مقالهٔ کلاسیک

حرف S

دانلد کنوت
ترجمهٔ شکوفه شفیعی‌ابراهیمی

چند سال پیش وقتی دربارهٔ طراحی یک الفبای مناسب برای حروفچینی با وسایل جدید فکر می‌کردم، فهمیدم که طراحی ۲۵ حرف از حروف الفبای انگلیسی نسبتاً ساده است. حرف باقیمانده «S» بود. سه شبانه روز اوقات پر تلاش مشقت‌باری گذراندم تا فهمیدم که واقعاً «S» مناسب چطور می‌تواند تعریف شود. راه حلی که در نهایت به آن رسیدم شامل ریاضیات جالبی بود و من عقیده دارم که دانشجویان حسابان و هندسهٔ تحلیلی، همانند من از تحلیل این مسأله لذت خواهند برد. هدف این مقاله توضیح چیزی است که من اکنون آن را به‌عنوان ریاضیاتِ درست و اصولیِ Sهای چاپی می‌شناسم و نیز آوردن مثالی از زبان متافونت (METAFONT) که اخیراً در حال پروراندن آن بوده‌ام. (متافونت یک سیستم و زبان رایانه‌ای است که هدف از آن طراحی شکل حروف است، و توصیف کاملی از آن در [۳، بخش ۳] آمده است).

شاید قبل از ورود به بحث فنی باید بگویم که اولین بار چرا دربارهٔ چنین چیزی فکر کردم. دلیل اصلی آن این است که فناوری کنونی چاپ اساساً مبتنی بر ریاضیات گسسته و علوم رایانه است و نه خواص فلزات و حروف چاپی منقول. اکنون ساختن یک لوح برای یک صفحهٔ چاپی، اساساً ساختن یک ماتریس عظیم از صفرها و یک‌هاست که صفرها فضاهای سفید و یک‌ها جای مرکب چاپ را مشخص می‌کنند. من می‌خواستم ویراست دوم یکی از کتابهایم شبیه ویراست اولش باشد که با فناوری قدیمی سرب داغ حروفچینی شده بود؛ و وقتی که فهمیدم این مشکل را می‌توان با تکنیکهای مناسب ریاضیات گسسته و علوم رایانه حل کرد، نتوانستم در برابر این وسوسه

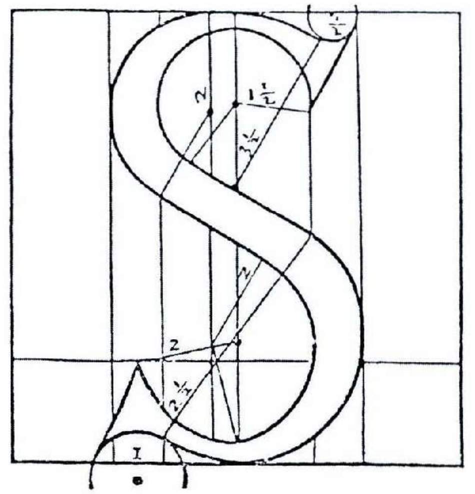
این مقاله را دانلد کنوت (Donald E. Knuth) در زمانی نوشته که مشغول تکمیل زبان رایانه‌ای متافونت (METAFONT) برای طراحی حروف چاپی بوده است، و از این زبان در ترسیم ریاضیِ حرف S و سایر نمادها و حروف این مقاله استفاده کرده است. ویژگی انقلابی متافونت این است که امکان طراحی دسته‌های کاملی از فونتها یا قلمهای حروف را در اختیار کاربر قرار می‌دهد یعنی کاربر می‌تواند اندازه و جزئیات شکل هر حرف را با تغییر دادن پارامترها به دلخواه خود مشخص کند. اختراع متافونت جزئی از برنامهٔ کلی کنوت برای ابداع سیستم حروفچینی تک (TeX) بود که مدت ده سال (از ۱۹۷۶ به بعد) مشغلهٔ اصلی او در دانشگاه استنفرد بود. سیستم تک با ویژگیهای ممتازی که به‌خصوص از لحاظ نمادسازی، صفحه‌آرایی، و امکانات ویرایش دارد، تحولی اساسی در حروفچینی متنهای ریاضی و علمی پدید آورده و استفاده از آن در جامعهٔ ریاضی فراگیر شده است. حاصل نهایی کار کنوت در زمینهٔ تک و متافونت در سال ۱۹۸۶ در پنج جلد کتاب با عنوان رایانه و حروفچینی انتشار یافت.

دانلد کنوت، ریاضیدان و دانشمند برجستهٔ رایانه به سال ۱۹۳۸ در شهر میلواکی واقع در ایالتِ ویسکانسین آمریکا به دنیا آمد. در سال ۱۹۶۳ از مؤسسهٔ فناوری کالیفرنیا دکتری ریاضی گرفت، بیشتر دورهٔ تحقیق و تدریس خود را به‌عنوان استاد علوم رایانه در دانشگاه استنفرد گذراند، و در سال ۱۹۹۳ بازنشسته شد. موضوع رسالهٔ دکتری و علائق ریاضی کنوت در زمینهٔ ترکیبیات بوده و از آنجا به نظریهٔ الگوریتها و به‌طور کلی به علوم رایانه روی آورده و دستاوردها و آثار مهمی در این زمینه دارد که از جمله می‌توان به الگوریتم کنوت‌ـبندیکس و اثر بزرگ چند جلدی او با عنوان هنر برنامه‌نویسی رایانه اشاره کرد.

مشخصات اصل مقاله این است

Donald E. Knuth, "The letter S", *Math. Intelligencer*, (3) **2** (1980) 114-122.

.1., con quello tondo quale ha lo suo puncto de mezo fora del quadro, longe da la inferiore linea del quadro puncto mezo. Poi largo lo circino puncti .2., ponendo una puncta dove finisti la inferiore parte del .S. qual fu facta a drita linea, cioè longe da la linea del spacio da parte drita puncti .2., e altri



puncti .4. da la [linea] inferiore del quadro. L'altra puncta longe da quella del spacio da parte sinistra puncti .2. descenderai in tondo verso man drita tanto che giongi sopra la media linea. Poi con dicta largheza de circino ponendo l'una puncta dove al presente finisti, l'altra puncta longe da la linea del spacio da parte sinistra puncti .2., venendo dal dicto ultimo loco del .S. tanto che sia lontano da la inferiore linea del quadro puncti .2. Poi da questa ultima parte in tondo vengasi a drita linea a congiungere con lo inferiore tondo longe da la linea da parte sinistra del quadro puncti .1. e sette octavi; & sarà finita la littera .S., come apertamente si vede.

شکل۱ روش تورنیلو در «ترسیم S به کمک مربع» در سال ۱۵۱۷ [۴، ص. ۴۵].

که خودم راه‌حلی بیابم، مقاومت کنم.

مرجع [۲] دربارهٔ پیش‌زمینهٔ کار من بیشتر توضیح می‌دهد و نیز تاریخ رویکردهای ریاضی اولیه به طراحی حروف را توصیف می‌کند. بالاخص نشان می‌دهد که چطور چندین نفر در قرنهای شانزدهم و هفدهم قصد داشتند که S را به‌طور هندسی با خط‌کش و پرگار رسم کنند.

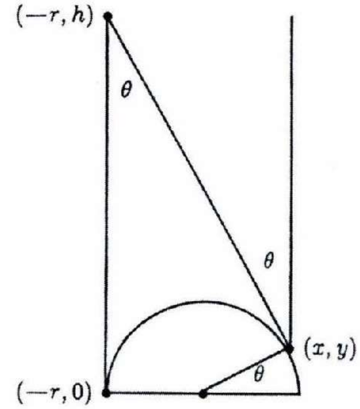
فرانچسکو تورنیلو[1] در سال ۱۵۱۷ یک الفبای هندسی منتشر کرد که نمونه‌ای از این اقدامات اولیه است. بیایید به روش او در ترسیم S بنگریم تا با مسألهٔ مورد بحث بیشتر آشنا شویم. (شکل ۱ را ببینید.) این روش را می‌توانیم به زبان جدید ریاضی به‌صورت زیر شرح دهیم:

