خطوط مجانب

● احمد قندهاری

۱ـ شاخهٔ بی‌نهایت منحنی: می‌گوییم منحنی نمایش تابع به‌معادلهٔ $y = f(x)$ دارای شاخه بی‌نهایت است هرگاه، نقطه یا نقاطی روی منحنی وجودداشته باشد که لااقل یکی از مختصات آن به سمت بی‌نهایت میل کند.

مثال (۱): منحنی نمایش تابع به‌معادلهٔ $y = \frac{2x-1}{x-5}$ دارای شاخهٔ بی‌نهایت است زیرا:

$$\begin{cases} \lim \frac{2x-1}{x-5} = 2 \\ x \to \pm\infty \end{cases}$$

مثال (۲): منحنی نمایش تابع به‌معادلهٔ $y = \frac{x^2 - 4x}{x-1}$ دارای شاخهٔ بی‌نهایت است زیرا:

$$\begin{cases} x \to 1 \\ y \to \pm\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} x \to \pm\infty \\ y \to \pm\infty \end{cases}$$

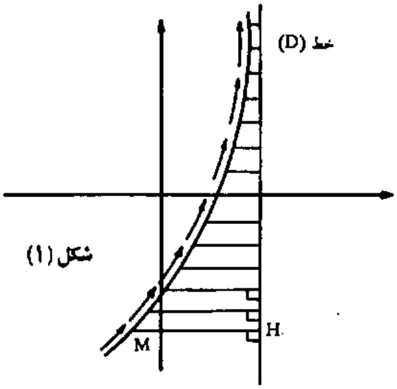
مثال (۳): منحنی نمایش تابع به‌معادلهٔ $y = \frac{4x+1}{x-4}$ دارای شاخهٔ بی‌نهایت است زیرا:

$$\begin{cases} x \to 4 \\ y \to \pm\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} x \to \pm\infty \\ y \to 4 \end{cases}$$

مثال (۴): منحنی‌نمایش‌تابع به‌معادلهٔ $y = \sqrt{4 - x^2}$ دارای شاخهٔ بی‌نهایت نیست. زیرا: $D_f = [-2 , 2]$

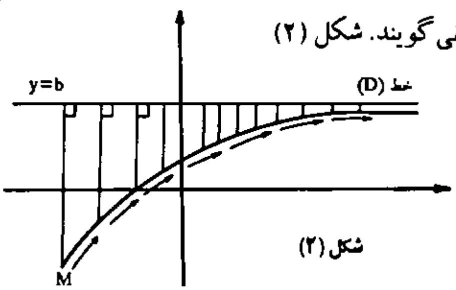
۲ ـ تعریف خط مجانب: هرگاه منحنی (C) نمایش تابع به‌معادلهٔ $y = f(x)$ دارای شاخهٔ بی‌نهایت باشد، خط (D) را مجانب آن شاخه منحنیٔ گوییم. در صورتی که فاصله نقطهٔ متغیر M روی آن شاخه تا آن خط، وقتی نقطه M روی آن شاخه بی‌نهایت دور شود به سمت صفر میل کند.

تذکر: اگر خط مجانب موازی محور عرضها باشد؛ در اصطلاح آن را مجانب قائم گویند. شکل (۱)



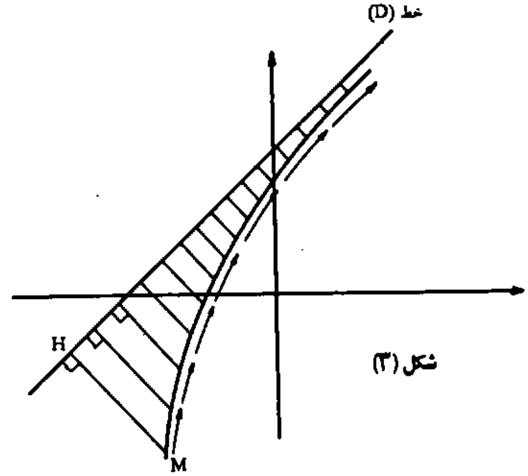
شکل (۱)

اگر خط مجانب موازی محور طولها باشد، در اصطلاح آن را مجانب افقی گویند. شکل (۲)



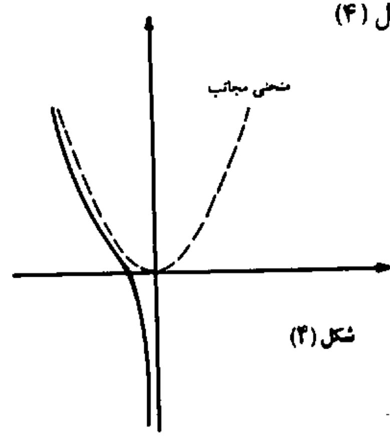
شکل (۲)

اگر خط مجانب محورهای مختصات را قطع کند، دراصطلاح آن را مجانب مایل گویند. شکل (۳)



شکل (۳)

ممکن است مجانب منحنی تابع به معادلهٔ $y = f(x)$، خودش یک منحنی باشد که در آن صورت در اصطلاح آن‌را منحنی مجانب گویند. شکل (۴)



شکل (۴)

۳ـ خط مجانب قائم

قضیه I: اگر درتابع به معادلهٔ $y = f(x)$، حدّ چپ یا حدّ راست یا حدّ تابع وقتی که x به سمت a میل می‌کند، برابر $(+\infty)$ یا $(-\infty)$ شود. در این صورت خطِ D به معادلهٔ $\boxed{x = a}$ را مجانب قائم منحنی تابع به‌معادله $y = f(x)$ گویند. (اثبات درکتاب جبر و آنالیز سال چهارم مبحث مجانبها هست.)

