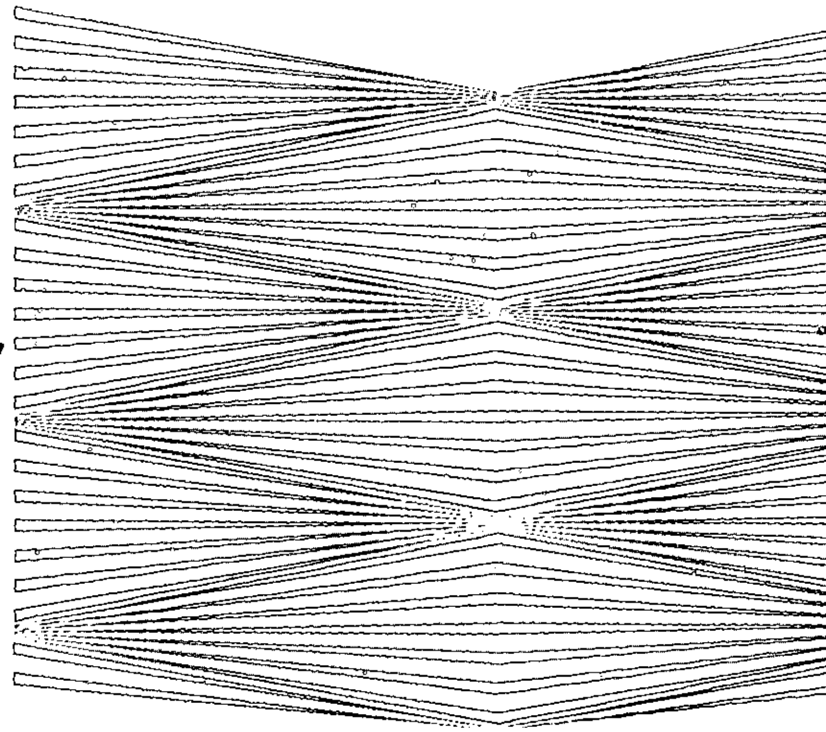
خطهای راست و صفحه‌های عمودبرهم در فضا



(قسمت دوّم)

(قسمت اوّل در شمارهٔ ۱۵ به چاپ رسیده است)

● پرویز شهریاری

§ ۴. تصویر قائم برصفحه. قضیهٔ سه عمود

۱. حالت خاص تصویر موازی از یک شکل برصفحه را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. اگر تصویر برصفحه α، به موازات خط راست l که بر α عموداست، انجام گیرد، آن وقت تصویر را، **تصویر قائم** گویند.

در تصویر قائم برصفحه، هرخط راست تصویر کننده، برصفحهٔ تصویر عمود است (بند ۳، قضیه ۲).

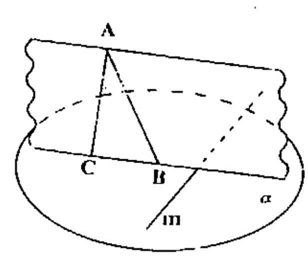
تصویر قائم، بیش از هر نوع دیگری از تصویر، درعمل کاربرد دارد. مثلاً، برای نشان دادن ویژگیهای یک قطعهٔ صنعتی، تصویر قائم آن را روی دوصفحه نشان می‌دهند: صفحهٔ افقی H و صفحهٔ قائم V. از این به‌بعد و برای سادگی کار، به جای «تصویر قائم شکل»، خواهیم گفت «تصویر شکل».

۲. اکنون به قضیه سه عمود می‌پردازیم.

وقتی که خط راست، صفحه‌ای را قطع کند، ولی برآن عمود نباشد، خط راست را، نسبت به صفحه، **مایل** می‌نامیم.

قضیه ٦. خط راست واقع برصفحه وقتی، و تنها وقتی، برمایل نسبت به این صفحه عمود است که، برتصویر مایل روی صفحه، عمودباشد.