یک «S» در یک مربع ۹×۹ رسم می‌شود که می‌توانیم آن را با مختصات دکارتی (x, y) به‌ازای $۰ \le x \le ۹$ و $۰ \le y \le ۹$ نمایش دهیم، باید چهارده نقطه را روی مرز حرف تعریف کنیم. آنها را $(x_۱, y_۱)$، $(x_۲, y_۲)$، …، $(x_{۱۴}, y_{۱۴})$ می‌نامیم. نقطهٔ ۱، $(۴٫۵, ۹)$ است و یک کمان دایره‌ای از این نقطه به مرکز $(۴٫۵, ۵٫۵)$ و شعاع ۳٫۵ تا نقطهٔ ۲ که در آنجا $x_۲ = ۶$، رسم می‌شود [بنابراین $y_۲ = ۵٫۵ + \sqrt{۱۰} \approx ۸٫۶۶$]. کمان کوچکی به مرکز $(۶٫۵, ۹)$ و شعاع ۰٫۵ از نقطهٔ $(۶٫۵, ۸٫۵) = ۳$ تا $(۷, ۹)$ رسم می‌شود. خط راستی از نقطهٔ $(۶, ۷) = ۴$ تا جایی که بر این کمان مماس گردد کشیده می‌شود؛ این نقطه را ۵ می‌نامیم. [در ادامه می‌بینیم که نقطهٔ ۵ دارای مختصات $(۶\frac{۱۶}{۱۷}, ۸\frac{۱۳}{۱۷})$ است. جالب است که حدس بزنیم تورنیلو از دانستن این مطلب خوشحال شده یا نه.] حال کمانی به مرکز $(۴, ۷)$ و شعاع ۲ از نقطهٔ $(۴, ۹) = ۶$ تا نقطهٔ ۷ که در آنجا $x_۷ = ۳$ و $y_۷ < ۷$، کشیده می‌شود [بنابراین $y_۷ = ۷ - \sqrt{۳} \approx ۵٫۲۷$]. خط راستی از نقطهٔ ۷ تا نقطهٔ $(۵, ۴) = ۸$ رسم می‌شود. سپس کمانی به مرکز $(۴٫۵, ۷\frac{۱}{۸})$ از نقطهٔ ۴ تا نقطهٔ $(۳٫۵, ۶) = ۹$ رسم می‌گردد و ادامه‌اش به‌صورت خط راستی تا نقطهٔ $(۶, ۴٫۵) = ۱۰$ کشیده می‌شود. نیمدایره‌ای به مرکز $(۴٫۵, ۲٫۵)$ و شعاع ۲٫۵ از این نقطه تا نقطهٔ $(۳. ۰٫۵) = ۱۱$ می‌رود. حال کمان دایره‌ای کوچک دیگری به مرکز $(۲٫۵, y)$ و شعاع ۱ از نقطهٔ ۱۱ تا نقطهٔ ۱۲ که در آنجا $x_{۱۲} = ۱\frac{۷}{۸}$، رسم می‌شود [بنابراین $y = (۱ - \sqrt{۳})/۲ \approx -۰٫۳۷$ و $y_{۱۲} = (\sqrt{۳۹} + ۴ - ۴\sqrt{۳})/۸ \approx ۰٫۴۱$]. کمانهایی دایره‌ای به شعاع ۲ از نقطهٔ ۸ تا نقطهٔ ۱۳ به مرکز نقطه‌ای که مختص x آن برابر با ۴ است و $x_{۱۳} = ۴٫۵$، رسم می‌گردد [بنابراین مرکز $(۴, ۴ - \sqrt{۳} \approx ۲٫۲۷)$ است و $y_{۱۳} = ۴ - \sqrt{۳} - \sqrt{۳٫۷۵} \approx ۰٫۳۳$]، و از نقطهٔ ۱۳ تا نقطهٔ ۱۴ به مرکز نقطه‌ای که مختص x آن برابر با ۴٫۵ است و $y_{۱۴} = ۲$، رسم می‌شود [بنابراین مرکز $(۴٫۵, ۶ - \sqrt{۳} - \sqrt{۳٫۷۵} \approx ۲٫۳۳)$ است و $x_{۱۴} = ۴٫۵ - \sqrt{۴ - (۴ - \sqrt{۳} - \sqrt{۳٫۷۵})^۲} \approx ۲٫۵۳$]. و بالاخره خط راستی از نقطهٔ ۱۴ تا نقطهٔ ۱۲ کشیده می‌شود.

برای خواننده جالب خواهد بود که پیش از مطالعهٔ ادامهٔ مقاله یک برگ کاغذ شطرنجی بردارد و این ترسیم کلاسیک را خودش انجام دهد. شرح تورنیلو واقعاً در این حد دقیق نبود و من سعی کردم که بیشترین معنای ممکن را از بیانات او بیرون بکشم، به نظر می‌رسد که او همان‌قدر با «S»ها مشکل داشته که من، چون بقیهٔ حروفش را بسیار واضح‌تر تعریف کرده است. اصلاح اصلی که من انجام داده‌ام تغییر مرکز کمان میان نقاط ۴ و ۹ از $(۴٫۵, ۷\frac{۱}{۶})$ در ترسیم تورنیلو به نقطهٔ $(۴٫۵, ۷\frac{۱}{۸})$ در همان نزدیکی و ناگفته گذاردن شعاعش است [وی گفته است که شعاع ۱٫۵ است اما در واقع $\sqrt{۱۴۵}/۸$، یعنی اندکی بیشتر، است]، چون $(۴٫۵, ۷\frac{۱}{۶})$ به فاصلهٔ یکسانی از نقاط ۴ و ۹ نیست.

توجه کنید که کمان دایره‌ای میان نقاط ۱۰ و ۱۱ مماس بر خط پایه در $(۴٫۵, ۰)$ است و در نقطهٔ $(۷, ۲٫۵)$ مماس عمودی دارد، که خیلی خوب جور درمی‌آید چون $۵^۲ = ۴^۲ + ۳^۲$، و من بر این باورم که تورنیلو به اندازهٔ کافی ریاضی می‌دانسته که از این توافق دلپذیر در طرحش استفاده کند. او

1. Francesco Torniello



شکل۲ مسأله‌ای که در ترسیم تورنیلو پیش می‌آید: به‌ازای r و h مفروض، x و y را بیابید.

هرگز دقیقاً نگفته که چه خمهایی باید میان نقاط ۱و ۶ یا ۲ و ۳ به‌کار روند؛ ظاهراً یک پاره‌خط مستقیم باید نقاط ۱ و ۶ را به هم پیوند دهد، و خم دیگر باید با هر چه که مناسب به نظر می‌رسد پر شود.

محاسبهٔ نقطهٔ ۵ یک تمرین ابتدایی اما آموزنده را در هندسهٔ تحلیلی در پیش می‌نهد: اعداد مثبت h و r داده شده‌اند؛ نقطهٔ (x,y) را در قسمت راست فوقانی دایره‌ای به شعاع r به مرکز مبدأ به‌گونه‌ای بیابید که خط راستِ از $(-r,h)$ به (x,y) مماس بر دایره در (x,y) باشد. (شکل ۲ را ببینید.) داریم $x^2+y^2=r^2$ و $y/x=\tan\theta=(x+r)/(h-y)$. بنابراین $x^2+rx+y^2-yh=0$ و $rx=hy-r^2$. این منجر به معادلهٔ $(hy-r^2)hy+r^2y(y-h)=rx(rx+r^2)+r^2y(y-h)=0$. و از آنجا به معادلهٔ $y(h^2y-hr^2+r^2y-hr^2)=0$ می‌شود و به‌زودی به جوابهای مطلوب

$$x=\frac{h^2r-r^3}{h^2+r^2},\quad y=\frac{2hr^2}{h^2+r^2}$$

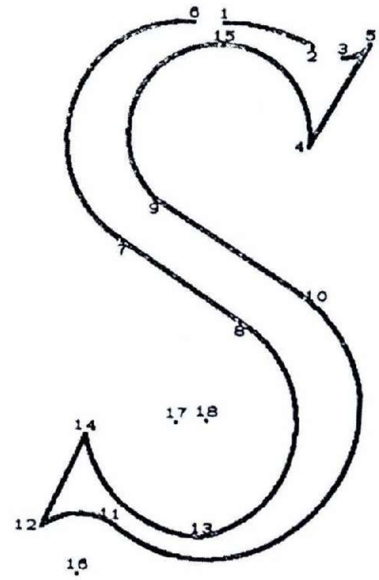
می‌رسیم. جواب تابعی گویا از h و r است (یعنی نیازی به ریشه‌های دوم نیست) چون نقطهٔ مماس دیگر $(-r,0)$ است؛ این نقطهٔ دیگر نیز در معادلات ذکرشده صدق می‌کند. رنه دکارت از دیدنِ این نمایش قدرت دستگاه مختصاتش مسلماً خوشحال می‌شد.

