$۴x = z \Rightarrow x = \frac{z}{۴}$

$\Rightarrow f(۴x) = f(z) = \sqrt{\sin(۴\frac{z}{۴}) - \frac{z}{۴}}$

$\Rightarrow f(z) = \sqrt{\sin z - \frac{z}{۴}} \Rightarrow f(x) = \sqrt{\sin x - \frac{x}{۴}}$

مسألهٔ ۵: اگر $f = \{(۲,۳),(۴,۵),(۱,۲),(۳,۲)\}$ و $g = \{(۱,۱),(۲,۷),(۳,۵)\}$ مطلوب است محاسبهٔ fog و gof و fof و $f^{-1}of$ و fof^{-1}.

$D_{fog} = \{x \in D_g | g(x) \in D_f\}$

از طرفی می‌دانیم $D_f = \{۱,۲,۳,۴\}$ و $D_g = \{۱,۲,۳\}$ پس داریم،

$D_{fog} = \{x \in \{۱,۲,۳\} | g(x) \in \{۱,۲,۳,۴\}\}$

$\Rightarrow D_{fog} = \{۱\}$

$D_{gof} = \{x \in \{۱,۲,۳,۴\} | f(x) \in \{۱,۲,۳\}\}$

$\Rightarrow D_{gof} = \{۲,۳\}$

$(fog)(x) = f(g(x)) \Rightarrow (fog)(۱) = f(g(۱)) = f(۱) = ۲$

$\Rightarrow fog = \{۱,۲\}$

(تابع g، ۱ را به ۱ و f، ۱ را به ۲ تبدیل می‌کند. پس در نهایت (fog)، ۱ را به ۲ تبدیل می‌کند)

$(gof)(x) = g(f(x)) \Rightarrow g(f(۲)) = g(۳) = ۵$

و $g(f(۳)) = g(۲) = ۷ \Rightarrow gof = \{(۲,۵),(۳,۷)\}$

به همین ترتیب $fof = \{(۲,۲),(۱,۳),(۳,۳)\}$

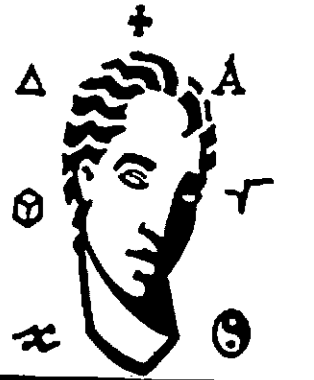
(تابع f، ۲ را به ۳ و سپس ۳ را به ۲ تبدیل می‌کند پس fof ۲ را در نهایت به ۲ تبدیل می‌کند و ۱ را به ۳ و ۳ را به ۳)

$f^{-1} = \{(۳,۲),(۵,۴),(۲,۱),(۲,۳)\}$

$fof^{-1} = \{(۳,۳),(۵,۵),(۲,۲)\}$,

$f^{-1}of = \{(۲,۲),(۴,۴),(۱,۱),(۳,۳)\}$

آیا می‌توانید ضابطه‌ای برای بیان fof^{-1} و $f^{-1}of$ به دست آورید؟



تفریح اندیشه ۲

چه کسی بازی را آغاز می‌کند؟

یک روز بیشتر به مسابقهٔ سرنوشت‌ساز باقی نمانده است. مربی تیم تنها یکی از سه بازیکن رفعتی، پهلوان، یا علی‌آبادی را برای آغاز بازی انتخاب می‌کند رفعتی برای این که بداند چه کسی برای این کار انتخاب شده است در رختکن به مربی نزدیک می‌شود و می‌پرسد: آقای مربی، اگر پهلوان بازی را آغاز می‌کند، بگو که علی آبادی نمی‌کند. اگر من می‌کنم سکه‌ای بینداز و اگر شیر آمد بگو پهلوان شروع نمی‌کند و اگر خط آمد بگو علی آبادی شروع نمی‌کند. شما که هیچ گاه رازتان را آشکار نمی‌کنید.

مربی درحالی که زیر دوش می‌رود می‌گوید: بعد از بیرون آمدن جوابت را می‌دهم.

ده دقیقه بعد بیرون می‌آید و درحالی که گلویش را صاف می‌کند می‌گوید: علی آبادی بازی نمی‌کند.

رفعتی فریاد می‌زند: گولت زدم! ده دقیقه قبل یک شانس از سه داشتم و اکنون شانس بین من و پهلوان است و به یک به دو افزایش یافته است.

مربی لبخندی زد و گفت: تو بازیکنی خنگ و ریاضیدانی خنگتر هستی. آن‌گاه بار دیگر زیر دوش رفت.

احتمال آغاز بازی برای هر بازیکن چقدر است؟

جواب در صفحهٔ ۸۸