شکل (۷)



اثبات. صفحهٔ α، $(AC)\perp\alpha$، (AB) مایل نسبت به‌صفحهٔ α و (CB) تصویر این مایل برصفحهٔ α را درنظر می‌گیریم (شکل ۷).

۱) m را خط راستی واقع برصفحهٔ α می‌گیریم که برخط راست CB عمود باشد. باید ثابت کنیم $m\perp(AB)$.

ازتعریف عمود برصفحه نتیجه می‌شود $m\perp(AC)$، به این ترتیب، خط راست m بردوخط متقاطع CB و AC واقع برصفحهٔ ABC عمود است و، در نتیجه، بنابرقضیهٔ ۱، برصفحهٔ ABC عمود خواهدبود؛ و از آن جا $m\perp(AB)$.

۲) $m\subset\alpha$ و $m\perp(AB)$ فرض می‌کنیم؛ چون علاوه برآن، $(AC)\perp m$، پس $m\perp(ABC)$. بنابراین $m\perp(CB)$.

پرسشها و مسأله‌ها

۱۱. از نقطهٔ A، عمود AB و مایل AC رانسبت به صفحهٔ α رسم کرده‌ایم $(C\subset\alpha\ ,\ B\subset\alpha)$. ۱) مطلوب است طول تصویر پاره‌خط راست AC، به‌شرطی که $|AC|=۳۷\text{cm}$ و $|AB|=۳۵\text{cm}$. ۲) مطلوب است $|AC|$، به‌شرطی که $|AB|=٦\text{cm}$ و $\hat{BAC}=٦۰^{\circ}$. ۳) مطلوب است $|AB|$، به شرطی که $|AC|=۲\sqrt{۱۰}\text{cm}$ و $|BC|=۲|AB|$.

۱۲. از یک نقطه، دومایل یکی به طول ۱۵ سانتی‌متر و دیگری به طول ۲۰ سانتی‌متر نسبت به صفحه‌ای رسم کرده‌ایم (طول هر مایل را تانقطهٔ برخورد آن باصفحه درنظر گرفته‌ایم). تصویر یکی از این پاره خطهای راست، طولی برابر ۱٦ سانتی‌متر دارد؛ طول تصویر پارخط راست دیگر راپیدا کنید.

۱۳. به کمک قضیه سه عمود، ثابت کنید، هرقطر مکعب

برصفحه‌ای عمود است که از انتهای سه یالی که دریک رأس باایـن قطر مشترک‌اند، می‌گذرد.

۱۴. خط راست a، صفحهٔ α را قطع کرده و M، یکی از نقطه‌های این صفحه است. آیا روی صفحهٔ α، خط راستی وجود دارد که از نقطهٔ M بگذرد و برخط راست a عمود باشد؟

۱۵. قاعدهٔ هرم MABC، مثلث قائم الزاویه‌ای است که، ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن، طولهایی برابر ۱۰ سانتی‌متر و ۲۴ سانتی‌متر دارند. ارتفاع هرم، ۱۲ سانتی‌متر طول دارد و وتر AB را نصف می‌کند. طول هریک از ارتفاعهای وجه‌های جانبی هرم را، که از M رسم شده‌اند، پیداکنید.

۱۶. از نقطهٔ O، محل برخورد قطرهای ذوزنقه‌ای، عمود OM به‌طول ۳ سانتی‌متر را برصفحهٔ ذوزنقه رسم کرده‌ایم. فاصلهٔ نقطهٔ M تا دو قاعدهٔ ذوزنقه را پیداکنید، به‌شرطی که طول دو قاعده به نسبت $\frac{1}{2}$ و ارتفاع ذوزنقه برابر ۱۲ سانتی‌متر باشد.

۱۷. قاعدهٔ یک هرم، مثلث قائم الزاویه‌ای با ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه ۶ و ۸ سانتی‌متر است. پای ارتفاع هرم، روی رأس قائمهٔ قاعده است و طول این ارتفاع، برابر ۳/۶ سانتی‌متر است. مطلوب است محاسبهٔ فاصلهٔ رأس هرم تا وتر مثلث قاعده.