ترسیم تورنیلو را می‌توان بدون هیچ مشکلی به زبان متافونت بیان کرد؛ این زبان را من اخیراً برای تعریف شکلهای حروف به‌صورتی که مناسب برای پردازنده‌های رایانه باشد ساخته‌ام. هر چند در روشهای خط‌کش و پرگار واقعاً از بسیاری از قابلیتهایی که متافونت دارد استفاده نمی‌شد، با نگاهی به این ترسیم به‌عنوان اولین مثال، می‌توانیم چیزهایی در مورد متافونت بیاموزیم.

نقاط مهم یک طرح خاص در زبان متافونت با نوشتن معادلاتی برای مختصهای x و yشان مشخص می‌شوند؛ آنگاه می‌توانید بگویید «**draw** $i..j$» تا خط راستی از نقطهٔ i به نقطهٔ j کشیده شود. همچنین می‌توانید بگویید «**draw** $i\{\alpha,\beta\}..j\{\gamma,\delta\}$» تا خمی رسم شود که از نقطهٔ i در جهت بردار (α,β) شروع شده و در نقطهٔ j در جهت (γ,δ) پایان یابد. این خم کمانی دایره‌ای خواهد بود اگر دایره‌ای گذرنده از i و j در جهات بیان‌شده موجود باشد، به شرط آنکه کمان دایره‌ای حداکثر یک نیمدایره باشد. بنابراین، ترسیم تورنیلو را می‌توان با دقت تمام به‌صورت برنامهٔ متافونت زیر بیان کرد:

```
x1 = 4.5u;   y1 = 9u;
x2 = 6u;   y2 - 5.5u =
      sqrt((3.5u)(3.5u) - (x2 - 4.5u)(x2 - 4.5u));
draw 1{y1 - 5.5u, 4.5u - x1} . .
      2{y2 - 5.5u, 4.5u - x2};
x3 = 6.5u;   y3 = 8.5u;
x4 = 6u;   y4 = 7u;
x5 = (6 + 16/17)u;   y5 = (8 + 13/17)u;
draw 3{9u - y3, x3 - 6.5u} . .
      5{9u - y5, x5 - 6.5u};
draw 4 . . 5;
x6 = 4u;   y6 = 9u;
x7 = 3u;   7u - y7 =
      sqrt((2u)(2u) - (x7 - 4u)(x7 - 4u));
draw 6{7u - y6, x6 - 4u} . . 7{7u - y7, x7 - 4u};
x8 = 5u;   y8 = 4u;   draw 7 . . 8;
x9 = 3.5u;   y9 = 6u;
x15 = 4.5u;   y15 - 7.125u =
      sqrt((x9 - 4.5u)(x9 - 4.5u) +
           (y9 - 7.125u)(y9 - 7.125u));
draw 4{7.125u - y4, x4 - 4.5u} . . 15 . .
      9{7.125u - y9, x9 - 4.5u};
x10 = 6u;   y10 = 4.5u;   draw 9 . . 10;
x11 = 3u;   y11 = .5u;
      draw 10{y10 - 2.5u, 4.5u - x10} . .
      11{y11 - 2.5u, 4.5u - x11};
x16 = 2.5u;   y11 - y16 =
      sqrt(u·u - (x11 - x16)(x11 - x16));
x12 = 1.875u;   y12 - y16 =
      sqrt(u·u - (x12 - x16)(x12 - x16));
draw 11{y16 - y11, x11 - x16} . .
      12{y16 - y12, x12 - x16};
x13 = 4.5u;   x17 = 4u;   y8 - y17 =
      sqrt((2u)(2u) - (x8 - x17)(x8 - x17));
y17 - y13 =
      sqrt((2u)(2u) - (x13 - x17)(x13 - x17));
draw 8{y8 - y17, x17 - x8} . .
      13{y13 - y17, x17 - x13};
x18 = 4.5u;   y18 - y13 =
      sqrt((2u)(2u) - (x18 - x13)(x18 - x13));
y14 = 2u;   x18 - x14 =
      sqrt((2u)(2u) - (y18 - y14)(y18 - y14));
draw 13{y13 - y18, x18 - x13} . .
      14{y14 - y18, x18 - x14};
draw 14 . . 12.
```

در اینجا «u» یک واحد دلخواه اندازه است که می‌تواند به‌عنوان «ضریب مقیاس» برای کنترل اندازهٔ کلی در ترسیم به‌کار رود. این برنامه در نگهٔ اول تا حدی دشوار به نظر می‌رسد اما اگر آن را با توصیف غیررسمی که قبلاً به زبان طبیعی بیان شد مقایسه کنید، فهمیدنش واقعاً سخت نخواهد بود. چند نقطهٔ اضافی با شماره‌های ۱۵، ۱۶، ۱۷ و ۱۸ معرفی شده‌اند. نقطهٔ ۱۵، متافونت را وادار می‌کند که کمانی دایره‌ای بزرگتر از نیمدایره بکشد و سه نقطهٔ دیگر



شکل۳ برنامهٔ متافونتِ مذکور در مقاله، S تورنیلو را به این صورت رسم می‌کند.

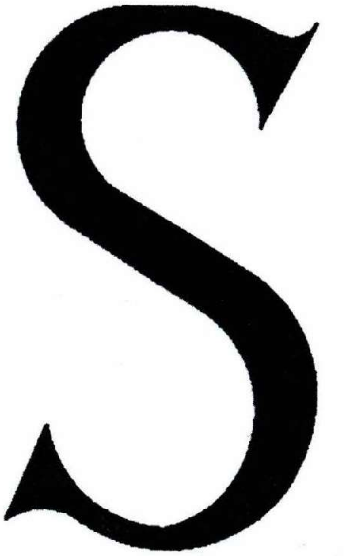
مراکز کمانها در ترسیم هستند. نکتهٔ اصلی که همه جا از آن استفاده شده این است که یک کمان دایره‌ای به مرکز (x_k, y_k) که ساعتگرد از نقطهٔ (x_i, y_i) می‌گذرد، در جهت $\{y_i - y_k, x_k - x_i\}$ حرکت می‌کند در حالی که اگر کمان پادساعتگرد حرکت کند، جهتش $\{j_k - y_i, x_i - x_k\}$ خواهد بود.

شکل ۳ آنچه را متافونت بر اساس توضیحات فوق رسم می‌کند، نشان می‌دهد. همچنین متافونت شکل را با خمهای مناسب غیردایره‌ای کامل خواهد کرد اگر دستورهای

draw $1\,.\,.\,6$;
draw $2\{y_2 - 5.5u, 4.5u - x_2\}\,.\,.\,3\{9u - y_3, x_3 - 6.5u\}$.

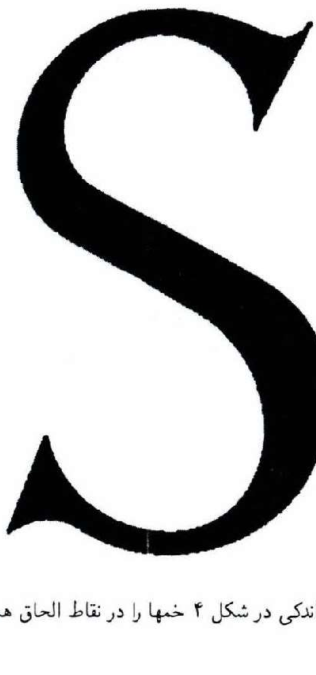
را نیز بیفزاییم. این جهات مماسی با جهات مماسهایی که در محل تلاقی خمهای جدید و قدیمی بر خمها رسم شود تطبیق می‌کنند. اگر از متافونت بخواهیم فضای بین این خمهای مرزی را پر کند به شکل ۴ می‌رسیم.

وقتی که کمان دایره‌ای از نقطهٔ ۶ به نقطهٔ ۷ می‌رسد در جهت $\{۷u - y_۷, x_۷ - ۴u\} = \{\sqrt{۳}u, -u\}$ حرکت می‌کند، اما وقتی که مسیر از نقطهٔ ۷ روی خطی مستقیم با نقطهٔ ۸ امتداد می‌یابد جهت ناگهان تغییر می‌کند و به $\{x_۸ - x_۷, y_۸ - y_۷\} = \{۲u, (\sqrt{۳} - ۳)u\}$ تبدیل می‌شود. این ناپیوستگی تنها اندکی در شکل ۴ قابل‌ملاحظه است اما از دیدگاه ریاضی مایهٔ ناخرسندی است. ناپیوستگیهای مشابهی در نقاط ۸، ۹، ۱۰، و ۱۳ روی می‌دهند؛ این مشکل به‌خصوص در نقاط ۹ و ۱۳ نمایان است. تصویر کتاب تورنیلو باید کمی دستکاری شود تا این اشکالات (که تورنیلو به آنها توجه نکرد) پنهان بمانند. احتمالاً استانداردهای دقت در قرن شانزدهم خیلی سفت و سخت نبود، اما امروز ما نمی‌خواهیم که رایانه‌هایمان چنین خطوط نادرستی رسم کنند.

