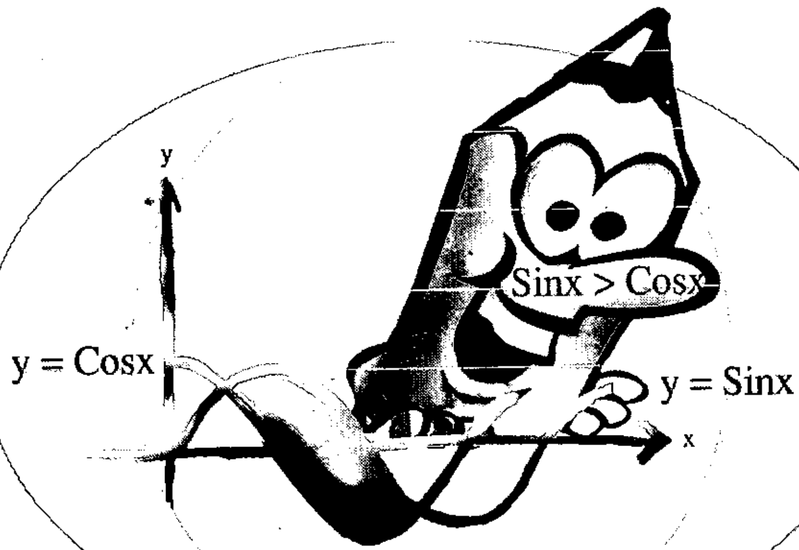


حلّ نامعادله های جبری به روش هندسی

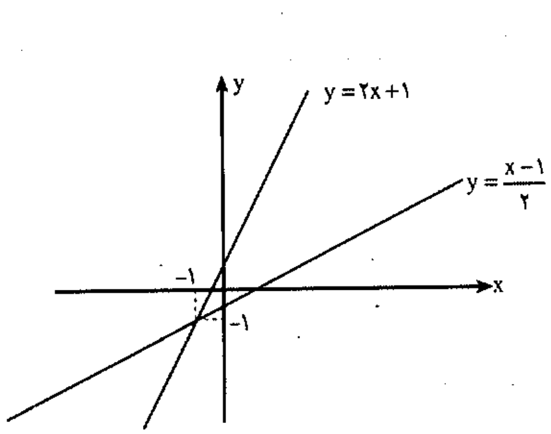
(برای دانش آموزان سال دوم دبیرستان)

هوشنگ شرقی

حلّ نامعادله های مختلف و یافتن مجموعهٔ جواب آن ها، از بحث های اساسی در ریاضیات پایه است که در کتاب های درسی نیز دربارهٔ آن بحث شده است. آنچه در این جا مورد نظر است، ارائهٔ راه حلّی برای نامعادله هاست که کم تر دربارهٔ آن بحث شده و آن، استفاده از نمودار هندسی توابع برای حلّ نامعادله هاست. می دانیم که هر نامعادله، دارای صورت کلّی $f(x) > g(x)$ است که f و g عبارت هایی (تابع هایی) بر حسب x هستند. برای یافتن مجموعهٔ جواب این نامعادله، کافی است نمودارهای توابع با ضابطه های $y = f(x)$ و $y = g(x)$ را رسم کنیم و مجموعهٔ طول های نقاطی را در نظر بگیریم که در آن نقاط، نمودار تابع f بالاتر از نمودار تابع g قرار داشته باشد. اکنون با چند مثال مختلف که از مثال های ساده تر شروع می شود، مطلب را روشن می کنیم.

مثال۱. مجموعه جواب نامعادلهٔ $2x + 1 > \frac{x-1}{2}$ را به دست آورید.

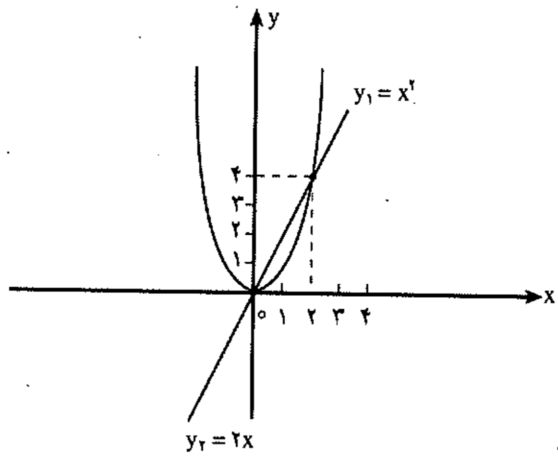
حل: نمودار تابع های f و g با ضابطه های $f(x) = 2x + 1$ و $g(x) = \frac{x-1}{2}$ را رسم می کنیم:



همچنان که در شکل ملاحظه می کنیم، نقطهٔ برخورد دو نمودار نقطهٔ (۱- و ۱-) است که این نقطه را با حلّ معادلهٔ $f(x) = g(x)$ نیز می توان به دست آورد و برای کلیهٔ نقاط سمت راست این نقطه، خط $y = 2x + 1$ بالای خط $y = \frac{x-1}{2}$ قرار دارد، لذا مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ فوق، به صورت $\{x | x > 1\}$ است.

