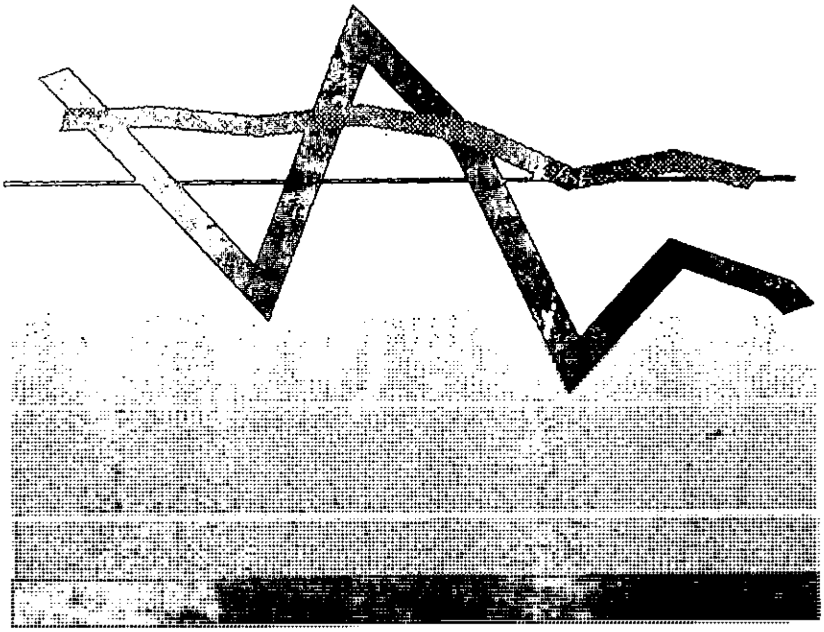

درحاشیه تابع

قسمت ششم

● حمید رضا امیری

تابعهای زوج و فرد

تعریف: اگر تابع f با D_f مفروض و برای هر $x \in D_f$ ، همواره $-x \in D_f$ در این صورت:

الف) تابع f را زوج می‌نامیم. اگر برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $f(-x)=f(x)$.

ب) تابع f را فرد می‌نامیم، اگر برای هر $x \in D_f$ داشته باشیم: $f(-x)=-f(x)$.

مثال ۱: تابع با ضابطهٔ $f(x)=2x^4+x^2-3$ زوج است، زیرا:

$$D_f=\mathbb{R}, f(-x)=2(-x)^4+(-x)^2-3=2x^4+x^2-3=f(x)$$

مثال۲: تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^3-x$ فرد است، زیرا:

$$D_f=\mathbb{R} \quad , \quad f(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x=-f(x)$$

مثال ۳: تابع با ضابطهٔ $f(x)=\log\frac{x+1}{-x+1}$ فرد است، زیرا:

$$D_f=(-1,1) \quad ,$$

اگر $x \neq 1 \Rightarrow f(-x)=\log\frac{-x+1}{-(-x)+1}=\log\left(\frac{x+1}{-x+1}\right)^{-1}=$

$$(-1)\log\frac{x+1}{-x+1}=-f(x)$$

مثال ۴: تابع با ضابطهٔ $f(x)=-2$ زوج است، زیرا:

$$D_f=\mathbb{R} \quad , \quad f(-x)=-2=f(x)$$

مثال۵: اگر $f(x)=0$ در این صورت f تابعی هم زوج و هم فرد است، زیرا:

$$f(-x)=0=f(x)$$

$$f(-x)=0=-0=-f(x)$$

مثال ۶: تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-x$ نه زوج است و نه فرد، زیرا:

$$f(-x)=(-x)^2-(-x)=x^2+x \neq f(x)$$

و همین طور $f(-x) \neq -f(x)$

مثال ۷: تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^n$ ، گاهی زوج و گاهی فرد است، زیرا:

$$n=2k \Rightarrow f(-x)=(-x)^{2k}=x^{2k}=x^n=f(x)$$

$$n=2k+1 \Rightarrow f(-x)=(-x)^{2k+1}=-x^{2k+1}=-x^n=-f(x)$$

نکتهٔ مهم: اگر f تابعی فرد باشد و $0 \in D_f$ در این صورت همواره $f(0)=0$ زیرا برای هر $x \in D_f$ داریم $f(-x)=-f(x)$ پس باید:

$$f(-0)=-f(0) \Rightarrow f(0)=-f(0) \Rightarrow 2f(0)=0 \Rightarrow f(0)=0$$

نتیجه: اگر در تابعی $f(0)\neq 0$ آنگاه این تابع نمی‌تواند تابعی فرد باشد. البته توجه دارید که عکس نکتهٔ فوق برقرار نیست، یعنی اگر در تابعی $f(0)=0$ همواره نمی‌توان حکم کلی صادر کرد که؛ تابع f فرد است، به عنوان مثال درتابع با ضابطه $f(x)=x^2-x$ داریم $f(0)=0$ و این تابع فرد نیست.

