خطهای راست و صفحه‌های عمود برهم درفضا

پرویز شهریاری

برای این که به درس هندسهٔ فضایی مسلط باشیم و از عهدهٔ حل مسأله‌های مربوط به آن برآییم، باید به سه نکتهٔ اصلی توجه کنیم: تمرین ذهنی برای تجسم شکلهای فضایی؛ رسم کم وبیش درست شکل فضایی برصفحه و، سرانجام، تسلط براثبات قضیه‌ها. یکی از اساسیترین بحثهای کلیدی در هندسهٔ فضایی، بحث مربوط به «عمودبودن» در فضاست و، این مقاله کوتاه، به همین موضوع اختصاص دارد. استدلالها را تعقیب کنید، هر جا لازم است، شکل مربوط را رسم کنید (در برخی موردها، شکل را رسم نکرده‌ایم) و برای حل مسأله‌هایی که در این جا حل نکرده‌ایم، تلاش کنید. مقاله، باشیوه‌ای متفاوت باکتاب درستی تنظیم شده است و، بنابراین می‌تواند سودمند باشد.

۱. معیار شناسایی، درحالتی‌که خط راستی بریک صفحه عمود است

تعریف. خط راست را وقتی عمود برصفحه گویند که برهر خط راستی از صفحه عمودباشد.

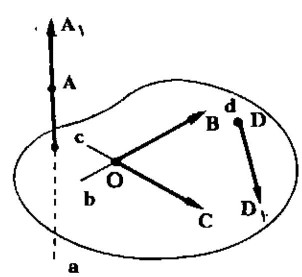
وقتی که خط راست a و صفحهٔ α برهم عمود باشند، آن را بانماد $\alpha \perp a$ یا $a \perp \alpha$ نشان می‌دهند.

قضیه ۱.(معیار عمود بودن خط راست وصفحه بریکدیگر). اگر خط راستی بردوخط راست متقاطع واقع برصفحه عمود باشد، آن وقت برصفحه عمود است.

فرض: $b \cap c = 0$ ، $b \subset \alpha$ ، $c \subset \alpha$ ، $a \perp b$ ، $a \perp c$

حکم: $a \perp \alpha$

شکل (۱)



اثبات. خط راست دلخواه d را، واقع برصفحهٔ α، درنظر می‌گیریم (شکل ۱). روی خطهای راست b و c نقطه‌های B و C، متفاوت بانقطهٔ O ، و روی خطهای راست a و d، به‌ترتیب، نقطه‌های متمایز A و A_1، D و D_1 را انتخاب می‌کنیم. این بردارها را درنظر می‌گیریم:

$$\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{a},\ \overrightarrow{OB} = \mathbf{b},\ \overrightarrow{OC} = \mathbf{c},\ \overrightarrow{DD_1} = \mathbf{d}$$

بردار **d** را برمبنای **(b,c)** تجزیه می‌کنیم، یعنی بردار **d** را به دوبرداری تجزیه می‌کنیم که، یکی از آنها درجهت بردار **b** و دیگری درجهت‌بردار **c** باشد:

$$\mathbf{d} = x\mathbf{b} + y\mathbf{c}$$

دوطرف این برابری را، دربردار **a**، ضرب اسکالر (عددی) می‌کنیم:

$$\mathbf{d.a} = x\mathbf{b.a} + y\mathbf{c.a} \qquad (1)$$

چون بنابر فرض $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ و $\mathbf{a} \perp \mathbf{c}$، بنابراین $\mathbf{b.a} = 0$ و $\mathbf{c.a} = 0$. بنابراین، برابری (۱) به‌صورت $\mathbf{d.a} = 0$ درمی‌آید و این به‌معنای آن است که $\mathbf{a} \perp \mathbf{d}$ یا $a \perp d$، درنتیجه، باتوجه به تعریف خط راست عمود برصفحه، داریم $a \perp \alpha$.