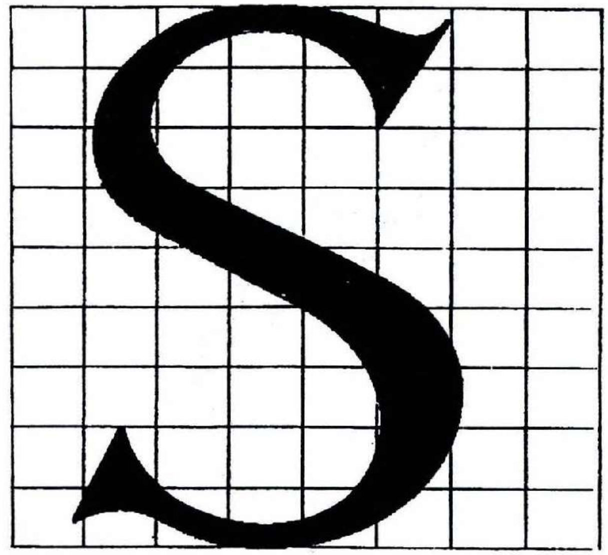


شکل۴ خمهای شکل ۳ کامل و پر شده‌اند.

از آنجا که توانایی متافونت محدود به رسم کمانهای دایره‌ای نیست، اگر ما فقط جهات سازگاری در همهٔ نقاط مهم مشخص کنیم، می‌تواند به‌طور خودکار جرح و تعدیل‌هایی همانند آنچه در ترسیم تورنیلو انجام می‌شد صورت دهد. اگر مماسها در نقاط ۷، ۸، ۹ و ۱۰ به‌عنوان راستای پاره‌خطهای مستقیم در نظر گرفته شوند و راستا در نقطهٔ ۱۳ افقی باشد، شکل ۵ حاصل کار را نشان می‌دهد. به‌علاوه نقطهٔ ۶ حرکت داده شده تا بر نقطهٔ ۱ منطبق شود، لذا از خط صاف نامناسب در بالا اجتناب می‌شود. خمهای رسیده به این نقاط دیگر دایره نیستند، اما آن‌قدر به آن نزدیک هستند که اکثر مردم را به اشتباه بیندازند و بعید به نظر می‌رسد که تورنیلو اگر این تقریب را می‌دید رنجیده خاطر می‌شد.



شکل۵ تعدیل اندکی در شکل ۴ خمها را در نقاط الحاق هموارتر می‌کند.

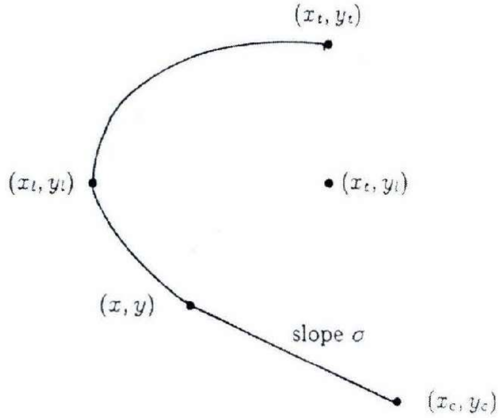


شکل۶ وقتی که شکل ۵ در امتداد افقی ۲۰٪ کشیده می‌شود به این شکل می‌رسیم؛ دایره‌ها بیضی شده‌اند.

«S» رنسانسی به چشم امروزی قدری لاغر به نظر می‌رسد. می‌توانیم از متافونت بخواهیم که با افزایش ۲۰ درصدی همهٔ مختصهای x و ثابت نگه‌داشتن مختصهای y، آن را چاق‌تر کند. شکل ۶ نتیجه را نشان می‌دهد. توجه کنید که این کشش، دایره‌ها را به بیضی بدل می‌کند. برای تورنیلو مشخص کردن چنین شکلی با استفاده از کمانهای کاملاً دایره‌ای بایستی بسیار مشکل بوده باشد. منجمان قدیم را به‌خاطر می‌آوریم که چون مدل مدارهای سیارات را (که در واقع بیضی است) دایره می‌گرفتند مجبور به ترسیم سیستم پیچیده‌ای از دوایر بودند که برایشان بسیار پُر زحمت بود.

با مطالعهٔ این مثال می‌توانیم تا حدی با مشکلات موجود در مشخص کردن شکل مناسب S آشنا شویم. ولی من در واقع به دنبال حل مسأله‌ای بودم که کلی‌تر از مسأله‌ای است که تورنیلو با آن مواجه بوده است. به‌جای مشخص کردن تنها یک «S» خاص، من به گونه‌های مختلف بسیاری از این حرف، از جمله گونهٔ **سیاه** که بسیار تیره‌تر از قلم متن عادی است، نیاز داشتم. اخیراً در این مورد با الن پرلیس[1] گفتگو کردم و او گفت: وقتی ما تلاش می‌کنیم چیزی را به‌گونه‌ای مناسب خودکار کنیم، موضوع اصلی "هنر متغیر ساختن چیزهای ثابت" است. در مورد طراحی حروف، ما تنها نمی‌خواهیم یک شکل خاص داشته باشیم و ریاضیاتی برای توصیف آن ارائه کنیم. بلکه در واقع می‌خواهیم اصول زیربنایی ترسیمات را بیابیم تا بتوانیم بینهایت شکل (از جمله، شکل مفروض) را به‌عنوان تابعی از پارامترهای مناسب بسازیم. هدف من خلق الفبای کاملی بود که وابسته به ده دوازده پارامتر به‌گونه‌ای باشد که با تغییر پارامترها همهٔ حروف به‌صورت هماهنگ تغییر کنند.

بعد از بررسی این ترسیمات رنسانسی و بسیاری اشکال جدید S نتیجه گرفتم که حرکت اصلی قلم در S کلی که من به دنبالش بودم شبیه به خم شکل ۶ است: هر خم مرزی باید یک بیضی باشد که یک خط راست و



شکل۷ مسأله: x، y و y_l را هرگاه x_t، y_t، x_l، σ، x_c و y_c داده شده باشند، بیابید.

سپس یک بیضی دیگر به دنبال دارد. این موضوع مرا به سوی مطرح کردن مسألهٔ زیر سوق داد: کدام بیضی است که بالاترین نقطه‌اش در (x_t, y_t) و چپ‌ترین نقطه‌اش در (x_l, y_l) به‌ازای یک y_l است و مماس بر خط راستی به شیب σ گذرنده از (x_c, y_c) به‌ازای مقادیر مفروض x_t، y_t، x_l، σ، x_c و y_c است؟ (فرض بر این است که قطرهای بزرگ و کوچک بیضی منطبق بر محورهای مختصات‌اند؛ به بیان دیگر، بیضی باید تقارن چپ-راست داشته باشد.) دلیل من برای مطرح کردن چنین مثالی باید با توجه به بحث بالا روشن باشد: نقطه‌ای را که اوج خم S فرض می‌شود می‌شناسیم و نیز می‌دانیم که خم چقدر باید به چپ کشیده شود؛ به‌علاوه خط راستی در ذهن داریم که بخش میانی شکل را می‌سازد.

مسأله‌ای که در پاراگراف قبل بیان شد به چند دلیل برای من جالب است. اولاً، (همان‌گونه که خواهیم دید) جواب زیبایی دارد. ثانیاً، آن جواب در واقع منجر به خمهای مطلوب S می‌شود. ثالثاً، جواب کاملاً بدیهی نیست؛ در طی یک دورهٔ حدوداً دو ساله، من چهار بار در زمانهای مختلف تصادفاً با این مسأله مواجه شدم و هر بار نتوانستم یادداشتهایم در مورد چگونگی حل آن را پیدا کنم، بنابراین چندین ساعت را صرف استنتاج دوبارهٔ روابطی که لازمشان داشتم کردم. در نهایت تصمیم گرفتم این مقاله را بنویسیم تا مجبور نباشم دوباره جواب را به‌دست بیاورم.