مثال۲. نامعادلهٔ $x^2 > 2x$ را حل کنید.

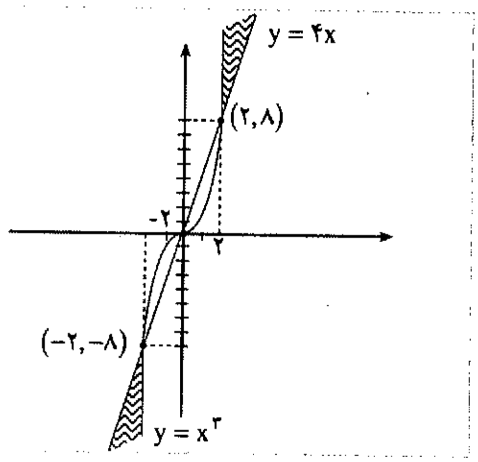
حل: در شکل صفحه بعد، نمودارهای توابع با ضابطه های $y_1 = x^2$ و $y_2 = 2x$ رسم شده اند:



چنان که ملاحظه می‌کنید، تنها برای $۰ < x < ۲$، نمودار خط $y = ۲x$ بالای نمودار سهمی $y = x^۲$ قرار دارد و جواب نامعادله نیز به صورت $۰ < x < ۲$ به‌دست می‌آید.

مثال۳. نامعادلهٔ $x^۳ > ۴x$ را حل کنید.

حل: نمودارهای توابع با ضابطه‌های $y = x^۳$ و $y = ۴x$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:

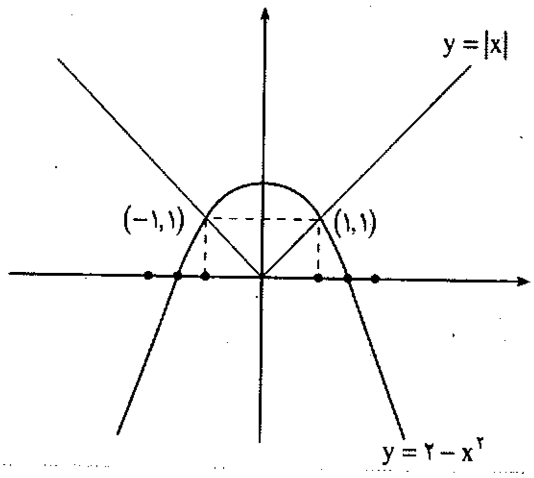


همان‌گونه که در شکل مشاهده می‌کنید، در دو محدودهٔ هاشور خورده، یعنی برای $-۲ < x < ۰$ و $x > ۲$، نمودار منحنی $y = x^۳$ بالاتر از نمودار خط $y = ۴x$ قرار دارد. بنابراین مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ مزبور به صورت زیر نوشته می‌شود:

$\{x | -۲ < x < ۰ \text{ یا } x > ۲\}$

مثال۴. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $x^۲ + |x| < ۲$ را به دست آورید.

حل: ابتدا نامعادلهٔ فوق را به صورت $|x| < ۲ - x^۲$ می‌نویسیم و سپس نمودارهای دو تابع با ضابطه‌های $y = ۲ - x^۲$ و $y = |x|$ را در یک شکل و به صورت زیر رسم می‌کنیم:



نقطه‌های (۱و۱) و (۱و۱−) نقاط برخورد منحنی‌های دو تابع هستند و به سادگی در شکل می‌بینید که به ازای $x > ۱$ یا $x < -۱$ نمودار $y = |x|$ بالای نمودار $y = ۲ - x^۲$ واقع می‌شود.

تمرین. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $x^۲ + |x| \geq ۲$ چیست؟

آزمون. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\sqrt{۱ - x^۲} > ۲x + ۱$ کدام بازهٔ زیر است؟

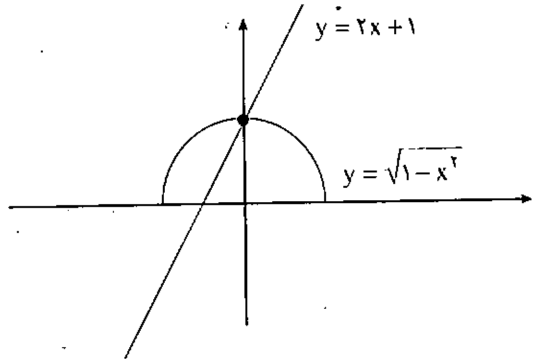
۱) (۱ و ۰) ۲) (۰ و ۱−)