مسأله. ثابت کنید، بتغییر مکان فصل عمود بودن خط راست

بر صفحه را حفظ می‌کند.

حل. خط راست a و صفحه α را عمودبرهم در نظر می‌گیریم. هر تغییر مکان F، موجب می‌شود تا خط راست a به خط راست a_1، و صفحهٔ α به صفحه α_1 تبدیل شود. باید ثابت کنیم $a_1 \perp \alpha_1$.

دوخط راست متقاطع b وc را روی صفحهٔ α رسم می‌کنیم. ضمن تغییر مکان F، این دوخط راست، به صورت خطهای راست متقاطع b_1 و c_1 درمی‌آیند. بنابر تعریف خط راست عمود برصفحه داریم: $a \perp b$ و $a \perp c$. تغییر مکان، زاویهٔ بین خطهای راست را تغییر نمی‌دهد، بنابراین $a_1 \perp b_1$ و $a_1 \perp c_1$. به این ترتیب، بنابر معیار عمود بودن خط راست و صفحه $a_1 \perp \alpha_1$.

پرسشها و مسأله‌ها

۱. ۱) وجه‌های DAB و DAC از چهار وجهی ABCD، مثلثهای قائم الزاویه‌ای، بازاویهٔ قائمه در رأس A، هستند. ثابت کنید، یالهای BC و AD برهم عمودند.

۲) مربع ABCD و خط راست SD عمود برصفحهٔ مربع مفروض‌اند. اگر بدانیم:

$$|AB| = |SD| = a$$

فاصلهٔ نقطهٔ S را از نقطه‌های A ، B وC پیداکنید.

۲. ۱) مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ مفروض است. ثابت کنید، صفحه‌ای که از نقطه‌های A ، B_1 و D_1 می‌گذرد، برخط راست A_1C (قطر مکعب) عمود است.

۲) مکعب مستطیل $ABCDA_1B_1C_1D_1$ مفروض است؛ درضمن

$$|AB| = ۲|BC| \ , \ |AA_1| = |BC|$$

آیا خط راست BD_1 برصفحهٔ A_1C_1D عموداست؟

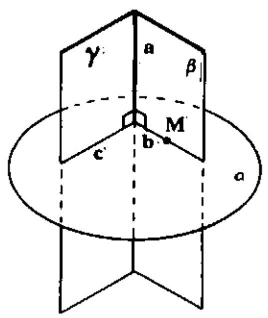
۳. ۱) ازنقطه‌ای واقع بریک خط راست، سه خط راست گذرانده‌ایم که، هر یک از آنها، برخط راست مفروضی عمود است. ثابت کنید، این سه خط راست، روی یک صفحه واقع‌اند.

۲) مکان خطهای راستی را پیدا کنید که از نقطه‌ای واقع بریک خط راست، عمود برآن رسم شده‌اند.

۲. وجود خط راست و صفحهٔ عمود برهم

مسألهٔ ۱. ثابت کنید، صفحه‌ای وجوددارد که از نقطهٔ مفروض می‌گذرد و برخط راست مفروض عموداست.

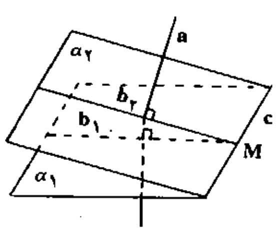
شکل (۲)



حل. نقطهٔ M و خط راست a را در نظر می‌گیریم (شکل ۲). صفحهٔ β را از M و a می‌گذرانیم (اگر $M \in a$، آن وقت β، صفحهٔ دلخواهی است که از a می‌گذرد). به‌جز این، صفحهٔ γ راهم، غیراز β، از خط راست a عبور می‌دهیم. از نقطهٔ M و در صفحهٔ β، خط راست b را عمود بر a ، و از نقطه $O=b\cap a$ و درصفحه γ، خط راست c را، بازهم عمود بر a، رسم می‌کنیم. سپس، از b وc صفحه α را می‌گذرانیم. بنابر معیارعمود بودن خط راست و صفحه داریم $a \perp \alpha$. یعنی وجود خط راست و صفحهٔ عمود برهم، ثابت شد.