نقطهٔ (x_t, y_t) مرکز بیضی‌ای است که به دنبالش هستیم. فرض کنید (x, y) نقطه‌ای باشد که در آنجا بیضی مطلوب مماس بر خطی به شیب σ گذرنده از (x_c, y_c) باشد، همان‌طور که در شکل ۷ داده شده است. مسألهٔ ما خلاصه می‌شود به حل سه معادله برحسب سه مجهول x، y و y_l:

$$\left(\frac{x - x_t}{x_l - x_t}\right)^۲ + \left(\frac{y - y_l}{y_t - y_l}\right)^۲ = ۱$$

$$\frac{y_c - y}{x_c - x} = \sigma \qquad (*)$$

$$-\left(\frac{y_t - y_l}{x_l - x_t}\right)^۲ \frac{x - x_t}{y - y_l} = \sigma \,.$$

1. Alan Perlis

معادلهٔ اول، معادلهٔ متعارف بیضی است دومی معادلهٔ متعارف خط است و سومی با مشتق‌گیری از اولی:

$$۲dx\frac{x-x_t}{(x_l-x_t)^۲}+۲dy\frac{y-y_l}{(y_t-y_l)^۲}=۰$$

و قرار دادن dy/dx برابر با σ به‌دست می‌آید.

قبل از اقدام به حل معادلات (*) علاقه‌مندم نمادی را که در کار من در طراحی فونت ریاضی فوق‌العاده مفید از آب درآمده معرفی کنم: فرض کنید $\alpha[x,y]$ کوته‌نوشتی برای $x+\alpha(y-x)$ باشد که می‌توان آن را «کسر α از مسیر x به y» دانست. بنابراین $۰[x,y]=x$، $۱[x,y]=y$؛ $\frac{۱}{۲}[x,y]$ نقطهٔ میانی بین x و y است؛ $\frac{۳}{۴}[x,y]$ نیمه راه میان y و این نقطهٔ میانی است و $۲[x,y]$ در آن سوی y است و همان فاصله را با y دارد که y با x. اتحادهایی مانند $\alpha[x,x]=x$ و $\alpha[x,y]=(۱-\alpha)[y,x]$ به‌راحتی نتیجه می‌شوند. در ترسیمات هندسی اشاره به چیزهایی مانند نقطهٔ واقع در ثلث مسیرِ از A به B معمول است؛ نماد $\frac{۱}{۳}[A,B]$ دقیقاً همین معنا را دارد.

یکی از کاربردهای این نماد کروشه‌ای یافتن نقطهٔ تقاطع (x,y) دو خطِ داده شده است که خطها به‌ترتیب از $(x_۱,y_۱)$ به $(x_۲,y_۲)$ و از $(x_۳,y_۳)$ به $(x_۴,y_۴)$ می‌روند. می‌توانیم مسألهٔ تقاطع را با توجه به اینکه عدد αای وجود دارد که

$$x=\alpha[x_۱,x_۲],\qquad y=\alpha[y_۱,y_۲]$$

و عدد βای وجود دارد که

$$x=\beta[x_۳,x_۴],\qquad y=\beta[y_۳,y_۴]$$

حل کنیم. این دستگاه چهار معادلهٔ خطی برحسب x، y، α و β به‌سادگی حل می‌شود و در واقع متافونت به‌طور خودکار این دستگاه معادلات خطی را حل می‌کند، بنابراین محاسبهٔ نقطهٔ تقاطع خطوط در برنامه‌های متافونت ساده است.

نماد کروشه‌ای همچنین به روش جالبی برای بیضیها به‌کار می‌رود. می‌توانیم با نوشتن $x=\alpha[x_۰,x_{\max}]$ و $y=\beta[y_۰,y_{\max}]$، معادلهٔ کلی

$$\left(\frac{x-x_۰}{x_{\max}-x_۰}\right)^۲+\left(\frac{y-y_۰}{y_{\max}-y_۰}\right)^۲=۱$$

را به معادلهٔ بسیار ساده‌تر $\alpha^۲+\beta^۲=۱$ تبدیل کنیم.

با بازگشت به مسألهٔ بیضی خودمان قرار می‌دهیم

$$x=\alpha[x_t,x_l]\qquad y=\beta[y_l,y_t]$$
$$X=x-x_t\qquad Y=y_l-y_t$$
$$a=x_l-x_t\qquad b=(y_c-\sigma x_c)-(y_t-\sigma x_t)$$

حال می‌توان سه معادلهٔ (*) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$\begin{aligned}\alpha^۲+\beta^۲&=۱\\ b+\sigma X&=(۱-\beta)Y\\ \alpha Y&=a\sigma\beta\\ X&=a\alpha\,.\end{aligned}\tag{**}$$

به این طریق چهار معادله برحسب چهار مجهول (α,β,X,Y) به‌دست می‌آید، بنابراین ممکن است به نظر برسد که یک گام به عقب بازگشته‌ایم؛ اما این معادلات به‌صورتِ بسیار ساده‌تری هستند. می‌توانیم α را حذف کنیم تا به سه مجهول بازگردیم:

$$X^۲+a^۲\beta^۲=a^۲\tag{۱}$$
$$b+\sigma X=(۱-\beta)Y\tag{۲}$$
$$XY=a^۲\sigma\beta\,.\tag{۳}$$

حال ضرب (۳) در $(\beta-۱)$ و استفاده از (۲) منجر به

$$X(b+\sigma X)=a^۲\sigma\beta(۱-\beta)$$

می‌شود و این به‌طور معجزه‌آسایی با (۱) تلفیق می‌شود و

$$bX=a^۲\sigma(\beta-۱)\tag{۴}$$

را به‌دست می‌دهد. نتیجه می‌شود که $(a^۲\sigma(\beta-۱))^۲+a^۲b^۲\beta^۲=a^۲b^۲$، یعنی

$$a^۲(\beta-۱)(a^۲\sigma^۲(\beta-۱)+b^۲(\beta+۱))=۰\,.\tag{۵}$$

اگر $a=۰$، معادلات ما به‌صورت تباهیده در می‌آیند و دستگاه بینهایت جواب $(X,Y)=(۰,b/(۱-\beta))$ را به‌ازای $-۱\le\beta<۱$ دارد. اگر $b=۰$، حالت تباهیدهٔ دیگری پیش می‌آید که هیچ جوابی مگر $a\sigma=۰$ برایش ممکن نیست، که در این‌صورت بینهایت جواب با Y دلخواه و $(X,\alpha,\beta)=(۰,۰,۱)$ وجود دارد. در غیر این‌صورت، ملاحظهٔ اینکه $\beta\neq۱$، دشوار نیست، بنابراین (۵) مقدار β را به‌طور یکتا مشخص می‌کند و می‌توانیم از این همراه با (۴) برای تعیین جواب کامل استفاده کنیم:

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{-۲ab\sigma}{a^۲\sigma^۲+b^۲}\\ \beta&=\frac{a^۲\sigma^۲-b^۲}{a^۲\sigma^۲+b^۲}\\ X&=\frac{-۲a^۲b\sigma}{a^۲\sigma^۲+b^۲}\\ Y&=\frac{b^۲-a^۲\sigma^۲}{۲b}\end{aligned}\tag{۶}$$

وقتی دریافتم که دستگاه معادلات درجهٔ دوم (* *) ریشه‌هایی به‌صورت عباراتِ صرفاً گویا دارد تعجب کردم. مشابهت غریبی میان این جواب و جوابِ مسألهٔ شکل ۲ وجود دارد.

برای اینکه (۶) به زبانی که مسألهٔ اولیه (شکل ۷) بیان شد برگردانده شود، فرض کنید (x_t, y_m) روی خط به شیب σ گذرنده از (x_c, y_c) باشد؛ بنابراین $y_m = y_c + \sigma(x_t - x_c)$. لذا جواب یکتا

$$x = x_t + \frac{۲\sigma(x_l - x_t)^۲(y_t - y_m)}{\sigma^۲(x_l - x_t)^۲ + (y_t - y_m)^۲}$$

$$y = y_m + \frac{۲\sigma^۲(x_l - x_t)^۲(y_t - y_m)}{\sigma^۲(x_l - x_t)^۲ + (y_t - y_m)^۲} \qquad (۷)$$

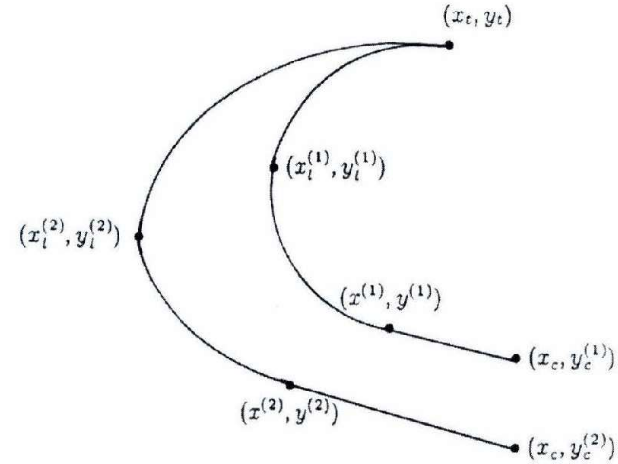
$$y_l = y_t - \frac{(y_t - y_m)^۲ - \sigma^۲(x_l - x_t)^۲}{۲(y_t - y_m)}$$

است مگر در حالتهای تباهیدهٔ $x_l = x_t$ یا $y_m = y_t$.