مثال ۸: تابعهای سینوس و تانژانت و کتانژانت، فرد و تابع کسینوس زوج است (ثابت کنید).

نکات مهم:

۱ــ اگر f و g هر دو تابعهایی زوج یا هر دو فرد باشند، در این صورت ترکیب آنهابه ترتیب، همواره زوج یا فرد است.

I) فرض کنیم $f(-x)=f(x)$ ، $g(-x)=g(x)$

$$(fog)(-x)=f(g(-x))=f(g(x))=(fog)(x)$$

II) فرض کنیم $f(-x)=-f(x)\ ,\ g(-x)=-g(x)$

$(fog)(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))=-f(g(x))=$
$-(fog)(x)$

۲ ــ اگر f و g دو تابع و یکی زوج و دیگری فرد باشد، در این صورت همواره (fog) و (gof) زوج می‌باشند. (اثبات به عهدهٔ خودتان)

۳ ــ حاصل ضرب دو تابع فرد یا دو تابع زوج تابعی زوج است، اگر f و g هر دو فرد باشند داریم:

$(f\times g)(-x)=f(-x)\times g(-x)=$

$=-f(x)\times -g(x)=f(x)\times g(x)=(f\times g)(x)$

پس $(f\times g)$ تابعی زوج است.

برای حالتی که هر دو زوج باشند نیز مانند بالا ثابت می شود.

۴ ــ حاصل ضرب یک تابع زوج در یک تابع فرد، تابعی فرد است (ثابت کنید).

۵ ــ حاصل ضرب یک عدد حقیقی در یک تابع فرد، تابعی فرد و حاصل ضرب آن در یک تابع زوج تابعی زوج است (ثابت کنید).

۶ ــ مجموع و تفاضل دو تابع زوج، تابعی زوج و مجموع و تفاضل دو تابع فرد، تابعی فرد است (ثابت کنید).

۷ ــ اگر f یک تابع دلخواه و D_f نسبت به مبدأ متقارن باشد، در این صورت، همواره $h(x)=f(x)+f(-x)$ تابعی زوج و $k(x)=f(x)-f(-x)$ تابعی فرد می‌باشد و نیز همواره می‌توان هر تابع دلخواه که دامنهٔ متقارنی داشته باشد چون f را به‌صورت مجموع دو تابع نوشت که یکی از آنها زوج و دیگری فرد باشد، زیرا:

$h(-x)=f(-x)+f(-(-x))=$

$=f(-x)+f(x)=f(x)+f(-x)=h(x)$

$k(-x)=f(-x)-f(-(-x))=$

$=f(-x)-f(x)=-(f(x))-f(-x)=-k(x)$

از طرفی اگر f تابعی دلخواه باشد، همواره داریم:

$$f(x)=\frac{1}{2}[(f(x)+f(-x))+(f(x)-f(-x))]$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}[h(x)+k(x)]=\underbrace{\frac{1}{2}h(x)}_{\text{زوج}}+\underbrace{\frac{1}{2}k(x)}_{\text{فرد}}$$

۸ ــ با توجه به تعریف تابع زوج و تابع فرد، نتیجه می‌گیریم که؛ اگر f تابعی زوج باشد چون با تغییر x به $(-x)$ معادلهٔ تابع تغییر نمی‌کند، پس محور y ها، محور تقارن f است و به همین قیاس اگر g تابعی فرد باشد، محور x ها، محور تقارن آن خواهد بود (به شرط آن که D_f و D_g نسبت به مبدأ، متقارن باشند).

۹ ــ اگر f تابعی فرد و مشتق‌پذیر باشد، آن گاه f' تابعی زوج و اگر f زوج و مشتق‌پذیر باشد f' فرد است.

تمرین

۱ ــ ثابت کنید، تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+3|+|x-3|$ تابعی زوج و تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+3|-|x-3|$ تابعی فرد است.

۲ ــ فرد یا زوج بودنِ هر یک از توابع زیر را بررسی کنید.

۱) $f(x)=\dfrac{|x|}{[x]-[-x]}$

۲) $g(x)=\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$

۳) $f(x)=\sqrt{|x-1|}+\sqrt{|x+1|}$

۴) $g(x)=|x|+\cos x$

۵) $f(x)=|x+1|-x|x|-|x-1|$

۶) $f(x)=[x]x$

۷) $f(x)=\begin{cases}-x^2 & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

۸) $g(x)=|x^2-1|+|-x|$

۹) $f(x)=\dfrac{[x]}{|x|x^3}$

۱۰) $f(x)=\sin(\cos x)$

۱۱) $g(x)=tg(\cos x)$

۱۲) $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{Arc\,cotg}x}$

۱۳) $g(x)=\log\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$