یادداشت. آیا ازنقطه M می‌توان صفحهٔ دیگری، غیراز صفحهٔ α، عمود برخط راست a رسم کرد؟ فرض می‌کنیم بتوان دوصفحه متمایز α_1 و α_2 را، از نقطهٔ M، عمود برخط راست a رسم کرد.

شکل (۳)

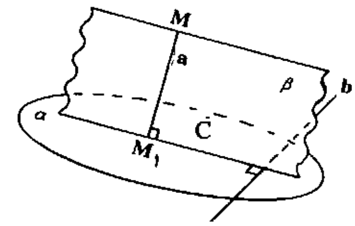


(شکل ۳)؛ c را خط راست فصل مشترک این دو صفحه می‌گیریم. از خط راست a ونقطه M ($M \in c$) صفحهٔ β را می‌گذرانیم و فصل مشترک آن را باصفحه‌های α_1 و α_2، به‌ترتیب، b_1 و b_2 می‌نامیم. بنابر تعریف خط راست عمود برصفحه، باید خط راست a بردوخط راست b_1 و b_2 عمود باشد؛ یعنی درصفحهٔ β، توانسته‌ایم از نقطهٔ M ، دوخط راست عمود برخط راست a رسم کنیم و از هندسهٔ مسطحه می‌دانیم که این، ممکن نیست. به این ترتیب، به این نتیجه می‌رسیم که از هر نقطه، تنها یک صفحه می‌توان برخط راست مفروض، عمود کرد.

مسألهٔ ۲. ثابت کنید، از هر نقطه، تنها یک خط راست می‌توان

بر صفحه مفروض، عمودکرد.

شکل (۴)



حل. نقطه M وصفحهٔ α را مفروض می‌گیریم (شکل ۴). خط راست مجهول باید از نقطه M بگذرد و بردوخط راست متقاطع از صفحه α عمودباشد.

در صفحهٔ α، خط راست دلخواه b را رسم می‌کنیم و از نقطه M، صفحهٔ βرا عمود برخط راست b درنظر می‌گیریم (مسألهٔ ۱)، و فرض می‌کنیم: $\alpha \cap \beta = c$. درصفحهٔ βو از نقطهٔ M، خط راست a را، عمودبرخط راست c رسم می‌کنیم.

چون $b \perp \beta$ و $a \subset \beta$، پس $b \perp a$، به جز این $a \perp c$. درنتیجه $a \perp \alpha$، a، خط راست مجهول است.

يادداشت. اکنون منحصر به فرد بودن خط راست a را ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم، از نقطهٔ M، دو خط راست مختلف a و a_1، عمود بر صفحهٔ α رسم شده باشند. از a و a_1، صفحهٔ βرا می‌گذرانیم تا صفحهٔ α را در خط راست c قطع کند. دراین صورت، در صفحهٔ β، از یک نقطه، دوخط راست مختلف a و a_1 عمود بر c رسم شده‌اند که باآنچه در هندسهٔ مسطحه خوانده‌ایم، متناقض است.

به این ترتیب، از نقطه مفروض می‌توان یک، و تنها یک خط راست، عمود بر صفحهٔ مفروض رسم کرد.

خط راست عمود برصفحه را، به‌صورت کوتاه، عمود برصفحه می‌نامیم.

پرسشها و مسأله‌ها

۴. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ و نقطهٔ M متعلق به پاره‌خط راست AC مفروض‌اند. مقطع مکعب را، باصفحه‌ای که از نقطهٔ M و خط راست عمود بر AC می‌گذرد، پیدا کنید.