۳) (۱ و ۱−) ۴) $(۰ \text{ و } -\frac{۱}{۲})$

حل: اهمیت روش هندسی در حل نامعادلات، از مثال‌هایی این‌چنین بهتر روشن می‌شود؛ چرا که اگر بخواهیم مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ فوق را به روش جبری تعیین کنیم، مدت زمان نسبتاً زیادی صرف می‌شود؛ زیرا باید دو حالت مختلف $۲x + ۱ \geq ۰$ و $۲x + ۱ < ۰$ را بررسی کنیم. در حالت دوم، نامعادله به یک نامساوی همیشه درست تبدیل شده و مجموعهٔ جواب آن، دامنهٔ تعریف عبارت $\sqrt{۱ - x^۲}$ است که باید با جواب نامعادلهٔ $۲x + ۱ < ۰$، اشتراک گرفته شود. در حالت دوم، می‌توانیم دو طرف نامعادله را به توان دو برسانیم و...

چنان که می‌بینید، روش فوق مدت زمان زیادی را صرف

می‌کند. اما به روش هندسی و با رسم نمودارهای $y=\sqrt{1-x^2}$ و $y=2x+1$، در زمان کوتاهی می‌توان پاسخ مسأله را به دست آورد و گزینهٔ صحیح را مشخص کرد. نمودار $y=\sqrt{1-x^2}$، همان نمودار $x^2+y^2=1$ با شرط $y>0$ است، لذا شکل آن نیم‌دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و به شعاع ۱ و در قسمت بالای محور xهاست. نمودار $y=2x+1$ نیز یک خط راست است. در زیر، نمودارهای دو تابع رسم شده‌اند:

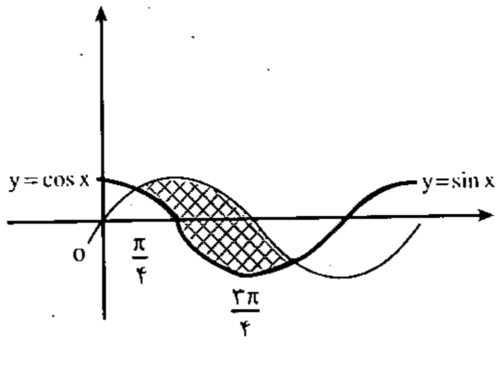


و چنان که در شکل ملاحظه می‌کنید، به سادگی روشن است که فقط وقتی $-1<x<0$ باشد، نمودار نیم‌دایره، بالای نمودار خط واقع می‌شود و پاسخ صحیح، گزینه (۲) است.

روشی که در مورد حل نامعادلات جبری ذکر شد، برای حل نامعادله‌های غیرجبری (مانند نامعادلات مثلثاتی، لگاریتمی و...) نیز قابل استفاده است. به یک مثال در این زمینه توجه کنید:

مثال. مجموعهٔ جواب نامعادله $\sin x > \cos x$ را با شرط $0 \le x \le 2\pi$ به دست آورید.

حل: نمودارهای $y=\sin x$ و $y=\cos x$ را در شکل زیر، در یک دستگاه مختصات رسم کرده‌ایم:



نقطه‌های برخورد دو منحنی در بازهٔ $[0,2\pi]$، دارای طول‌های $x_1=\frac{\pi}{4}$ و $x_2=\frac{3\pi}{4}$ هستند (این نقاط را می‌توان از حل معادله $\sin x=\cos x$ یا $\operatorname{tg}x=1$ نیز به دست آورد) و به سادگی روشن است که در فاصلهٔ بین این دو مقدار، منحنی $y=\sin x$ بالای منحنی $y=\cos x$ واقع است، لذا جواب نامعادله به صورت $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$ نوشته می‌شود.

تمرین. مجموعه جواب هریک از نامعادلات زیر را به روش هندسی به دست آورید:

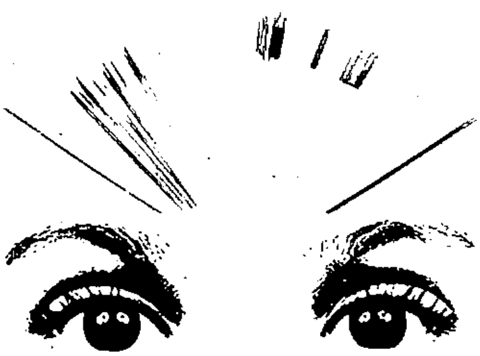
۱) $\frac{x+1}{2}<\frac{2x-1}{3}$ ۲) $x^2+1>x$

۳) $x-2<\sqrt{x}$ ۴) $x^2\ge\frac{1}{x}$

۵) $x^3<x^2$ ۶) $x^2>4$

تمرین. به روش هندسی ثابت کنید:

$x^2<a^2 \Rightarrow -a<x<a \quad (a>0)$



تفریح اندیشه

مجموع دو ریشه از سه ریشهٔ معادلهٔ زیر، صفر است:

$x^3+ax^2+bx+c=0$

معادله‌ای بیابید که c را به طور صریح بر حسب a و b نمایش دهد.