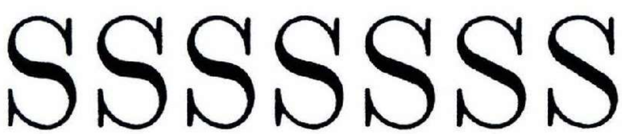
من ضمناً قابلیت سیستم جبری رایانه‌ای MACSYMA [۵، ۷] را در حل خودکار معادله روی این مسأله امتحان کردم تا تصوری از این موضوع به‌دست آورم که چه مدت زمانی طول خواهد کشید تا رایانه جای ریاضیدان را در محاسبه بگیرد. MACSYMA به‌درستی جواب (X, Y, β) را برای معادلات (۱)، (۲) و (۳) در تقریباً ۱۷ ثانیه یافت بجز اینکه چیزی در مورد جوابهای تباهیده‌ای که به‌ازای $ab = ۰$ به‌دست می‌آیند نگفت. زمان مورد نیازِ MACSYMA برای حل دستگاه چهار معادله‌ای (* *) اساساً با زمان لازم برای حل (۱)، (۲)، (۳) یکی بود. اما وقتی من از MACSYMA خواستم که سه معادلهٔ اولیهٔ (*) را برحسب x، y و y_l حل کند، ظرفیت حافظهٔ رایانه بعد از حدود یک دقیقه و بیست ثانیه تمام شد، حتی وقتی که (*) را با قرار دادن (x_t, y_m) به جای (x_c, y_c) ساده‌تر کردم. بنابراین مجدداً اطمینان حاصل کردم که معادلات (*) کاملاً بدیهی نیستند و تغییر آنها به (**) گام مهمی بوده است.

راه حل فوق برای مسألهٔ بیضی فوراً منجر به خمهای S مطلوب می‌شود، چون می‌توانیم فضای بین کمانِ بیضی‐خط راستِ رونده از (x_t, y_t) به $(x_l^{(۱)}, y_l^{(۱)})$ و بعد به $(x^{(۱)}, y^{(۱)})$ و بعد به $(x_c, y_c^{(۱)})$ وکمان دیگر را که از (x_t, y_t) به $(x_l^{(۲)}, y_l^{(۲)})$ و بعد به $(x^{(۲)}, y^{(۲)})$ و بعد به $(x_c, y_c^{(۲)})$ می‌رود پُر کنیم؛ فاصلهٔ بین $x_l^{(۱)}$ و $x_l^{(۲)}$ به وسیلهٔ ضخامت مطلوب شکل در چپ معین می‌شود و فاصلهٔ بین $y_c^{(۱)}$ و $y_c^{(۲)}$ به‌وسیلهٔ ضخامت مطلوب در مرکز (شکل ۸ را ببینید. خم S واقعی با یک قلم مدور به شعاع کوچک و مثبت که مرکزش خمهای نشان داده شده را رسم می‌کند کشیده می‌شود، لذا مرز واقعی یک بیضی کامل نیست.) البته در مورد قسمت راست پایینی S به روشی مشابه با قسمت چپ بالایی عمل می‌شود.

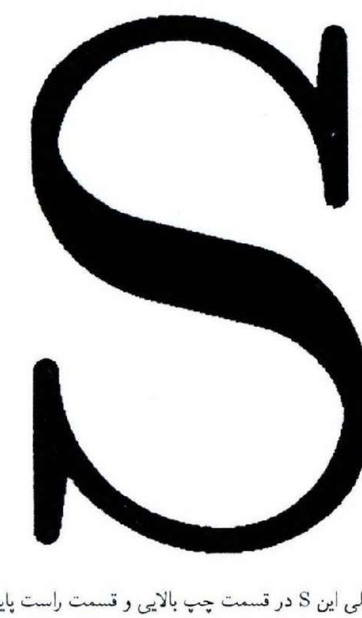
شکل ۹ خمهای مختلف S ترسیم شده با این روش را وقتی یک شیب σ تغییر می‌کند اما سایر مشخصات ثابت می‌مانند نشان می‌دهد. شکل ۱۰ یک S را نشان می‌دهد که شیب یکسانی با S وسطی شکل ۹ دارد اما خم، وقتی که به‌طور عمودی در سمت چپ بالا می‌رود و در سمت راست پایین می‌آید، پهن‌تر است. یکی از مزایای اصلی روشِ پارامتری‌شده و ریاضی این است که می‌توانید به آسانی آزمایشهای زیادی انجام دهید تا وضعیتی از



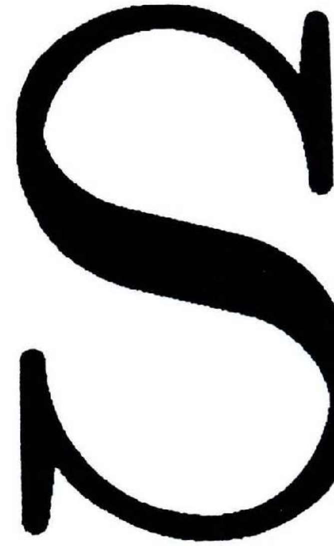
شکل۸ یک S خوب با ترسیم دو بیضی ناقص طبق روش شکل ۷ و سپس پُر کردن فضای میان آنها با استفاده از قلمی که قطرش به پهنای «خطوط نازک» حروف مطلوب است، به‌دست می‌آید.



شکل۹ امکانهای مختلفی را با تغییر دادن پارامترها می‌توان کشف کرد. اینجا شیب تغییر می‌کند اما سایر مشخصات ثابت نگه داشته می‌شوند؛ شیبها ۲/۵، ۲، ۱/۲، ۲/۳، ۱، ۲/۳، ۲/۳، ۲، ۲/۵ برابر شیب «درست» در S وسطی هستند.



شکل۱۰ تکه‌های اصلی این S در قسمت چپ بالایی و قسمت راست پایینی پهن‌ترند اما بجز از این لحاظ، شکل طبق مشخصات S وسطی در شکل ۹ رسم شده است.



شکل۱۱ اگر پهنای قسمت چپ بالایی و قسمت راست پایینی کافی نباشد، ممکن است اثرات بسیار نامطلوبی داشته باشد.

پارامترها را که دوست دارید بیابید. یک برنامهٔ متافونت که Sهای شکلهای ۹ و ۱۰، را وابسته به پارامترهای مناسب رسم می‌کند، در پیوست مقاله می‌آید.

من بیش از دو سال با کمال رضایت Sها را با این روش می‌ساختم اما یک روز تصمیم گرفتم که از متافونت بخواهم یک حرف S خیلی بزرگ رسم کند. شکل حاصل به‌طور غیرمنتظره‌ای زشت بود. با بازبینی بعضی Sهایی که قبلاً رسم شده بودند و زیبا به حساب می‌آمدند، متوجه یک نقص موردی شدم که در مقیاسهای کوچکی که قبلاً با آنها سروکار داشتم نسبتاً بی‌ضرر بود ولی زمانی که همه چیز بزرگ می‌شود به طرز بسیار واضحی آشکار می‌گردد. پس فهمیدم که هنوز به پایان داستان نرسیده‌ام.

شکل ۱۱ این اِشکال جدید را به‌صورت اغراق‌شده‌ای نشان می‌دهد. برحسب نمادهای شکل ۸ می‌توان گفت که من x_l را در سمت راست x_t به اندازهٔ کافی دور از آن قرار نداده بودم، لذا در واقع دو بیضی گذرنده از $(x_l^{(۱)}, y_l^{(۱)})$ و $(x_l^{(۲)}, y_l^{(۲)})$ یکدیگر را مجدداً قطع می‌کردند. این باعث می‌شد که مرز درونی مفروض تغییر کند و مرز بیرونی گردد و برعکس؛ که نتیجه‌ای به‌وضوح نامطلوب است چون نمی‌خواستم چنین چیزی در خطاطی S پیش بیاید.