۵. چهار وجهی ABCD داده‌شده‌است که در آن

$$\hat{ACD} = \hat{BCD} = 90^\circ$$

۱) مقطع چهاروجهی را باصفحه‌ای پیدا کنید که از نقطهٔ $M \in [DC]$ و عمود براین یال می‌گذرد.

۲) مساحت این مقطع را محاسبه کنید، به‌شرطی که M، وسط یال DC باشد و درضمن، داشته باشیم:

$$|AB| = |BC| = |AC| = a$$

۶. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ داده‌شده‌است. ۱) ثابت کنید، خط راست AC، بر صفحهٔ BDD_1 عمود است.

۲) خط راستی بسازید که از نقطهٔ M واقع برپاره خط راست BC بگذرد و بر صفحهٔ ACC_1 عمود باشد.

۷. قاعدهٔ منشور قائم $ABCA_1B_1C_1$، مثلث متساوی الساقینی است که درآن $|AC| = |AB|$. ۱) ثابت کنید، ارتفاع این مثلث بر صفحهٔ BCC_1 عموداست.

۲) خط راستی بسازید که از نقطهٔ $M \in [AB]$ بگذرد و برصفحهٔ BCC_1 عمود باشد.

۳. رابطهٔ بین عمود بودن و موازی بودن درفضا

در هندسهٔ مسطحه، قضیه‌هایی را دیده‌ایم که به رابطهٔ بین عمود بودن و موازی بودن خطهای راست مربوط می‌شدند. مثلاً، اگر دوخط راست، برخط راست سوم عمود باشند، این دوخط راست باهم موازی‌اند. قضیه‌های مشابهی، درهندسهٔ فضایی، برای خطهای راست و صفحه وجود دارد.

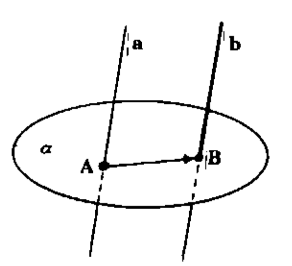
قضیهٔ ۲. اگر یکی از دوخط راست موازی، برصفحه‌ای عمود باشد، آن وقت خط راست دیگر هم براین صفحه عمود است.

فرض: $a \parallel b$، $a \perp \alpha$.

حکم: $b \perp \alpha$.

اثبات. فرض کنید $a \cap \alpha = A$ و $b \cap \alpha = B$ (شکل ۵). انتقال به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{AB}$، صفحهٔ α رابرخودش و خط راست a را برخط

شکل (۵)



راست b می‌نگارد. ولی انتقال، یک جابجایی (= تغییرمکان) است و،

بنابراین، عمود بودن خط راست و صفحه را برهم، حفظ می‌کند (بند ۱، مسأله)؛ یعنی $b \perp \alpha$.

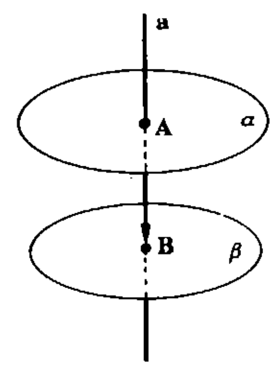
قضیهٔ ۳. اگر خط راستی، بریکی از دوصفحه موازی عمود باشد، بر دیگری هم عموداست.

فرض: $a \perp \alpha$، $\alpha \parallel \beta$.

حکم: $a \perp \beta$.

اثبات. فرض کنید $a \cap \alpha = A$ و $a \cap \beta = B$ (شکل ۶). انتقال به‌اندازهٔ بردار $\overrightarrow{AB}$، خط راست a رابرخودش و صفحهٔ α را برصفحهٔ β می‌نگارد؛ و عمود بودن خط و صفحه بریکدیگر، ضمن انتقال، محفوظ می‌ماند، یعنی $a \perp \beta$.

شکل (۶)



قضیه‌های عکس این دوقضیه هم درست‌اند.

