در حاشیهٔ تابع

(قسمت پنجم)

●حمیدرضا امیری

تابعهای متناوب

تابع f را متناوب می‌گویند، در صورتی که عددی مخالف صفر مانند T وجود داشته باشد به قسمی که اولاً اگر $x \in D_f$ آنگاه $(x+T)$ و $(x-T)$ نیز عضو D_f بوده و ثانیاً $f(x+T)=f(x)$. کوچکترین عدد مثبتی مانند T (در صورت وجود) که در رابطهٔ $f(x+T)=f(x)$ صدق می‌کند، تناوب اصلی تابع f می‌نامند.

مثال ۱: $\sin x = \sin(x+2k\pi)$ و $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ پس تابعهای سینوس و کسینوس متناوب بوده که 2π کوچکترین عدد مثبتی است که در رابطه‌های فوق صدق می‌کند لذا تناوب اصلی این دو تابع 2π است. (تناوب اصلی $y=\mathrm{tg}x$ و $y=\cot gx$ را بیابید)

مثال ۲: اگر فرض کنیم $f(x)=x-[x]$ ، در این صورت برای هر عدد صحیح مانند n داریم:

$$f(x+n)=(x+n)-[x+n]=(x+n)-([x]+n)=x-[x]=f(x)$$

تناوب اصلی تابع فوق $T=1$ است.

در حالت کلی تناوب اصلی تابع با ضابطهٔ $f(x)=nx-[nx]$ برابر است با $\frac{1}{|n|}$ ثابت کنید f تابعی متناوب است.

مثال ۳: تابع ثابت با ضابطهٔ $f(x)=k$ نیز تابعی متناوب است، زیرا برای هر عدد حقیقی مانند P همواره $f(x+T)=k=f(x)$ ، اما دورهٔ تناوب ندارد، زیرا کوچکترین عدد حقیقی مثبت که در رابطهٔ فوق صدق کند، وجود ندارد.

نکات و یادآوریهای مهم:

۱ ـ تناوب اصلی توابع با ضابطه‌های $f(x)=\sin^{2n-1} ax$ و $g(x)=\cos^{2n-1} ax$ ، $\frac{2\pi}{|a|}$ و $h(x)=\mathrm{tg}^n ax$ و $t(x)=\cot g^n ax$ $n\in N$ برابر است با $\frac{\pi}{|a|}$.

اثبات: برای تابع f ثابت می‌کنیم $T=\frac{2\pi}{|a|}$

می‌دانیم $\sin^{2n-1}(ax+2k\pi)=\sin^{2n-1}ax \quad (1)$

از طرفی $f(x+T_1)=\sin^{2n-1}a(x+T_1)=\sin^{2n-1}(ax+aT_1) \quad (2)$

با مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) به این نتیجه می‌رسیم که اگر $aT_1=2k\pi$، آنگاه $f(x+T_1)=f(x)$ که اگر $aT_1=2k\pi$ خواهیم داشت:

$$aT_1=2k\pi \Rightarrow T_1=\frac{2k\pi}{a} \xrightarrow{k=1} T=\frac{2\pi}{|a|}$$

۲ ـ تناوب اصلی توابع با ضابطه‌های $f(x)=\sin^{2n} ax$ و $g(x)=\cos^{2n} ax$ برابر است با $\frac{\pi}{|a|}$ (اثبات به عهدهٔ خودتان)

۳ ـ اگر تابعی از اعمال جبری روی چند تابع متناوب حاصل شده باشد. کوچکترین مضرب مشترک تناوبهای آن تابعها، تناوب اصلی تابع اصلی را تشکیل می‌دهد.

مثال ۴: اگر $f(x)=\sin^2\frac{4x}{3}+\cos\frac{3x}{2}+tg\frac{3x}{2}$ در این صورت دورهٔ تناوب تابع f را بیابید.

$$T_{\sin^2\frac{4x}{3}}=\frac{\pi}{\frac{4}{3}}=\frac{3\pi}{4}$$

$$T_{\cos\frac{3x}{2}}=\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{4\pi}{3}$$

و

$$T_{tg\frac{3x}{2}}=\frac{\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{2\pi}{3}$$