۱۸. مثلثی باضلعهای به طول ۲۰، ۶۵ و ۷۵ سانتی‌متر، قاعده یک هرم را تشکیل می‌دهد. پای ارتفاع هرم، روی رأس زاویهٔ بزرگتر مثلث واقع است. طول این ارتفاع، برابر ۶۰ سانتی‌متراست. مطلوب است فاصلهٔ رأس هرم تاضلع بزرگتر قاعده.

۵. تقارن محوری

دو نقطهٔ M و M_1 از فضا را، نسبت به خط راست l، قرینهٔ یکدیگر گویند، وقتی که، این خط راست، بر پاره‌خط راست MM_1 عمود باشد و آن را نصف کند. دراین صورت، هرنقطه خط راست l، قرینهٔ خودش نسبت به l است.

تعریف. تقارن محوری، به نگاشتی از فضا برخودش گویند که، به‌ازای آن، هرنقطه‌ای، به نقطهٔ قرینهٔ آن، نسبت به خط راست مفروض l، نگاشته شود. درچنین صورتی، خط راست l را، **محور تقارن** گویند.

اگر در تقارن محوری با محور l، نقطهٔ M_1، نگارهٔ نقطهٔ M باشد، می‌نویسند:

$$S_l(M)=M_1$$

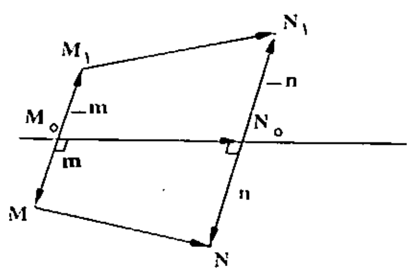
به این ترتیب $S_l(\Phi)=\Phi_1$، به معنای آن است که، در تقارن به محور l، شکل Φ به شکل Φ_1 تبدیل می‌شود.

گویند شکل Φ دارای محورتقارن l است، وقتی که قرینهٔ شکل Φ نسبت به محور l، برخودش منطبق شود: $S_l(\Phi)=\Phi$.

قضیهٔ ۷. تقارن محوری، یک تغییر مکان است.

اثبات. فرض کنید $S_l(M)=M_1$ و $S_l(N)=N_1$ (شکل ۸). ثابت می‌کنیم $|MN|=|M_1N_1|$. بردارهای **m**، **n** و **p** را، آن‌طور که در شکل ۸ دیده می‌شود، درنظر می‌گیریم. بنابر تعریف تقارن محوری داریم:

شکل (۸)



$$\mathbf{m}.\mathbf{p}=\mathbf{n}.\mathbf{p}=0$$

باتوجه به قاعدهٔ چند ضلعی (برای جمع بردارها) به‌دست می‌آید:

$$\overrightarrow{MN}=-\mathbf{m}+\mathbf{p}+\mathbf{n} \quad ; \quad \overrightarrow{M_1N_1}=\mathbf{m}+\mathbf{p}-\mathbf{n}$$

که از آن‌جا خواهیم داشت:

$$|MN|^2=\mathbf{m}^2+\mathbf{p}^2+\mathbf{n}^2-2\mathbf{m}.\mathbf{n}$$
$$|M_1N_1|^2=\mathbf{m}^2+\mathbf{p}^2+\mathbf{n}^2-2\mathbf{m}.\mathbf{n}$$

بنابراین $|MN|^2=|M_1N_1|^2$ و $|MN|=|M_1N_1|$.

از قضیه ۷ نتیجه می‌شود که، تقارن محوری، هرشکل را به شکلی همنهشت با آن تبدیل می‌کند.