قضیه ۴. اگر دوخط راست بریک صفحه عمود باشند، باهم موازی‌اند (شکل ۵).

قضیه ۵. اگر دو صفحه بریک خط راست عمود باشند، باهم موازی‌اند (شکل ۶). اثبات این دوقضیه، شبیه اثبات قضیه‌های ۲ و ۳اند.

پرسشها و مسأله‌ها

۸. ۱) منشور قائم $ABCA_1B_1C_1$ مفروض است. از نقطه‌ای واقع برضلع مثلث $A_1B_1C_1$، عمودی برصفحهٔ ABC رسم کنید. ثابت کنید، این عمود، ضلع مثلث ABC راقطع می‌کند.

۲) مقطع این منشور را باصفحه‌ای پیداکنید که از نقطه‌ای واقع بریال جانبی آن وخط راستی عمود به‌این یال می‌گذرد.

۹. از نقطه‌های A وB، که در دوطرف صفحهٔ α واقع‌اند، عمودهای $[AA_1]$ و $[BB_1]$ را برصفحهٔ α رسم کرده‌ایم ($A_1 \in \alpha$، $B_1 \in \alpha$، $A_1 \neq B_1$). مطلوب است فاصلهٔ از نقطهٔ $M=(AB)\cap(A_1B_1)$ تانقطه‌های A و B_1، به شرطی که $|AA_1|=a$، $|BB_1|=b$، $|AB|=c$.

۱۰. صفحه‌های متمایز α و β، موازی با هم‌اند. از دو نقطهٔ M و N واقع برصفحهٔ α، عمودهایی برصفحهٔ βرسم کرده‌ایم که آن را، بـه تـرتیب، در M_1 و N_1 قـطع کـرده‌انـد. ثـابت کـنید $|MM_1| = |NN_1|$.

ادب ریاضی

به‌نام خداونـد بـخشایندهٔ مـهربان. ایـن کـتابی است کـه محمدبن موسی خوارزمی پی افکنده و در سرآغاز چنین گـوید: خدای را سپاس بر نعمتهایش، بـدان گـونه کـه شـایستهٔ او است؛ سپاس آن چنان که اگر برآیینی که بر بندگان ستایشگر او فـرض شده انجام شود، «شکر» نامیده می‌شود و بـاعث افـزونی نـعمت می‌گردد و ...

چون به مشکلات و نیازمندیهای مردم در مورد علم حساب نگریستم، دریافتم که تمام آن مشکلات در عدد خِلاصه شده؛ و فهمیدم که تمام اعداد از واحد ترکیب می‌شوند، و این واحد در تمام اعداد موجود است؛ و دانستم که تمام اعداد، از یک تا ده، از طریق واحد به دست می‌آید، و آنگاه عدد ده را، به همان شیوه‌ای که در واحد عمل می‌شود، دو چندان و سه چندان می‌کنند تا بیست و سی به‌دست آید، و بر همین قیاس به صد می‌رسد. سپس صد را مانند یکان و دهگان دو چندان و سه چندان می‌کنند تا بـه هـزار برسد، و پس از آن، مرتبهٔ هزار را بر همین قـیاس بـالا مـی‌برند، یعنی در رأس هر عقدی افزون می‌شود تا به آخـرین عـدد قـابل ادراک برسد.

و نیز دریافتم که اعدادی که در حساب جبر و مـقابله بـه وجود آنها نیاز است، سه نوع هستند: جذرها و مالها و عدد مفردی که به جذری یا مالی نسبت ندارد. جذر هر چیزی است که در یک یا چند برابر خود یا در کسری از خود ضرب شده بـاشد؛ مـال چیزی‌است‌که از حاصل‌ضرب این جذر درخودش به‌دست آید؛ و عدد مفرد هر عددی‌است‌که بدون نسبت به‌جذر یا مال برزبان آید.

گزیده‌ای از فصل اول کتاب جبر خوارزمی