اگر $x_l^{(۱)}$ به اندازهٔ کافی بزرگ باشد مشکل شکل ۱۱ برطرف می‌شود، اما البته دانستن اینکه چه مقادیری مجاز هستند مطلوب است. به مسألهٔ سوم (و نهایی) دربارهٔ بیضیها می‌رسیم: شرط لازم و کافی برای اینکه کمان بیضوی از $(x_l^{(۲)}, y_l^{(۲)})$ تا (x_t, y_t) بالای کمان بیضوی از $(x_l^{(۱)}, y_l^{(۱)})$ تا (x_t, y_t) باقی بماند چیست؟ (فرض می‌کنیم که $x_l^{(۲)} < x_l^{(۱)} < x_t$ و $y_l^{(۲)} < y_l^{(۱)} < y_t$ و هر دو بیضی همچون گذشته دارای تقارن چپ‌ـراست هستند.) معلوم می‌شود که پاسخ به این سؤال را می‌توان خیلی ساده بیان کرد: خمها از یکدیگر نمی‌گذرند اگر و تنها اگر

$$\frac{y_t - y_l^{(۱)}}{(x_t - x_l^{(۱)})^۲} \ge \frac{y_t - y_l^{(۲)}}{(x_t - x_l^{(۲)})^۲} \tag{۸}$$

در اولین تلاش خود برای یافتن شرط درست، در آشفته بازاری از نمادها گرفتار آمدم، اما در نهایت به راه حل نسبتاً سادهٔ زیر برای این مسأله دست یافتم: فرض کنید $a = x_t - x_l^{(۱)}$، $b = y_t - y_l^{(۱)}$، $A = x_t - x_l^{(۲)}$ و $B = y_t - y_l^{(۲)}$. با وارونه کردن خمها می‌خواهیم تابع $b - b\sqrt{۱ - (x-a)^۲}$ (که ربع راست پایینیِ کمان بیضوی از $(۰,۰)$ تا (a,b) را توصیف می‌کند)، وقتی $|x| < a$ کوچکتر از تابع مشابه $B - B\sqrt{۱ - (x-A)^۲}$ یا برابر آن باشد. با بسط به سری توانی داریم

$$b - b\sqrt{۱ - (x/a)^۲} =$$

$$b\left(\frac{x^۲}{۲a^۲} + \frac{x^۴}{۸a^۴} + \cdots + \begin{pmatrix}\frac{۱}{۲}\\ k\end{pmatrix}(-۱)^{k+۱}\frac{x^{۲k}}{a^۲k} + \cdots\right)$$

که

$$\begin{pmatrix}\frac{۱}{۲}\\ k\end{pmatrix}(-۱)^{k+۱} = \frac{(۲k-۲)!}{۲^{۲k-۱}k!(k-۱)!}$$

به‌ازای هر $k > ۰$ مثبت است و سری توانی به‌ازای $|x| < a$ همگراست. اگر $B/A^۲ > b/a^۲$، سری توانی مشابه

$$B - B\sqrt{۱ - (x/A)^۲} =$$

$$B\left(\frac{x^۲}{۲A^۲}\ \frac{x^۴}{۸a^۴} + \cdots + \begin{pmatrix}\frac{۱}{۲}\\ k\end{pmatrix}(-۱)^{k+۱}\frac{x^{۲k}}{A^{۲k}} + \cdots\right)$$

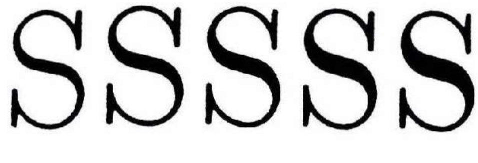
به‌ازای xهای کوچک سریعتر رشد می‌کند و دو خم تلاقی می‌کنند. اما اگر $b/a^۲ \ge B/A^۲$، به‌ازای هر $k > ۰$ خواهیم داشت $b/a^{۲k} \ge B/a^{۲k}$، بنابراین هر جملهٔ سری توانی اول از هر جملهٔ سری دوم بیشتر خواهد شد. والسلام.

با توجه به نظریه‌ای که پیشتر به‌دست آمد، داریم

$$\frac{y_t - y_l}{(x_t - x_l)^۲} = \frac{y_t - y_m}{۲(x_t - x_l)^۲} - \frac{\sigma^۲}{۲(y_t - y_m)} \tag{۹}$$

لذا می‌توانیم اطمینان حاصل کنیم که با شروع از مقادیر مطلوب x_t، y_t، $x_l^{(۲)}$، $y_m^{(۱)}$ و $y_m^{(۲)}$، $(y_t - y_l^{(۱)})/(x_t - x_l^{(۱)})^۲$ در واقع برابر با $(y_t - y_l^{(۲)})/(x_t - x_l^{(۲)})^۲$ است: ابتدا $y_l^{(۲)}$، سپس $x_l^{(۱)}$ و در نهایت $y_l^{(۱)}$ مشخص می‌شود.

پس از اینکه دانستم S را چگونه می‌توان با دقت ریاضی رسم کرد، پی بردم که می‌توان در طراحی بسیاری از نمادهای دیگری که در ریاضیات

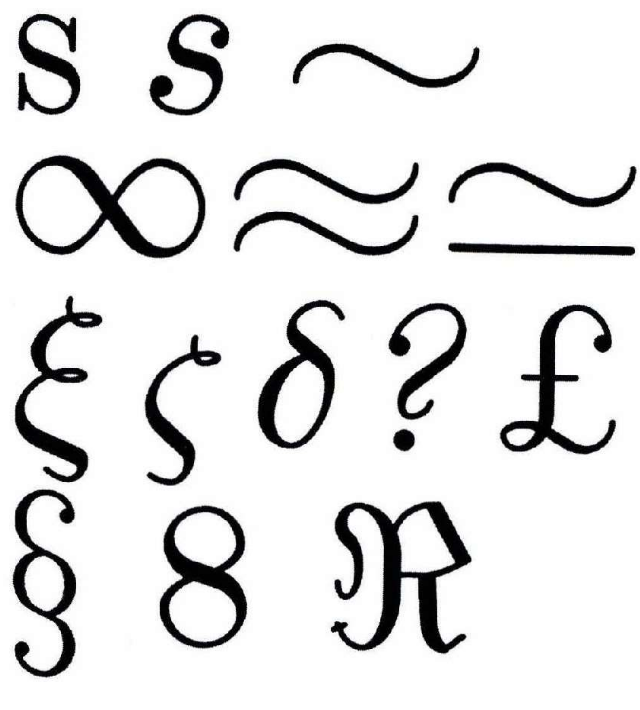


شکل۱۲ تغییر ضخامت تکهٔ میانی منجر به این Sها می‌شود که در آنها پهنای قسمت چپ بالایی و قسمت راست پایینی بدون مشکل تلاقی شکل ۱۱ تا حد امکان کوچک انتخاب شده است.

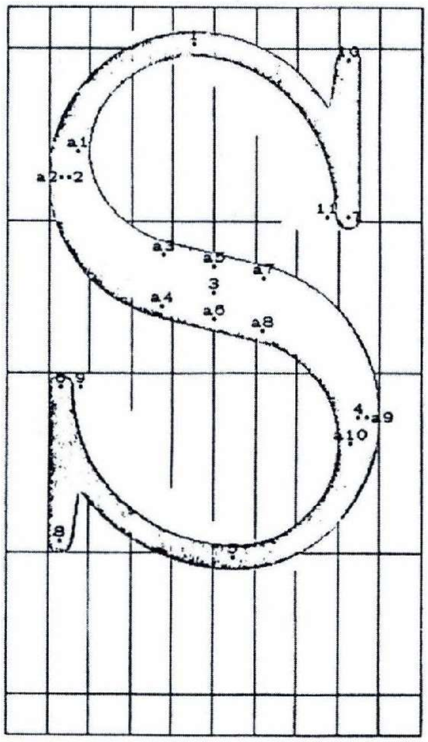
لازم‌اند، ایده‌های مشابهی را به‌کار برد. در واقع در همهٔ نمادهای شکل ۱۳ از یک زیرروال متافونت استفاده شده که اولین بار آن را برای حرف S ارائه دادم (یا زیرروال دوگانِ حاصل از تعویض مختصات x و y). بدون نظریه‌ای که در این مقاله عرضه کردم یا باید از هدف تعریف کتابها به روش ریاضی دست می‌کشیدم یا از استفاده از همهٔ این نمادها پرهیز می‌کردم.