مثال ۱: منحنی نمایش تابع به معادلهٔ $y = \dfrac{۴}{\sqrt{x - ۲}}$ دارای مجانب‌قائمی‌به‌معادلهٔ $\boxed{x = ۲}$ است‌زیرا: $x \to ۲^+ \Rightarrow y \to +\infty$

مثال ۲: منحنی نمایش تابع به معادلهٔ $y = \dfrac{۵x + ۴}{\sqrt{-x}}$ دارای مجانب‌قائمی‌به‌معادلهٔ $\boxed{x = ۰}$ است زیرا: $x \to ۰^- \Rightarrow y \to +\infty$

مثال ۳: منحنی نمایش تابع به معادلهٔ $y = \dfrac{-x^۲ - ۱}{(x - ۱)^۲}$ دارای مجانب قائمی به معادلهٔ $\boxed{x = ۱}$ است زیرا: $x \to ۱ \Rightarrow y \to -\infty$

نکته: اگر $x = a$ مجانب قائم منحنی نمایش تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ باشد، آنگاه $x = a$ عضو دامنهٔ تعریف تابع نیست ولی لااقل یکی از دو مقدار $a + \varepsilon$ یا $a - \varepsilon$ باید عضو دامنه تعریف تابع باشد.

سؤال: آیا تابع به‌معادلهٔ $y = \dfrac{|x - ۲|}{x - ۲}$ خط مجانب قائم دارد؟

جواب: خیر، زیرا:

اگر $x \to ۲^+ \Rightarrow y \to ۱$

اگر $x \to ۲^- \Rightarrow y \to -۱$

مثال (۴): آیا منحنی تابع به معادلهٔ $y = \dfrac{\sqrt{x^۲ - ۱}}{x}$ خط مجانب قائم دارد؟

جواب: خیر، زیرا: دامنهٔ تابع برابر است با:

$(-\infty , -۱] \cup [۱ , +\infty)$

و جواب مخرج $\boxed{x = ۰}$ است و هیچ‌یک از دو مقدار ۰^+ یا ۰^- عضو دامنهٔ تابع نیست.

مسأله (۱): m را چنان بیابید تا منحنی تابع به معادلهٔ $y = \dfrac{x^۲ + ۱}{x^۲ + mx + ۴}$ فقط یک مجانب قائم داشته باشد.

حل: باید معادلهٔ $x^۲ + mx + ۴ = ۰$ فقط یک ریشه حقیقی

داشته باشد. پس لازم است $\Delta = 0$.

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = m^2 - 16 = 0 \Rightarrow \boxed{m = \pm 4}$$

یعنی هر یک از توابع به معادلات $y_1 = \frac{x^2+1}{x^2+4x+4}$ و $y_2 = \frac{x^2+1}{x^2-4x+4}$ فقط یک مجانب قائم دارد.

مسأله (۲): m راچنان بیابید تا منحنی تابع به معادلهٔ $y = \frac{x-1}{x^2+mx-4}$ فقط یک مجانب قائم داشته‌باشد.

حل: راه‌حل مسأله (۱) درحل این مسأله مقدور نیست زیرا دلتای معادلهٔ $x^2+mx-4=0$ همواره مثبت است $(\Delta = m^2+16>0)$.

برای حل این مسأله باید جواب معادله صورت $x-1=0$ را در مخرج قرار بدهیم.

$$x=1 \Rightarrow x^2+mx-4=0 \Rightarrow 1+m-4=0 \Rightarrow \boxed{m=3}$$

وضع جدید تابع به‌صورت: $y=\frac{x-1}{x^2+3x-4}$ است.

$$x^2+3x-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-4\end{cases}$$

اگر $x\to 1 \Rightarrow \lim y = \lim \frac{x-1}{(x-1)(x+4)} = \lim \frac{1}{x+4} = \frac{1}{5}$

اگر $x \to -4 \Rightarrow y \Rightarrow \pm\infty$

پس منحنی این تابع فقط یک مجانب قائم به‌معادلهٔ $\boxed{x=-4}$ دارد.

مسأله (۳): در تابع به معادلهٔ $y=\frac{x^2+x+1}{mx^2+(m+n)x+mn}$، m و n را چنان بیابید تا خطوط $x=10$ و $x=100$ معادلات مجانبهای قائم منحنی تابع باشد.

حل: ریشه‌های معادله $mx^2+(m+n)x+mn=0$ اعداد (۱۰) و (۱۰۰) است پس:

$$x' . x'' = \frac{c}{a} \Rightarrow 1000 = \frac{mn}{m} \Rightarrow \boxed{n=1000}$$

$$x'+x'' = -\frac{b}{a} \Rightarrow 110 = -\frac{m+n}{m} \Rightarrow 110 = -\frac{m+1000}{m}$$

$$\Rightarrow 111m = -1000 \Rightarrow \boxed{m = -\frac{1000}{111}}$$

مسأله (۴): معادلات مجانبهای قائم منحنی مکان هندسی نقطهٔ $M \left| \begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{2}}{t} \\ y=\frac{t}{t^2-2}\end{array}\right.$ را وقتی t تغییر می‌کند بیابید.

$$y\to\infty \Rightarrow \frac{t}{t^2-2} \to \infty \Rightarrow t^2-2 \Rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t\to\sqrt{2} \Rightarrow \lim x = 1 \\ t\to -\sqrt{2} \Rightarrow \lim x=-1 \end{cases}$$

بنابراین خطوط $x=1$ و $x=-1$ معادلات مجانبهای قائم است.

مسأله (۵): معادلات مجانبهای قائم منحنی نمایش تابع به معادلهٔ $y=\frac{\sin 2x}{\cos 3x}$ را در فاصله $[0, 2\pi]$ بیابید.