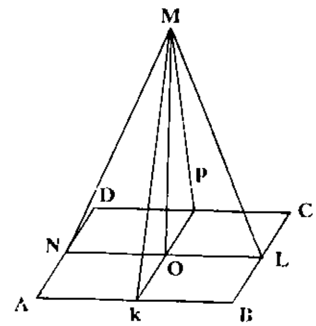
با استفاده از معیار عمود بودن خط راست و صفحه بریکدیگر و همچنین تقارن محوری، می‌توان معیارهای همنهشتی مثلثهایی را که به صورتی دلخواه در فضا قرار دارند، ثابت کرد. تنظیم این معیارها، درست به‌همان صورت هندسهٔ مسطحه است.

مسأله. مربع به‌ضلع برابر a و نقطهٔ M در بیرون صفحهٔ مربع و به‌فاصله d از هر ضلع آن داده‌شده‌است. اگر فاصلهٔ از نقطهٔ M تا صفحهٔ مربع برابر h باشد، d را محاسبه کنید.

حل. ABCD رامربع مفروض می‌گیریم (شکل ۹). $[MO]\perp(ABC)$. از نقطه O، عمودهای [OK]، [OL]، [ON] و [OP] را برضلع‌های مربع فرود می‌آوریم و نقطه‌های K، L، N و P را به M وصل می‌کنیم. بنابر قضیه سه عمود، پاره‌خطهای راست MK، ML، MN و MP، برضلعهای متناظر مربع

عمودند. بنابر شرط مسأله، این پاره‌خطهای راست، طولهایی برابر دارند و ، بنابراین، کافی است، طول یکی از آنها را محاسبه کنیم. داریم $|AB|=a$ و $|MO|=h$ ، $|MK|=d$ را به‌دست می‌آوریم.

شکل (۹)



مثلثهای قائم الزاویه MOK ، MOL ، MON و MOP همنهشت‌اند، یعنی

$$|OK|=|OL|=|ON|=|OP|$$

بنابراین، نقطهٔ O ، مرکز دایرهٔ محاط درمربع ABCD است، از آن‌جا $|OK|=\frac{a}{2}$.

درمثلث MOK داریم:

$$d=\sqrt{|MO|^2+|OK|^2}=\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4h^2+a^2}$$

پرسشها و مسأله‌ها

۱۹. ۱) در چهار وجهی ABCD ، وجه‌های ABC و ABD، مثلثهای متساوی الساقینی‌اند باقاعدهٔ مشترک AB . قرینهٔ چهاروجهی را نسبت به محور AB پیدا کنید.

۲) منشور قائم $ABCA_1B_1C_1$ مفروض است. قرینهٔ آن را نسبت به محور AA_1 پیدا کنید.

۲۰. قاعدهٔ یک هرم قائم، مثلث‌متساوی الاضلاعی است به ضلع ۶ سانتی‌متر؛ ارتفاع هرم، برابر ۱ سانتی‌متر است. فاصلهٔ رأس هرم تا ضلع قاعده را پیدا کنید.

۲۱. پای ارتفاع هرمی، برمرکز دایرهٔ محاطی مثلث قاعدهٔ هرم، منطبق است. طول این ارتفاع را به‌دست آورید، به‌شرطی که ضلعهای مثلث قاعدهٔ هرم، برابر ۶ ، ۵ و ۵ سانتی متر و فاصله رأس هرم تا یکی از ضلعهای قاعده، برابر ۲/۵ سانتی‌متر باشد.

۲۲. مستطیل ABCD ، بامفروض $|AB|=a$ و $|BC|=b$ ، قاعدهٔ هرم SABCD را تشکیل می‌دهد. پای ارتفاع هرم، برمحل برخورد قطرهای مستطیل واقع است و خود ارتفاع، طولی برابر d دارد. مطلوب است طول یالهای جانبی هرم و فاصلهٔ رأس هرم تا ضلعهای قاعده.