حال کوچکترین مضرب مشترک $\frac{3\pi}{4}$ و $\frac{4\pi}{3}$ و $\frac{2\pi}{3}$ را به‌دست می‌آوریم که برای این کار کافی است ک‌م‌م صورتها و ب‌م‌م مخرج کسرها را محاسبه کرده و متناظراً کسری تشکیل دهیم،

$$\left.\begin{array}{l}\text{ک م م}: 2\pi,3\pi,4\pi=12\pi\\ \text{ب م م}: 3,3,4=1\end{array}\right\}\Rightarrow T=\frac{12\pi}{1}=12\pi$$

تذکر: اگر به کمک فرمولها و رابطه‌های جبری یا مثلثاتی بتوانیم تابع f را ساده‌تر کرده و دورهٔ تناوب کوچکتری بیابیم، آن دورهٔ تناوب کوچکتر به عنوان دورهٔ تناوب شناخته می‌شود. به‌عنوان مثال تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ در ظاهر دارای تناوب اصلی 2π است امّا با تقسیم صورت و مخرج کسر بر cosx (برای $k,x\neq\frac{k\pi}{2}$ فرد) داریم $f(x)=\frac{tgx+1}{tgx-1}$ که تناوب اصلی سادهٔ شدهٔ آن π می‌باشد.

ـ اگر f تابعی متناوب با تناوب اصلی T باشد در این صورت $|f|$ نیز متناوب بوده و معمولاً تناوب اصلی آن یا T و یا $\frac{T}{2}$ خواهد بود که با امتحان کردن به راحتی می‌توان آن را به‌دست آورد. مثلاً تناوب اصلی $f(x)=\sin^2 x+\sin x$، 2π و تناوب اصلی $|f|$ نیز 2π است ولی تناوب اصلی $g(x)=tgx+\cot gx$، π می‌باشد، در صورتی که تناوب اصلی $|g|$، $\frac{\pi}{2}$ است.

مثال ۵: آیا تابع با ضابطه $f(x)=\cos\pi x+tg2x$ متناوب است؟

$$T_{\cos\pi x}=\frac{2\pi}{\pi}=2\ ,\ T_{tgx}=\frac{\pi}{2}$$

برای $\frac{\pi}{2}$ و ۲، ک‌م‌م نمی‌توان تعریف کرد پس f متناوب نیست.

مثال ۶: آیا تابع با ضابطهٔ $f(x)=\cos\pi x+3x-[3x]$ متناوب است؟

$$T'_{\cos\pi x}=\frac{2\pi}{\pi}=2\ ,\ T''_{3x-[3x]}=\frac{1}{3}$$

ک‌م‌م: $2,\frac{1}{3}\to T=2$

۴ ـ یکی از کاربردهای مفهوم تناوب در تابعهای متناوب در رسم چنین تابعهایی است یعنی برای رسم یک تابع متناوب کافی است که ابتدا دورهٔ تناوب تابع را مشخص کرده و فقط نمودار تابع را در یک تناوب اصلی رسم کنیم و در فواصل دیگر این دوره نمودار تابع به همان صورت تکرار می‌شود. مثلاً نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\sin x$ در هر 2π تکرار می‌شود.

۵ ـ اگر T تناوب اصلی تابع f باشد و k عددی حقیقی، در این صورت $\frac{T}{k}$ تناوب اصلی تابع با ضابطهٔ $f(kx)$ می‌باشد.

$$f\left[k(x+\frac{T}{k})\right]=f(kx+T)=f(kx)$$

زیرا T دورهٔ تناوب f است.

$$(f(x+T)=f(x)\xrightarrow{x\to kx}f(kx+T)=f(kx)$$

مثال ۷: ثابت کنید تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$ متناوب است و هر عدد گویای غیرصفر تناوبی برای تابع محسوب می‌شود.

اگر فرض کنیم T_1 عددی گویا باشد در این صورت داریم

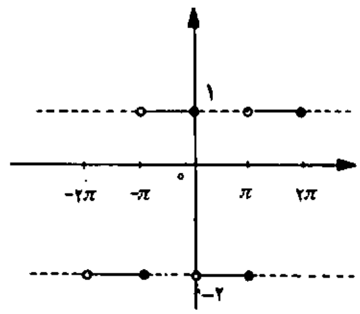
I) $x\in Q\Rightarrow(x+T_1)\in Q\Rightarrow f(x+T_1)=1=f(x)$

II) $x\notin Q\Rightarrow(x+T_1)\notin Q\Rightarrow f(x+T_1)=0=f(x)$

مثال ۸: اگر تابع f با دورهٔ تناوب 2π در فاصله $[-2\pi,0]$ به صورت زیر تعریف شده باشد، نمودار این تابع را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-2 & -2\pi<x\leq-\pi\\ 1 & -\pi<x\leq 0\end{cases}$$

برای رسم چنین تابعی ابتدا در فاصلهٔ تعریف شده تابع را رسم کرده و چون تابع متناوب و تناوب اصلی آن ۲π است در فاصله‌های به طول ۲π همان نمودار را تکرار می‌کنیم.