حل:

$$y = \frac{2\sin x\cos x}{4\cos^3 x - 3\cos x} = \frac{2\sin x \cos x}{\cos x(4\cos^2 x-3)}$$

$$y\to\infty \Rightarrow 4\cos^2 x - 3 = 0 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

الف) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}}$$

ب) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{5\pi}{6} \Rightarrow$

$$x = \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$$

پس خطوط $x = \frac{\pi}{6}$ و $x = \frac{11\pi}{6}$ و $x = \frac{5\pi}{6}$ و $x = \frac{7\pi}{6}$ معادلات مجانبهاست.

تذکر مهم: اگر در معادلهٔ درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$، a به سمت صفر میل کند، آنگاه قدر مطلق یک ریشه به سمت ∞ میل می‌کند و ریشه دیگر به سمت $(-\frac{c}{b})$ میل می‌کند. چنانچه، a و b هر دو به سمت صفر میل کند، آنگاه قدر مطلق هر دو ریشه به سمت ∞ میل می‌کند.

اثبات: $x = \frac{1}{y}$: فرض می‌شود $\Rightarrow \frac{a}{y^2} + \frac{b}{y} + c = 0$

$$\Rightarrow cy^2 + by + a = 0$$

اگر $a \to 0 \Rightarrow cy^2 + by \to 0 \Rightarrow y(cy + b) \Rightarrow 0$

$$\Rightarrow y \to 0 , y \to -\frac{b}{c}$$

$$x = \frac{1}{y} \Rightarrow \begin{cases} y \to 0 \Rightarrow & \boxed{|x'| \to \infty} \\ y \to -\frac{b}{c} \Rightarrow & \boxed{x'' \to -\frac{c}{b}} \end{cases}$$

اگر $a \to 0 \Rightarrow \begin{cases} |x'| \to \infty \\ x'' \to -\frac{c}{b} \end{cases}$

اگر $a , b \to 0 \Rightarrow \begin{cases} |x'| \to \infty \\ |x''| \to \infty \end{cases}$

مسأله (۶): معادلات مجانبهای قائم منحنی به معادله $x^2y^2 - 4yx - 4x^2 + 5x - y^2 = 0$ را بیابید.

حل: $(x^2 - 1)y^2 - 4yx + (5x - 4x^2) = 0$

$$y \to \infty \Rightarrow a \to 0 \Rightarrow x^2 - 1 \to 0 \Rightarrow x \to \pm 1$$

پس خطوط $x = 1$ و $x = -1$ معادلات مجانبهای قائم منحنی فوق است.

قضیهٔ II: اگر در یک تابع، $x \to +\infty$ یا $x \to -\infty$ یا $x \to \pm\infty$، آنگاه حدّ تابع برابر عدد (b) شود، خطّ $y = b$ را مجانب افقی منحنی گویند. (اثبات درکتاب سال چهارم مبحث مجانبهاهست).

مثال: معادلات مجانبهای افقی هریک از توابع به‌معادلات زیر را بیابید:

الف) $y = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$

$x \to \pm\infty \Rightarrow$ حد $y =$ حدّ $\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\boxed{y = \frac{1}{2}}$ معادلهٔ مجانب افقی

ب) $y = \frac{x - 1}{x^2 + 4x}$

$x \to \pm\infty \Rightarrow$ حد $y =$ حد $\frac{x}{x^2} =$ حدّ $\frac{1}{x} = \frac{1}{\pm\infty} \to 0 \Rightarrow$

$\boxed{y = 0}$ معادلهٔ مجانب افقی

نتیجه: یک تابع کسری وقتی مجانب افقی دارد که یا صورت و مخرج همدرجه باشند یا درجه مخرج بیشتر باشد.

هم ارزی رادیکالها

$$\sqrt[p\ \text{زوج}]{ax^p + bx^{p-1} + \dots} \sim \pm\sqrt[p]{a}\left(x + \frac{b}{ap}\right)$$

$x \to \pm\infty$

اگر p فرد باشد سمت راست $(\pm)$ لازم نیست.

اثبات: طرفین را به توان p می‌رسانیم:

$$\Rightarrow ax^p + bx^{p-1} + \dots \sim a\left(x + \frac{b}{ap}\right)^p$$

$$\Rightarrow ax^p + bx^{p-1} + \ldots \sim a\left(x^p + \frac{pb}{ap}x^{p-1} + \ldots\right)$$

$$\Rightarrow ax^p + bx^{p-1} + \ldots \sim ax^p + bx^{p-1} + \ldots$$

مثال (۱):

$$\sqrt[4]{16x^4+64x^3+1} \sim \pm\sqrt[4]{16}\left(x+\frac{64}{4\times 16}\right)=\pm 2(x+1)$$
$$x \to \pm\infty$$

مثال (۲):

$$\sqrt[3]{8x^3-48x^2+5} \sim \sqrt[3]{8}\left(x+\frac{-48}{3\times 8}\right)=2(x-2)$$
$$x \to \pm\infty$$

مثال (۳):

$$\sqrt{4x^2-24x+2} \sim \pm\sqrt{4}\left(x+\frac{-24}{2\times 4}\right)=\pm 2(x-3)$$
$$x \to \pm\infty$$

مسألهٔ (۷): معادلات مجانبهای افقی منحنی تابع به معادلهٔ $y = \operatorname{Arc}\cos\dfrac{x+\sqrt{x^2-2x}}{2x+1}$ را بیابید.

الف) $x \to +\infty \Rightarrow$ حد $y =$ حد $\operatorname{Arc}\cos\dfrac{x+(x-1)}{2x+1}$

$= $ حد $\operatorname{Arc}\cos\dfrac{2x-1}{2x+1} = \operatorname{Arc}\cos 1 = 0$

پس خط $\boxed{y = 0}$ معادلهٔ مجانب افقی است.