۶. فاصلهٔ نقطه تا صفحه

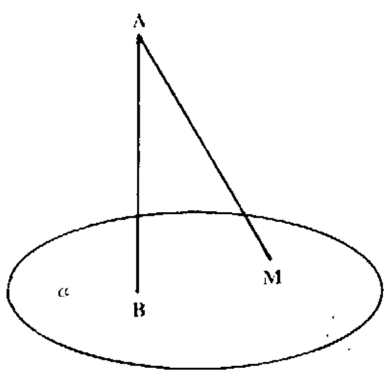
مفهوم فاصلهٔ بین دوشکل را مطرح می‌کنیم که، فاصلهٔ نقطه تا شکل، حالت خاصی از آن می‌شود.

تعریف. اگر درمیان همهٔ فاصله‌هایی که بین نقطه‌های شکل Φ_1 بانقطه‌های شکل Φ_2 به‌دست می‌آید، کمترین فاصله وجود داشته‌باشد، آن را فاصله بین دو شکل Φ_1 و Φ_2 گویند.

قضیهٔ ۸. فاصلهٔ یک نقطه از صفحهٔ مفروض برابر است بافاصلهٔ این نقطه تا تصویر آن براین صفحه.

اثبات. نقطهٔ A و صفحهٔ α را درنظر می‌گیریم (شکل ۱۰).

شکل (۱۰)



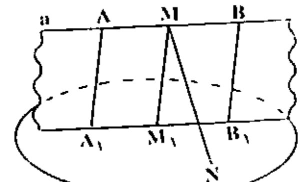
در حالت $A\notin\alpha$ ، B را تصویر A برصفحهٔ α و M رانقطهٔ دلخواه این صفحه ، متفاوت با B ، فرض می‌کنیم. باید ثابت کنیم: $|AB|<|AM|$.

خط راست MB را رسم می‌کنیم، دراین صورت $[AB]\perp(MB)$. درصفحهٔ MAB ، نقطهٔ B ، تصویر A برخط راست BM است، یعنی $|AB|<|AM|$. بنابراین ، $|AB|$ فاصلهٔ نقطهٔ A از صفحهٔ α است.

در حالت $A\in\alpha$ ، مطلب روشن‌است. در واقع، دراین حالت، فاصله A از صفحه برابر صفر و، درضمن، فاصلهٔ A از تصویر آن برصفحه هم، برابر صفر است.

مسأله. ثابت کنید، فاصلهٔ یک خط راست از صفحه‌ای که باآن موازی است، برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ دلخواهی از خط راست تا صفحهٔ مفروض.

شکل (۱۱)



حل. فرض کنید $a \parallel \alpha$ ولی $a\not\subset\alpha$ (شکل ۱۱). از نقطه‌های دلخواه A و B واقع برخط راست a، عمودهای $[AA_1]$ و $[BB_1]$ را برصفحهٔ α فرود می‌آوریم. چون دوخط راست AA_1 و BB_1 و همچنین دوخط راست AB و A_1B_1 باهم موازی‌اند، پس $|AA_1| = |BB_1|$. واین، به معنای آن است که فاصلهٔ هر نقطه از خط راست a تاصفحهٔ α، به‌جای این نقطه ارتباطی ندارد.

اکنون پاره‌خط راست MN را درنظر می‌گیریم که نقطهٔ دلخواه $M\in a$ را به نقطهٔ $N\in\alpha$ وصل کرده‌است و برصفحهٔ α عمود نیست. اگر M_1 تصویر نقطهٔ M برصفحهٔ α باشد، آن وقت بنابر قضیهٔ ۸ داریم: $|MN| > |MN_1|$.

به این ترتیب، $|MM_1|$ فاصله بین خط راست a و صفحهٔ α است.

درحالت $a\subset\alpha$ هم، درستی حکم به قوت خود باقی است؛ دراین حالت خاص، هردو فاصله‌ای که درصورت مسأله آمده است، برابر صفرند.

پرسشها و مسأله‌ها

۲۳. وجه ABC از چهاروجهی ABCD، مثلثی است متساوی‌الاضلاع باضلع به طول a و هریک از یالهای DA، DB، DC، طولی برابر b دارند. مطلوب است فاصلهٔ از رأس D تا صفحهٔ وجه ABC.

