خم پروانه

● کریم احمدی دلیر

دانشگاه تربیت معلم تبریز - گروه ریاضی

زیبایی ذاتی برخی از خمهای مسطّح که اغلب مربوط به تقارن، برگها و آویزه‌ها، رفتار مجانبی یا حتی عدم تقارن آنهاست، بسیاری از ما را مجذوب و علاقه‌مند به ترسیم آنها می‌کند. خمهایی نظیر گلهای چند پر و نظیر آنها، ممکن است شور و شوق زیادی در شاگردان ایجاد نکنند ؛ امّا ترسیم خمهای پیچیده‌تر به کمک یک رایانه، ضمن ایجاد علاقه، اغلب، شگفتیهایی همراه دارد. البته در پویایی مشاهده خمی که روی صفحهٔ رایانه ترسیم می‌شود، چیز خاصّی وجود دارد که کلّ روند را لذّت‌بخش‌تر می‌کند.

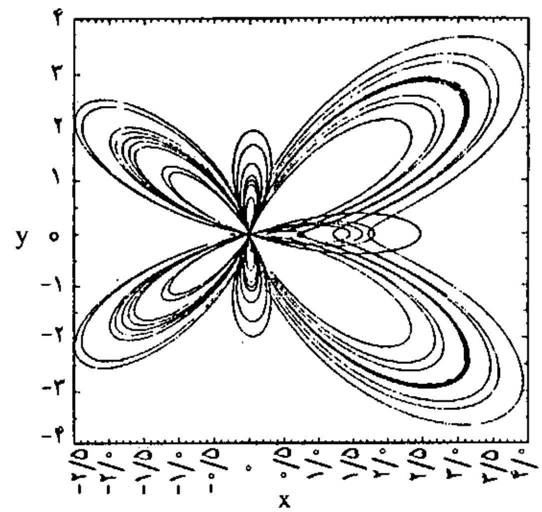
هدف این مقاله، اشاره به این نکته است که لذّت و سرگرمی قابل ملاحظه‌ای در طراحی خم وجود دارد که در عین حال، به‌طور همزمان می‌توان به هدفهای آموزشی مورد نظر دست یافت. طبق اصول آموزشی، پرسشهای مهم دربارهٔ جاگذاری حدود یک متغیر مستقل، طرح اندازهٔ گامها، اندازهٔ پنجرهٔ صفحهٔ مونیتور همگی قبل از «فشار تکمه Run» نیاز به آدرس‌دهی دارد. البته مشاهداتی در مورد اندازه، تناوب، تقارن، دامنه و نظیر آنها، رابطهٔ جدیدی را به دانش‌آموز القا می‌کند و آن به حداقل رساندن زمان اجرای برنامه است.

به‌علاوه، طراحی خمهایی که شکل آنها از قبل شناخته شده نیست، هیجانی در شخص ایجاد می‌کند. برای مثال، خمهای توصیف شده با معادله‌های قطبی $P = a + b\cos(n\theta)$ و $P^2 = a + b\cos(n\theta)$ بسیار جالبتر از معادله‌های قطبی توصیف‌شده با $P = a\cos(n\theta)$ هستند. شاگردان اغلب با رفتار آنها وقتی که $a < b$، $a > b$، $a = b$، n زوج است، n فرد است و غیره شگفت‌زده می‌شوند. سایر خمهای گلبرگی جالبی که تعداد گلبرگهای آنها را دانش‌آموزان می‌توانند حدس بزنند، عبارتند از: معادله‌های $P = (4\cos(n\theta) + \cos(m\theta)) / \cos(\theta)$ که در آن n و m اعداد صحیح فرد هستند. اگر یکی از دو عدد n یا m زوج باشد، خم دارای یک مجانب خواهد بود و ظاهر کاملاً متفاوتی خواهد داشت. برای مثال، خمهای سرگرم‌کننده به‌ازای $(n, m) \in \{(5,3),(3,5),(1,9),(3,2)\}$ حاصل می‌شوند.