ب) $x \to -\infty \Rightarrow$ حد $y =$ حد $\operatorname{Arc}\cos\dfrac{x-(x-1)}{2x+1}$

$= $ حد $\operatorname{Arc}\cos\dfrac{1}{2x+1} = \operatorname{Arc}\cos = \dfrac{\pi}{2}$

پس خط $\boxed{y = \dfrac{\pi}{2}}$ هم معادلهٔ مجانب افقی است.

مسأله (۸): معادلات مجانبهای افقی منحنی تابع به معادلهٔ $y = \dfrac{2x+\sqrt{4x^2-24x+1}}{\sqrt{x^2-2x}+x}$ را بیابید.

حل:

الف) $x \to +\infty \Rightarrow$ حد $y =$ حد $\dfrac{2x+\sqrt{4}\left(x+\frac{-24}{8}\right)}{+\left(x-\frac{2}{2}\right)+x}$

$= $ حد $\dfrac{4x-6}{2x-1} = 2$

پس خط $\boxed{y = 2}$ معادله مجانب افقی است.

ب) $x \to -\infty \Rightarrow$ حد $y =$ حد $\dfrac{2x-\sqrt{4}\left(x+\frac{-24}{8}\right)}{-\left(x-\frac{2}{2}\right)+x} = \dfrac{6}{1} = 6$

پس خط $\boxed{y = 6}$ معادله مجانب افقی است.

مسأله (۹): اگر خط $y = 2$ معادلهٔ مجانب افقی منحنی تابع به معادله $y = \dfrac{(a-2)x^3+(b-a)x^2+cx-1}{4x+1}$ باشد، a، b و c را بیابید.

حل: منحنی این تابع وقتی مجانب افقی دارد که درجه صورت از درجهٔ مخرج بیشتر نباشد پس باید ضرایب x^2 و x^3 مساوی صفر باشد.

$$\Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

$$b - a = 0 \Rightarrow b = a \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

$\Rightarrow$ وضع جدید تابع: $y = \dfrac{cx-1}{4x+1}$

معادلهٔ مجانب افقی: $x \to \pm\infty \Rightarrow$ حد $y = \dfrac{c}{4}$

$$\Rightarrow \frac{c}{4} = 2 \Rightarrow \boxed{c = 8}$$

مسأله (۱۰): معادلات مجانبهای افقی منحنی مکان نقطهٔ

$$M \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{t^3}{t^2 - 4} \\ y = \dfrac{8}{t} \end{array} \right.$$ را بیابید.

حل:

$$x \to \pm\infty \Rightarrow \frac{t^3}{t^2 - 4} \to \pm\infty \Rightarrow \begin{cases} t \to 2 & \Rightarrow \text{حدّ } y = 4 \\ t \to -2 & \Rightarrow \text{حدّ } y = -4 \\ t \to \infty & \Rightarrow \text{حدّ } y = 0 \end{cases}$$

پس خطوط $y = 4$ و $y = -4$ و $y = 0$ معادلات مجانبهای افقی است.

توجه: به‌جای آنکه بنویسیم $x \to +\infty$ و $x \Rightarrow -\infty$ می‌توان نوشت: $x \Rightarrow \infty$.

مسأله (۱۱): معادلات مجانبهای افقی منحنی به معادلهٔ $(y^2 - 4)x^2 - 5yx - 1 = 0$ را بیابید.

حل: $x \to \infty \Rightarrow a \to 0 \Rightarrow y^2 - 4 \to 0 \Rightarrow y \to \pm 2$

پس خطوط $y = 2$ و $y = -2$ معادلات مجانبهای افقی است.

مسأله (۱۲): درتابع به‌معادله $y = ax + b + \sqrt{4x^2 - 48x + 5}$ وقتی $x \to +\infty$، خط $y = 2$ معادله مجانب افقی است، a و b را بیابید.

$$x \to +\infty \Rightarrow \text{حد } y = \text{حد}\left[ax + b + \sqrt{4}\left(x + \frac{-48}{8}\right)\right]$$

$$= \text{حد}\left[(a + 2)x + (b - 12)\right] \equiv 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2 = 0 \\ b - 12 = 2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 14 \end{array}} \right.$$

۳ـ مجانب مایل

اگر درتابع به معادلهٔ $y = f(x)$ وقتی $x \to \infty$ آنگاه $y \to \infty$

می‌گوییم ممکن است منحنی تابع به‌معادلهٔ $y = f(x)$ دارای مجانب مایلی به‌معادلهٔ $y = mx + h$ باشد.

شرط $\begin{cases} x \to \infty \\ y \to \infty \end{cases}$ برای وجود معادلهٔ مجانب مایل در یک تابع، شرط لازم است و کافی نیست.

قضیهٔ III: اگر خط (D) به معادلهٔ $Y = mx + h$ معادله مجانب مایل منحنی تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ باشد داریم:

$$\begin{cases} \text{حـد } (y - Y) = 0 \\ x \to +\text{یا}-\infty \end{cases}$$

عکس قضیهٔ III: هرگاه تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ و خطِ (D) به معادله $Y = mx+h$ راداشته‌باشیم‌به‌طوری‌که $\underset{x \to +\text{یا}-\infty}{\text{حدّ}} (y - Y) = 0$ آنگاه خط (D) مجانب مایل منحنی است.

(اثبات هردو قضیه درکتاب سال چهارم هست.)