۲۴. یال مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ برابر a است. مطلوب است فاصلهٔ: ۱) از رأس A تاصفحهٔ BB_1D_1؛ ۲) از رأس A_1 تا صفحهٔ AB_1D_1.

۲۵. ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای برابر ۳ سانتی‌متر و ۴ سانتی متر است. نقطهٔ M به فاصلهٔ ۶ سانتی‌متر از صفحهٔ مثلث و، درضمن، به‌یک فاصله از سه رأس مثلث است. فاصلهٔ اخیر را محاسبه کنید.

۲۶. لوزی به‌ضلع ۶ سانتی‌متر و زاویهٔ ۶۰ درجه داده‌شده‌است. نقطهٔ M، به‌فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از صفحهٔ لوزی و به یک فاصله از خطهای راست شامل ضلعهای آن واقع است. این فاصله را محاسبه کنید.

۲۷. ۱) روی صفحهٔ α، دوخط راست موازی باهم و به فاصلهٔ m از یکدیگر، رسم شده‌است. نقطهٔ S به‌فاصلهٔ h از صفحهٔ α و، درضمن، به‌یک فاصله از دوخط موازی واقع است. این فاصله را پیدا کنید.

۲) خطهای راست موازی a و b را، به فاصلهٔ ۴۴ سانتی‌متر از یکدیگر، روی صفحهٔ α رسم کرده‌ایم. خط راست c موازی باخطهای راست مفروض و به فاصلهٔ ۱۵ سانتی‌متر از صفحهٔ α قرار دارد. اگر فاصلهٔ c تا a برابر ۳۹ سانتی‌متر باشد، فاصلهٔ بین c و b را پیدا کنید.

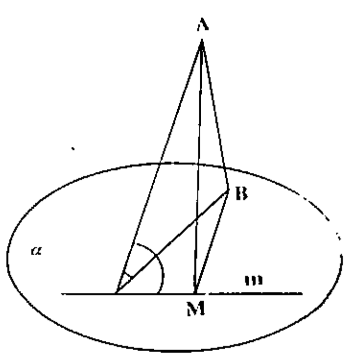
۲۸. مطلوب است مجموعهٔ نقطه‌هایی که از صفحهٔ مفروض به فاصلهٔ: ۱) برابر l؛ ۲) کوچکتر از l باشند.

۷. زاویه بین خط راست وصفحه

قضیه ۹. زاویهٔ بین خط راستی که برصفحهٔ مفروض عمود نیست و تصویر آن بر این صفحه، کوچکترین زاویه‌ای است که خط راست باهریک از خطهای راست واقع بر صفحه می‌سازد.

اثبات. (AC) را مایل نسبت به صفحهٔ α و $C\in\alpha$ می‌گیریم (شکل ۱۲). عمود AB برصفحهٔ α را رسم می‌کنیم ($B\in\alpha$). دراین صورت (BC)، تصویر مایل AC برصفحهٔ α است. زاویهٔ بین خطهای راست CA و CB را β و زاویهٔ بین خطهای راست CA و m را (که به‌دلخواه و از نقطهٔ C، روی صفحهٔ α رسم شده‌است)، φ می‌نامیم. باید ثابت کنیم $\beta<\varphi$.

شکل (۱۲)



اگر $m\perp(BC)$، بنابرقضیهٔ سه عمود $\varphi=90^\circ$. دراین حالت، قضیه درست است، زیرا $\beta<90^\circ$.

اگر $m=(BC)$، آن وقت $\varphi=\beta$ و باز هم قضیه درست است.