البته این فقط گام اولیه است؛ حروفی که من طراحی کرده‌ام از شکل بهینه‌شان بسیار دورند و در آینده طرحهای بسیار دیگری به ذهن اشخاص خطور خواهد کرد. رویای کنونی من این است که در چند سال آینده ببینم ریاضیدانها با همکاری طراحان مجرب حروف چاپی به ابداع طرحهای جدید واقعاً زیبایی برای نمادها می‌پردازند. مطمئناً این یکی از قابل رؤیت‌ترین کاربردهای ریاضیات خواهد بود!

بگذارید با طرح پرسشی از خواننده، این مقاله را به پایان برسانیم. بیضیها هزاران سال مورد مطالعه قرار داشته‌اند، بنابراین منطقی است که فرض کنیم همهٔ خواص جالب آنها مدتها پیش کشف شده‌اند. با این حال تجربهٔ من این است که وقتی ریاضیات در حوزهٔ جدیدی به‌کار می‌رود، اغلب



شکل۱۳ روش به‌کار رفته برای ترسیم S همچنین به‌عنوان زیرروالی به‌کار می‌رود که بخشهایی از بسیاری از نمادهای دیگر از جمله آنچه را در اینجا نشان داده شده است رسم می‌کند.



شکل۱۴ نقاط شماره‌دار در این S متناظر با اعدادی هستند که روال متافونت در پیوست مشخص می‌کند.

سؤالهای ریاضی محض جدیدی پدیدار می‌شوند که خودِ ریاضیات را غنی‌تر می‌کنند. لذا بسیار کنجکاوم که بدانم: آیا مسائلی که من در ضمن تلاش برای رسم بیضیهای S مانند با آنها مواجه شدم، شاید به‌صورتی دیگر، قبلاً مورد مطالعه قرار گرفته بودند؟ یا آیا کاربرد جدید ریاضیات در حروفچینی منجر به بصیرتهای تازه‌ای حتی دربارهٔ چیزی مانند بیضی «راستخط» که بسیار مورد مطالعه قرار گرفته می‌شود؟

پیوست

برنامهٔ متافونت صفحهٔ بعد، S نشان داده شده در شکل ۱۴ (و بینهایت شکل دیگر) را وقتی پارامترهای ذیل مشخص شوند، رسم می‌کند.

- h، ارتفاع حرف؛
- o، «سرریز» خطهای خمیده در بالا و پایین؛
- u، یک دهم پهنای حرف؛
- w_0، اندازهٔ قلم مدورِ به‌کار رفته در ترسیم خطها؛
- w_4، پهنای سریف (چرخش قلم)های مثلثی پیش از پاک کردن؛
- w_8، ضخامت تکهٔ وسطی S؛
- w_9، ضخامت قسمت بالایی چپ و پایینی راست.

خطهای قائم در شکل ۱۴، u گام از هم فاصله دارند. این برنامه از «lpen #» و «rpen #» برای پاک کردن مرکب ناخواسته در سمت چپ و راست یک مسیر مشخص‌شده استفاده می‌کند؛ اثر این پاک کردن در تصویر قابل رؤیت است زیرا بخشهایی از رهنمودها پاک شده‌اند.

```
subroutine scomp(index i)                          % starting point
        (index p)          % turning point (y_p to be defined)
        (index j)        % transition point (to be defined)
        (index k)                                    % ending point
        (var s):                                     % ending slope
% This subroutine computes y_p, x_j, and y_j so that
% y_k − y_j = s.(x_k − x_j) and so that the following curve
% is consistent with an ellipse:
% i{x_p − x_i, 0} .. p{0, y_p − y_i} .. j{x_k − x_p, s.(x_k − x_p)}.
y_k − y_j = s(x_k − x_j);
new a, b;   a = s(x_p − x_i);   b = y_k − y_i − s(x_k − x_i);
x_j − x_i = −2a·b(x_p − x_i)/(a·a + b·b);
y_p − y_i = .5(b·b − a·a)/b.


subroutine sdraw(index i)                          % starting point
        (index p) % upper turning point (y_p to be defined)
        (index k)                                    % middle point
        (index q) % lower turning point (y_q to be defined)
        (index j)                                    % ending point
        (index a)  % effective pen width at turning points
        (index b)   % effective pen height at middle point
        (var s):                           % slope at middle point
cpen;   top_6 y_5 = top_b y_k;   bot_6 y_6 = bot_b y_k;
x_5 = x_6 = x_k;
rt_a x_p = rt_0 x_1;   lft_a x_p = lft_0 x_2;
rt_a x_q = rt_0 x_9;   lft_a x_q = lft_0 x_10;
y_2 = y_p;   y_9 = y_q;
call scomp(i, 1, 3, 5, s);             % compute y_1 and point 3
call scomp(i, 2, 4, 6, s);             % compute y_2 and point 4
call scomp(j, 9, 7, 5, s);             % compute y_9 and point 7
call scomp(j, 10, 8, 6, s);           % compute y_10 and point 8
hpen;   w_0 ddraw i{x_1 − x_i, 0} .. 1{0, y_1 − y_i} ..
          3{x_q − x_p, s(x_q − x_p)} .. 7{x_q − x_p, s(x_q − x_p)} ..
          9{0, y_j − y_9} .. j{x_j − x_9, 0},
      i{x_2 − x_i, 0} .. 2{0, y_2 − y_i} ..
          4{x_q − x_p, s(x_q − x_p)} .. 8{x_q − x_p, s(x_q − x_p)} ..
          10{0, y_j − y_10} .. j{x_j − x_10, 0}.   % the s-curve


"The letter S";
hpen;   top_0 y_1 = round(h + o);   bot_0 y_5 = −o;
x_3 = 5u;   y_3 = .52h;
lft_8 x_2 = round u;   rt_8 x_4 = round 9u;
x_1 = 4.5u;   x_5 = 5.5u;
lft_0 x_6 = round u;   rt_0 x_7 = round 8.5u;
y_6 = good_0 (1/3)h − 1;   y_7 = good_0 (2/3)h + 1;
bot_0 y_8 = 0;   y_9 = y_6;   x_8 = x_6;   rt_4 x_6 = rt_0 x_9;
top_0 y_10 = h;   y_11 = y_7;   x_10 = x_7;   lft_4 x_7 = lft_0 x_11;
w_0 ddraw 6 .. 8, 9 .. 8;                              % lower serif
ddraw 7 .. 10, 11 .. 10;                               % upper serif
rpen#;   w_4 draw 6{0, −1} .. 5{1, 0};              % erase excess
lpen#;   w_4 draw 7{0, 1} .. 1{−1, 0};                     % ditto
hpen;   w_0 draw 6{0, −1} .. 5{1, 0};       % lower left stroke
draw 7{0, 1} .. 1{−1, 0};                     % upper right stroke
call `a sdraw(1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, −h/(50u)).   % middle stroke
```

مراجع

1. Richard J. Fateman, *Essays in Algebraic Simplification*, Ph. D. thesis, Harvard University, April 1971; also MAC TR-95, April 1972. Available from MIT Laboratory for Computer Science, Publications, Room 112, 545 Technology Square, Cambridge MA 02139.

2. Donald E. Knuth, Mathematical Typography, *Bull. Amer. Math. Soc.* (new series) **1** (1979), 337-372. Reprinted with corrections as part 1 of [3].

3. Donald E. Knuth, *TEX and METAFONT: New Directions in Typesetting* (Providence, R.I. : American Mathematical Society, and Bedford, Mass.: Digital Press, 1979).

4. Giovanni Mardersteig, *The alphabet of Francesco Torniello (1517) da Novara* (Verona: Officina Bodoni, 1971).

5. The Mathlab Group, *MACSYMA Reference Manual*, version nine, 1977. Available from MIT Laboratory for Computer Science, Mathlab Group, Room 828, 545 Technology Square, Cambridge MA 02139. The original design and implementation of MACSYMA's "SOLVE" operator was due to R. J. Fateman, and it is briefly described in §3.6 of [1].

6. H. W. Mergler and P. M. Vargo, "One approach to computer-assisted letter design", *J. Typographic Research* **2** (1968), 299-322. [This paper describes the first computer system for drawing parameterized letters; for reasons that are now clear, the authors were unable to obtain a satisfactory 'S'!]

7. Joel Moses, MACSYMA–The Fifth Year, *Proc. EUROSAM' 74*, Royal Inst. of Tech., Stockholm; *SIGSAM Bulletin* **8**, 3 (Association for Computing Machinery, 1974), 105-110.