روشهای تعیین معادلهٔ مجانب مایل

روش اوّل: (روش حد):

فرض می‌کنیم خط (D) به معادلهٔ $Y = mx + h$ معادله مجانب مایل منحنی تابع به‌معادله $y = f(x)$ باشد. در این صورت داریم:

$$mx = Y - h$$

$$\Rightarrow m = \frac{Y}{x} - \frac{h}{x}$$

چون شرط لازم مجانب آن است که $x \to \infty$ و $y \to \infty$ پس:

$$m = \underset{x \to \infty}{\text{حـد}}\left(\frac{Y}{x} - \frac{h}{x}\right)$$

وقتی $x \to \infty$ عبارت $\frac{h}{x}$ به سمت صفر میل می‌کند. پس:

$$\boxed{m = \underset{x \to \infty}{\text{حـدّ}} \frac{y}{x}} \quad \text{زیرا:} \quad \begin{cases} \text{حـدّ } (y - Y) = 0 \\ x \to \infty \end{cases}$$

$$\boxed{m = \lim_{x \Rightarrow \infty} \frac{Y}{x}}$$ یا

نوع ابهام فوق $\frac{\infty}{\infty}$ است که پس از رفع ابهام مقدار m به‌دست می‌آید. به‌همین ترتیب: $Y = mx + h \Rightarrow h = (Y - mx)$

$$\Rightarrow \left\{ h = \lim_{x \to \infty} (Y - mx) \right. \quad \text{یا} \quad \boxed{h = \lim_{x \to \infty} (y - mx)}$$

ابهام این حدّ $(\infty - , \infty +)$ است که پس از رفع ابهام مقدار h به‌دست می‌آید.

مثال: معادله مجانب مایل منحنی تابع به معادلهٔ $y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 1}$ را بیابید.

حل: فرض می‌کنیم $y = mx + h$ معادله مجانب مایل منحنی تابع فوق باشد:

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2 - 4x + 1}{x - 1}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 - x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \Rightarrow \boxed{m = 1}$$

$$h = \lim_{x \to \infty} (y - mx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 1}{x + 1} - x \right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-5x + 1}{x + 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{-5x}{x} = -5 \Rightarrow \boxed{h = -5}$$

معادلهٔ خط مجانب مایل منحنی: $\Rightarrow \boxed{y = x - 5}$

توجه:

۱) اگر $m = 0$ و h حدّ معینی داشته باشد، می‌گوییم خط مجانب مایل به خط مجانب افقی تبدیل شده است.

۲) اگر m یک عدد حقیقی باشد و حدّ (h) بی‌نهایت شود بنا به تعریف می‌گوییم منحنی دارای شاخهٔ سهمی شکل در امتداد خطّ D به ضریب زاویه (m) است.

مثال: در تابع به معادلهٔ $y = 2x + \sqrt{x + 2}$ داریم:

$$x \to +\infty \Rightarrow y \Rightarrow +\infty$$

$$\left\{ m = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x + \sqrt{x + 2}}{x} \right.$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x} = 2 \Rightarrow m = 2$$

$$\left\{ h = \lim_{x \to +\infty} (y - mx) = \lim_{x \to +\infty} (2x + \sqrt{x + 2} - 2x) \right.$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x + 2} = +\infty$$

بنابه شماره (۲)، منحنی دارای شاخه سهمی شکل در راستای خط $y = 2x$ است.

۳) اگر m یک عدد حقیقی باشد و (h) حدّ معینی نداشته باشد، در این صورت می‌گوییم منحنی در راستای $y = mx$ به بی‌نهایت می‌رود ولی دارای شاخهٔ سهمی مانند نیست.

مثال: در تابع به معادلهٔ $y = 2x + \cos x$ داریم:

$$x \to \infty \Rightarrow y \to \infty$$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x + \cos x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x} = 2$$

$$\to \boxed{m = 2}$$

$$h = \lim_{x \to \infty} (y - mx) = \lim_{x \to \infty} (2x + \cos x - 2x) = \lim_{x \to \infty} \cos x$$

حدّ $(\cos x)$ وقتی $x \to \infty$ عددی است نامشخص درفاصلهٔ [۱ و ۱−] پس h حدّ معینی ندارد.

۴) اگر حدّ (m)، بی‌نهایت شود، منحنی شاخه سهمی مانند در امتداد محور yها دارد.

مثال: در تابع $y = x^2 + 1$ داریم:

$$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to +\infty$$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x} = \pm\infty$$

مسأله ۱۳: معادله مجانب مایل منحنی مکان نقطهٔ

$$M \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{t+2}{t(t-1)} \\ y = \dfrac{t+3}{t(t^2+1)} \end{array} \right.$$

را بیابید.

حل: اوّل باید (t) ای پیدا کرد تا هم x و هم y را به سمت ∞ میل دهد و آن وقتی است که $t \to 0$ پس:

$$t \to 0 \Rightarrow \begin{cases} x \to \infty \\ y \to \infty \end{cases}$$

فرض می‌کنیم خط $y = mx + h$ معادله مجانب مایل منحنی فوق باشد.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t+3}{t(t^2+1)}}{\frac{t+2}{t(t-1)}} = \lim_{t\to 0} \frac{t(t-1)(t+3)}{t(t+2)(t^2+1)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(t-1)(t+3)}{(t+2)(t^2+1)} = \frac{-3}{2} \Rightarrow \boxed{m = -\frac{3}{2}}$$

$$h = \lim_{x\to\infty} (y - mx) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{t+3}{t(t^2+1)} + \frac{3}{2} \times \frac{t+2}{t(t-1)} \right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{2(t-1)(t+3) - 3(t+2)(t^2+1)}{2t(t-1)(t^2+1)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-3t^3 - 4t^2 + t}{2t(t-1)(t^2+1)} = \lim_{t\to 0} \frac{t(-3t^2 - 4t + 1)}{2t(t^2+1)(t-1)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{-3t^2 - 4t + 1}{2(t^2+1)(t-1)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{h = -\frac{1}{2}}$$

معادله مجانب: $\Rightarrow \boxed{y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}$

تذکر: اگر در تابع به‌معادلهٔ $y = ax + b + \frac{h(x)}{g(x)}$، درجه h(x)، کمتر از درجه g(x) باشد، خط $y = ax + b$ را معادله مجانب مایل منحنی تابع فوق گوییم.