۶ ـ اگر f تابعی متناوب با تناوب اصلی $T_۱$ و g نیز تابعی متناوب با تناوب اصلی $T_۲$ باشد، در این صورت fog متناوب با تناوب اصلی $T_۲$ و gof نیز متناوب با تناوب اصلی $T_۱$ است.

طبق‌فرض‌داریم: $f(x+T_۱)=f(x)$ و $g(x+T_۲)=g(x)$

$$(fog)(x+T_۲)=f(g(x+T_۲))=f(g(x))=(fog)(x)$$
$$(gof)(x+T_۱)=g(f(x+T_۱))=g(f(x))=(gof)(x)$$

تبصرهٔ مهم: اگر f تابعی متناوب با تناوب اساسی $T_۱$ باشد و $g(x)=\sec x$ یا $g(x)=\cos x$ در این صورت تناوب اساسی تابع (gof) ممکن است $\frac{T}{۲}$ باشد.

مثال ۹: اگر $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ در این صورت داریم:

$$T_{(\sin x)}=۲\pi$$

از طرفی،

$$(gof)(x+\pi)=\cos(\sin(x+\pi))=\cos(-\sin x)=$$
$$\cos(\sin x)=(gof)(x)\Rightarrow T_{(gof)}=\pi$$

۷ ـ تناوب اساسی ۴ تابع با ضابطه‌های زیر، $\frac{\pi}{۲a}$ می‌باشد.

الف) $f(x)=\sin^{۲n}ax+\cos^{۲n}ax \quad n\in\mathbb{N}\ ,\ n\neq ۱$

ب) $f(x)=tg^{۲n}ax+\cot g^{۲n}ax \quad n\in\mathbb{N}$

ج) $f(x)=|\sin^n ax|+|\cos^n ax| \quad n\in\mathbb{N}\ ,\ n\neq ۲$

د) $f(x)=|tg^n ax|+|\cot g^n ax| \quad n\in\mathbb{N}$

اثبات ب) فرض کنیم تناوب اساسی تابع f برابر با T باشد در این صورت داریم:

$$f(x+T)=tg^{۲n}a(x+T)+\cot g^{۲n}a(x+T)$$
$$=tg^{۲n}(ax+aT)+\cot g^{۲n}(ax+aT)$$

حال اگر قرار دهیم $aT=\frac{(۲k-۱)\pi}{۲}$ در این صورت $f(x+T)=f(x)$ خواهد شد زیرا:

$$tg^{۲n}(ax+\frac{(۲k-۱)\pi}{۲})=\cot g^{۲n}ax$$

و

$$\cot g^{۲n}(ax+\frac{(۲k-۱)\pi}{۲})=tg^{۲n}ax$$
$$\Rightarrow aT=\frac{(۲k-۱)\pi}{۲}\Rightarrow T=\frac{(۲k-۱)\pi}{۲a}\xrightarrow{k=۱}T=\frac{\pi}{۲a}$$

تمرین

۱ ـ تناوب اصلی هریک از تابعهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $f(x)=۳x-[۳x]$

ب) $f(x)=[۲x]-۲x$

ج) $f(x)=\sin^۳ ۲x-\cos^۴ ۳x+tg۶x$

د) $f(x)=\sin x\cos x$

هـ) $f(x)=\sin x+\cos x$

و) $f(x)=\sin ۲x\cos x$

(در قسمت (و) از تبدیل حاصل ضرب به حاصل جمع استفاده کنید)

۲ ـ اگر f تابعی متناوب با تناوب اصلی ۲ باشد و در فاصلهٔ [۲،۲−] به صورت زیر تعریف شده باشد. این تابع را در فاصلهٔ [۶،۶−] رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}-۱ & -۲\leq x<۰\\ ۱ & ۰\leq x\leq ۲\end{cases}$$