شاید جالبترین و زیباترین همهٔ این خمها، خم پروانه‌ای با معادلهٔ

$$P = e^{\cos(\theta)} - ۲\cos(۴\theta) + \sin^{۵}(\frac{\theta}{۱۲})$$

باشد که در شکل (۱) نمایش داده شده است. جملهٔ آخر $\sin^{۵}(\frac{\theta}{۱۲})$ صرفاً جهت بالا بردن جذبه و زیبایی به آن افزوده شده است.



شکل ۱: خم پروانهٔ $P = e^{\cos(\theta)} - ۲\cos(۴\theta) + \sin^{۵}(\frac{\theta}{۱۲})$.

خم شبه پروانهٔ دیگری دارای معادلهٔ $P = e^{\cos(۲\theta)} - ۱/۵\cos(۴\theta)$ است که می‌توان با اضافه کردن جمله‌های دیگری نظیر بالا یا تعویض مقادیر ثابت، بر زیبایی آن افزود.

همچنین می‌توان مطالعه‌ای روی اندازهٔ گامها انجام داد که احتمالاً این کار، دانش‌آموزان یا دانشجویان را شیفتهٔ خود خواهد کرد. خم پروانه، حسّاسیت بالایی نسبت به اندازهٔ گامها دارد. معادلهٔ خم پروانهٔ

$$P(\theta) = e^{\cos(\theta)} - ۲\cos(۴\theta)$$

را درنظر بگیرید. این خم را در عامل سینوسی متغیّر سریعی مانند $\sin^{۴}(\lambda\theta)$ $(\lambda = ۹۹۹۹۹۹۹۹)$ ضرب می‌کنیم. توان چهارم، برای نامنفی و کوچک نگه داشتن عامل انتخاب شده است. مقدار λ به‌طور اختیاری انتخاب شده است و هر عدد دلخواه بزرگ، می‌تواند همان اثر را داشته باشد.

مجموعهٔ داده‌ها شامل نقاط (x_n, y_n) است که در آن:

$$P(\theta) = \left(e^{\cos(\theta)} - ۲\cos(۴\theta)\right)\sin^{۴}(\lambda\theta)$$

و

$$x_n = P(\theta_n)\sin(\theta_n) \quad , \quad y_n = P(\theta_n)\cos(\theta_n)$$

با قرار دادن $\theta_۰ = ۰$ و $\theta_n = \theta_{n-۱} + h$ حاصل می‌شوند (که در آن h اندازهٔ گامها را به‌ازای $۰ \le \theta \le ۲\pi$ نشان می‌دهد).

البته با تعویض سینوس و کسینوس در معادلهٔ x_n و y_n، پروانه ۹۰° نسبت به وضعیت عمودی دوران می‌کند. این مجموعهٔ داده‌ها، شامل تقریباً ۱۱۵۰۰ تا ۴۲۰۰۰ نقطه است.

طرحهای زیر با اندازهٔ گامهای:

$$h_۱ = ۰/۰۰۰۱۵ \ , \ h_۲ = ۰/۰۰۰۳ \ ,$$

$$h_۳ = ۰/۰۰۰۵ \ , \ h_۴ = ۰/۰۰۰۵۵ \ ,$$

$$h_۵ = ۰/۰۰۰۷ \ , \ h_۶ = ۰/۰۰۰۱۶۹ \ ,$$

$$h_۷ = ۰/۰۰۰۷۱۱ \ , \ h_۸ = ۰/۰۰۰۷۱$$

حاصل می‌شوند. تماشای پویایی طراحی نقاط پی‌درپی تولیدشدهٔ (x_n, y_n) به خودی خود جالب است. احتمالاً دانش‌آموزان یا دانشجویان، از آزمودن معادله‌ها، مقادیر λ و اندازه‌های گامهای مختلف لذّت خواهند برد.