روش دوّم؛ روش تقسیم: اگر در تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$، درجه f(x) یک واحد از درجه g(x) بیشتر باشد و خارج قسمت f(x) بر g(x) به‌صورت $(ax + b)$ باشد، خط $y = ax + b$ را معادله مجانب مایل منحنی تابع فوق گوییم. بنابراین در این روش صورت کسر را بر مخرج کسر تقسیم می‌کنیم اگر خارج قسمت به فرم $(ax + b)$ باشد، خط $y = ax + b$ را معادله مجانب مایل منحنی تابع گوییم.

مثال: معادلهٔ مجانب مایل منحنی تابع به معادلهٔ $y = \frac{2x^2 - 7x - 1}{x - 1}$ را بیابید.

حل:

$$\begin{array}{l|l} 2x^2 - 7x - 1 & x - 1 \\ \hline -6 & 2x - 5 \end{array} \Rightarrow y = 2x - 5 + \frac{-6}{x-1}$$

باتوجه به تذکر فوق درنتیجه خط $\boxed{y = 2x - 5}$ معادله مجانب مایل منحنی تابع فوق است.

مسأله ۱۴: در تابع $y = \frac{ax^2 + bx + 5}{x + 1}$، a و b را چنان بیابید تا خط $y = 2x + 3$ معادله مجانب مایل منحنی تابع فوق باشد.

حل:

$$\begin{array}{l|l} ax^2 + bx + 5 & x + 1 \\ \hline a - b + 5 & ax + (b - a) \end{array}$$

معادلهٔ مجانب مایل است. $\Rightarrow y = ax + (b - a)$

معادلهٔ مجانب مایل منحنی $y = 2x + 3$

$$\Rightarrow \boxed{a = ۲} \text{ و } b - a = ۳ \Rightarrow \boxed{b = ۵}$$

سؤال: آیا منحنی تابع به‌معادلهٔ $y = \dfrac{x\sqrt{x} + ۴}{\sqrt{x} + ۱}$ خط مجانب مایل دارد؟

جواب: خیر، زیرا: اگر صورت کسر را بر مخرج کسر تقسیم کنیم خارج قسمت به‌فرم $(ax + b)$ نمی‌باشد.

$$\begin{array}{l|l} x\sqrt{x} + ۴ & \sqrt{x} + ۱ \\ \hline ۳ & x - \sqrt{x} + ۱ \end{array}$$

به‌طوری که ملاحظه می‌شود: $y_۱ = x - \sqrt{x} + ۱$ است که معادله مجانب مایل نیست.

پس نمودار $y_۱ = x - \sqrt{x} + ۱$ چیست؟ و نسبت به منحنی چه نام دارد؟

جواب: نمودار تابع $y_۱ = x - \sqrt{x} + ۱$ یک نیم سهمی است و مجانب منحنی تابع (y) است و آن را منحنی مجانب تابع y گوییم.

تذکر: اگر در تابع به معادله $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ درجه f بیش از یک واحد از درجه g(x) بیشتر باشد، مجانب مایل منحنی تابع y به منحنی تبدیل می‌شود.

ممکن است درجه f(x) فقط یک واحد از درجه g(x) بیشتر باشد ولی خارج قسمت f(x) بر g(x) به‌فرم $(ax + b)$ نباشد. (مانند سؤال قبل) می‌گوییم مجانب مایل به منحنی تبدیل شده است.

روش سوّم: روش تقاطع

فرض می‌کنیم خط $y_۱ = ax + b$ معادلهٔ مجانب مایل منحنی تابع به معادلهٔ $y = f(x)$ باشد. معادلهٔ این خط را با معادلهٔ منحنی تقاطع می‌دهیم (y ها حذف). معادلهٔ تقاطع حاصل را برحسب x مرتب می‌نویسیم، چون خط $y_۱$ بر منحنی y در بی‌نهایت مماس است، بنابراین معادلهٔ تقاطع باید ریشه مضاعف (∞) داشته باشد. بنابراین باید دو ضریب متوالی از بزرگترین درجات معادلهٔ تقاطع حاصل را مساوی صفر قراردهیم. از آن‌جا a و b به‌دست می‌آید.

تذکر مهم: اگر از این روش در توابع رادیکالی باعدد فرجه زوج استفاده کنیم، مجانبهای مایلی که بدین روش به‌دست می‌آید وقتی قابل قبول است که حدّاقل یک دسته از بی‌نهایتهای تابع و متغیر (شرط لازم مجانب مایل) در آن صدق کند. (به‌مسألهٔ ۱۵ دقت کنید.)

مسألهٔ: معادلهٔ مجانب مایل منحنی به معادلهٔ $y = \dfrac{۲x^۲ - ۷x - ۱}{x - ۱}$ را به‌طریقهٔ تقاطع بیابید.

$$x \to \pm\infty \Rightarrow y \to \pm\infty$$

حل: فرض می‌کنیم $y = ax + b$ معادله مجانب مایل باشد.

$$\begin{cases} y = \dfrac{۲x^۲ - ۷x - ۱}{x - ۱} \\ y = ax + b \end{cases} \Rightarrow \frac{ax + b}{۱} = \frac{۲x^۲ - ۷x - ۱}{x - ۱}$$

$$\Rightarrow (a - ۲)x^۲ + (b - a + ۷)x + (۱ - b) = ۰$$

$$\begin{cases} a - ۲ = ۰ \\ b - a + ۷ = ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۲ \\ b = -۵ \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = ۲x - ۵}$$

معادلهٔ مجانب مایل:

مسأله ۱۵: معادلهٔ مجانب مایل منحنی تابع به معادلهٔ $y = x\sqrt{\dfrac{x - ۲}{x + ۲}}$ را بیابید.