اکنون حالتی را درنظر می‌گیریم که خط راست m عمود بر (BC) و یا منطبق برآن نباشد. پاره‌خط راست BM را عمودبر m رسم ($M\in m$) و M را به A وصل می‌کنیم، دراین صورت

$[AM]\perp m$ (قضیه سه عمود). در مثلثهای قائم الزاویهٔ ACB و ACM داریم:

$$\sin\beta=\frac{|AB|}{|AC|}\quad,\quad \sin\varphi=\frac{|AM|}{|AC|}$$

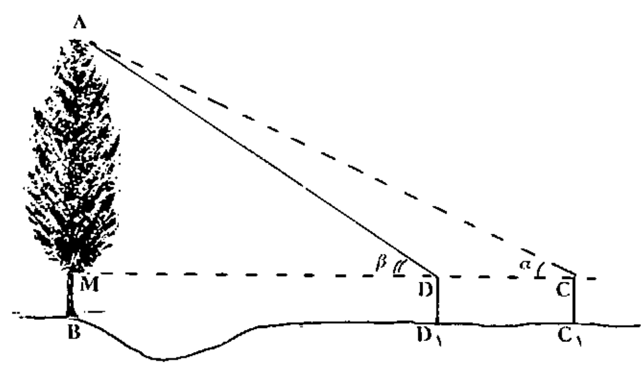
ولی $[AB]\perp\alpha$، بنابراین $[AB]<[AM]$ (بند ۶). به این ترتیب $\sin\beta<\sin\varphi$ و $\beta<\varphi$.

تعریف. زاویهٔ بین خط راست مایل نسبت به‌صفحه، باصفحه، به‌زاویهٔ بین مایل و تصویر آن برصفحه، گفته می‌شود.

زاویه بین مایل a و صفحهٔ α را بانماد $(\widehat{a,\alpha})$ نشان می‌دهند که برای آن داریم: $0^\circ<(\widehat{a,\alpha})<90^\circ$.

مسأله. ارتفاع [AB] را پیداکنید، به‌شرطی که نقطه‌های A و B در دسترس نباشند شکل (۱۳).

(شکل ۱۳)



حل. پاره‌خط راست C_1D_1 را روی زمین و درجهت نقطهٔ B انتخاب می‌کنیم و طول آن را اندازه می‌گیریم؛ سپس، اندازهٔ زاویه‌های ACM و ADM را به‌دست می‌آوریم. فرض کنید: $|C_1D_1|=b$ ، $\widehat{ACM}=\alpha$ ، $\widehat{ADM}=\beta$. ارتفاع $|CC_1|$ را (ارتفاع ابزاری که برای اندازه‌گیری زاویه‌ها مورد استفاده قرارمی‌گیرد) h می‌نامیم. باتوجه به‌قضیهٔ سینوسها در مثلث ACD داریم:

$$|AD|:\sin\alpha=|CD|:\sin\widehat{CAD}$$

ولی $|CD|=b$ و $\widehat{CAD}=\beta-\alpha$. در این صورت

$$|AD|=\frac{b\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$$

درمثلث قائم‌الزاویهٔ ADM داریم:

$$|AM|=|AD|.\sin\beta$$

وبنابراین، سرانجام، به‌دست می‌آید:

$$|AB|=\frac{b\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}+h$$

مسائل مسابقه‌ای

۱ـ ثابت کنید: هرگاه n عددی صحیح و مثبت باشد و n مربع کامل نباشد آنگاه $\sqrt{n}$ گنگ است.

۲ـ اگر $a_1, ..., a_n$ و $b_1, ..., b_n$ عددهای حقیقی دلخواه باشند ثابت کنید:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k b_k\right)^2\le\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)$$

(این نامساوی به نامساوی کوشی ـ شوارتز معروف است)

لازم به تذکر است که اولاً: حل مسائل مسابقه‌ای ۱۵ که می‌بایست در این شماره بیاید در شمارهٔ آینده چاپ خواهد شد و ثانیاً: برای پاسخگویی به‌مسائل‌مسابقه‌ای ۲ ماه فرصت‌دارید و روی پاکت نامه حتماً قیدکنید «مربوط به‌مسائل‌مسابقهٔ شمارهٔ ...»