حل: شرط لازم مجانب مایل: $\begin{cases} x \to -\infty \\ y \to -\infty \end{cases}$ $\begin{cases} x \to +\infty \\ y \to +\infty \end{cases}$

فرض می‌کنیم $y = ax + b$ معادله مجانب مایل باشد.

$$\begin{cases} y = x\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}} \\ y = ax+b \end{cases} \Rightarrow \quad ax+b = x\sqrt{\dfrac{x-2}{x+2}}$$

$$\Rightarrow a^2x^2 + 2abx + b^2 = \frac{x^2(x-2)}{x+2}$$

$$\Rightarrow (a^2-1)x^3 + (2a^2+2ab+2)x^2 + (4ab+b^2)x + 2b^2 = 0$$

$$\begin{cases} a^2 - 1 = 0 \\ 2a^2 + 2ab + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad a = \pm 1$$

۱- اگر $a=1 \Rightarrow 2b+4=0 \Rightarrow b=-2 \Rightarrow \boxed{y = x-2}$

۲- اگر $a=-1 \Rightarrow -2b+4=0 \Rightarrow b=2 \Rightarrow \boxed{y=-x+2}$
غ ق ق

زیرا هیچ دسته از بی‌نهایتهای شرط لازم مجانب مایل در آن صدق نمی‌کند. پس فقط $\boxed{y = x-2}$ معادله‌مجانب‌مایل منحنی تابع فوق است.

روش چهارم: (هم ارزی رادیکالها)

به کمک هم‌ارزی رادیکالها، مجانبهای افقی و مایل بسیاری از توابع به دست می‌آید.

مثال (۱): معادلات مجانبهای منحنی تابع به معادلهٔ $y = 2x - 1 + \sqrt{4x^2 + 8x - 1}$ را بیابید.

$$x \to +\infty \Rightarrow \text{حد}\, y = \text{حد}\left[2x-1+2\left(x+\frac{8}{8}\right)\right] \Rightarrow \boxed{y = 4x+1}$$

معادلهٔ مجانب مایل

$$x \to -\infty \Rightarrow \text{حد}\, y = \text{حد}\left[2x-1-2\left(x+\frac{8}{8}\right)\right] \Rightarrow \boxed{y = -3}$$

معادلهٔ مجانب افقی

مثال (۲): معادلات مجانبهای تابع به معادله $y = 4x + 1 - \sqrt{x^2 - 6x + 1}$ را بیابید.

حل: معادله مجانب مایل:

$$x \to +\infty \Rightarrow \text{حد}\, y = \text{حد}\,[4x+1-(x-3)] \Rightarrow y = 3x+4$$

معادله مجانب مایل:

$$x \to -\infty \Rightarrow \text{حد}\, y = \text{حد}\,[4x+1+(x-3)] \Rightarrow y = 5x+2$$

روش پنجم: روش ترکیبی تقسیم و هم ارزی رادیکالها

به‌کمک این روش هم مجانبهای مایل بعضی از توابع به دست می‌آید.

مثال: معادلات مجانبهای منحنی تابع به معادلهٔ $y = \sqrt{\dfrac{x^3-1}{x-2}}$ را بیابید.

معادلهٔ مجانب قائم: $y \to +\infty \Rightarrow x - 2 \Rightarrow 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

شرط لازم مجانب مایل: $x \to \pm\infty \Rightarrow y \to +\infty$

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 1 & x - 2 \\ \hline 7 & x^2 + 2x + 4 \end{array}$$

$$y = \sqrt{\frac{x^3-1}{x-2}} = \sqrt{x^2 + 2x + 4 + \frac{7}{x-2}}$$

$$x \to \pm\infty \Rightarrow \text{حد}\, y = \text{حد}\, \pm(x+1) \Rightarrow \boxed{y = \pm(x+1)}$$

معادلات مجانبهای منحنی تابع فوق

مسأله ۱۶: تابع $y = 2x - 1 + \sqrt{ax^2 - 24x + 1}$ مفروض است. اگر منحنی این تابع مجانب افقی داشته‌باشد، معادله مجانب مایل آن را بیابید.

حل: منحنی تابع فوق وقتی مجانب افقی دارد که جمله ax^2، وقتی از رادیکال خارج شود، مساوی $(-2x)$ شود بنابراین باید $x \to -\infty$ و $\boxed{a = 4}$

وضع جدید تابع $\Rightarrow y = 2x - 1 + \sqrt{4x^2 - 24x + 1}$

$$x \to +\infty \Rightarrow \lim y = \lim \left[2x - 1 + 2\left(x + \frac{-24}{8}\right)\right]$$

$$= \lim \left[2x - 1 + 2x - 6\right]$$

$y = 4x - 7$ معادلهٔ مجانب مایل است.

مسأله ۱۷: در تابع $y = -3x - 1 + \sqrt{ax^2 + bx - 1}$ اگر $x \to +\infty$، خط $y = 2x + 1$ معادلهٔ مجانب مایل است. معادلهٔ مجانب مایل دیگر تابع را بیابید.

$$x \to +\infty \Rightarrow \lim y = \lim \left[-3x - 1 + \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = (\sqrt{a} - 3)x + \left(\dfrac{b\sqrt{a}}{2a} - 1\right) \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{a} - 3 = 2 \\ \dfrac{b\sqrt{a}}{2a} - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 25 \\ b = 20 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -3x - 1 + \sqrt{25x^2 + 20x - 1}$$

$$x \to -\infty \Rightarrow \lim y = \lim \left[-3x - 1 - 5\left(x + \frac{20}{50}\right)\right]$$

معادلهٔ مجانب دیگر $\boxed{y = -8x - 3}$

مسأله ۱۸: وضعیت منحنی تابع به معادلهٔ $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x}$ را باخط مجانب مایل آن درشروع و پایان شکل بررسی کنید.

حل: منظور از حل مسأله آن است که می‌خواهیم بدانیم در شروع شکل منحنی فوق، منحنی بالای خط مجانب است یا بالعکس. همچنین در پایان شکل منحنی فوق، منحنی بالای خط مجانب است یا بالعکس.

معادلهٔ خط مجانب مایل منحنی تابع فوق به‌صورت $y_1 = x - 4$ است. برای بررسی درشروع شکل رابررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \to -\infty} (y - y_1)$$

$$\lim_{x \to -\infty} (y - y_1) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x} - x + 4\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{4}{x} = 0^-$$

از این‌جا نتیجه می‌گیریم که y_1 بزرگتر از y است یعنی درشروع شکل خط مجانب مایل بالای منحنی است.

برای بررسی در پایان شکل $\lim\limits_{x \to +\infty} (y - y_1)$ را بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{x \to +\infty} (y - y_1) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 4}{x} - x + 4\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = 0^+$$

از این‌جا نتیجه می‌گیریم که y بزرگتر از y_1 است یعنی در پایان شکل منحنی بالای خط مجانب مایل است.

مسأله ۱۹: در تابع $y = \dfrac{ax^2 + bx}{\sqrt{x^2 + 1}}$، a و b را چنان بیابید تا وقتی $x \to -\infty$، $y = 2x - 1$ معادلهٔ خط مجانب مایل منحنی تابع فوق باشد.

حل: $x \to -\infty \Rightarrow \lim y = \lim \dfrac{ax^2 + bx}{-(x)} \Rightarrow y = -ax - b$

$$\begin{cases} y = -ax - b \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = -2} \text{ و } \boxed{b = 1}$$

مسأله ۲۰: در تابع $y = \sqrt{\dfrac{ax^3 + bx^2 + 5}{x + 2}}$، a و b را چنان بیابید تا وقتی $x \to +\infty$، $y = 2x + 1$ معادلهٔ مجانب مایل منحنی تابع فوق باشد.

حل:

$$\begin{cases} y = \sqrt{\dfrac{ax^3 + bx^2 + 5}{x + 2}} \\ y = 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{ax^3 + bx^2 + 5}{x + 2}} = 2x + 1$$

$$\Rightarrow \frac{ax^3+bx^2+5}{x+2}=\frac{4x^2+4x+1}{1}$$

$$\Rightarrow (a-4)x^3+(b-12)x^2-9x+3=0 \Rightarrow \begin{cases}\boxed{\begin{matrix}a=4\\ b=12\end{matrix}}\end{cases}$$

۱! ۱!

مسأله ۲۱: معادلهٔ مجانب مایل منحنی تابع به معادلهٔ $y = x\,\text{Arc cos}\,\frac{1}{x}$ را بیابید.

حل: شرط لازم مجانب مایل. $x\to\infty \Rightarrow y\to\infty$

$$m=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\left(\frac{y}{x}\right)=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\frac{x\,\text{Arc cos}\frac{1}{x}}{x}=\quad \text{Arc cos}\,0=\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{m=\frac{\pi}{2}}$$

$$h=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}(y-mx)=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\left(x\,\text{Arc cos}\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}x\right)$$

$$=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\,x\left(\text{Arc cos}\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}\right)=\infty\times 0$$

$$\Rightarrow h=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\frac{\text{Arc cos}\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}$$

هوپیتال: $\Rightarrow \underset{x\to\infty}{\text{حد}}\frac{\frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}}{-\frac{1}{x^2}}=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{-1}=-1$

معادله خط مجانب مایل منحنی $\Rightarrow \boxed{y=\frac{\pi}{2}x-1}$

مسأله ۲۲: معادلهٔ مجانب مایل منحنی مکان نقطهٔ $M\left|\begin{matrix}x=t\\ y=t+\text{Arctg}\,t\end{matrix}\right.$ را وقتی t تغییر می‌کند بیابید.

شرط لازم مجانب مایل   اگر $t\to\infty \Rightarrow \begin{cases}x\to\infty\\ y\to\infty\end{cases}$

حل:

$$m=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}\frac{y}{x}=\underset{t\to\infty}{\text{حد}}\frac{t+\text{Arc tg}\,t}{t}=1\rightarrow \boxed{m=1}$$

$$h=\underset{x\to\infty}{\text{حد}}(y-mx)=\underset{t\to\infty}{\text{حد}}(t+\text{Arc tg}\,t-t)$$

$$=\underset{t\to\infty}{\text{حد}}(\text{Arc tg}\,t)=\pm\frac{\pi}{2}$$

معادلات مجانبهای مایل $\Rightarrow \boxed{y=x\pm\frac{\pi}{2}}$

مسأله ۲۳: معادلهٔ مجانب مایل منحنی به‌معادلهٔ $x^3+y^3+3xy=0$ را بیابید.

$$\begin{cases}x\to\infty\\ y\to\infty\end{cases}$$

فرض می‌کنیم خط $y=ax+b$ معادلهٔ مجانب مایل باشد.

$$\begin{cases}x^3+y^3+3xy=0\\ y=ax+b\end{cases}\Rightarrow x^3+(ax+b)^3+3x(ax+b)=0$$

$$(a^3+1)x^3+(3a^2b+3a)x^2+\ldots=0$$

$$\boxed{a=-1}\Rightarrow 3b-3=0\Rightarrow \boxed{b=1}\Rightarrow \boxed{y=x+1}$$

معادله خط مجانب مایل

تذکر: اگر معادله یک منحنی به‌صورت $(ax+by+c)\,(a'x+b'y+c')=k\neq 0$ باشد هریک از پرانتزهای معادلهٔ مساوی صفر یک مجانب منحنی است.