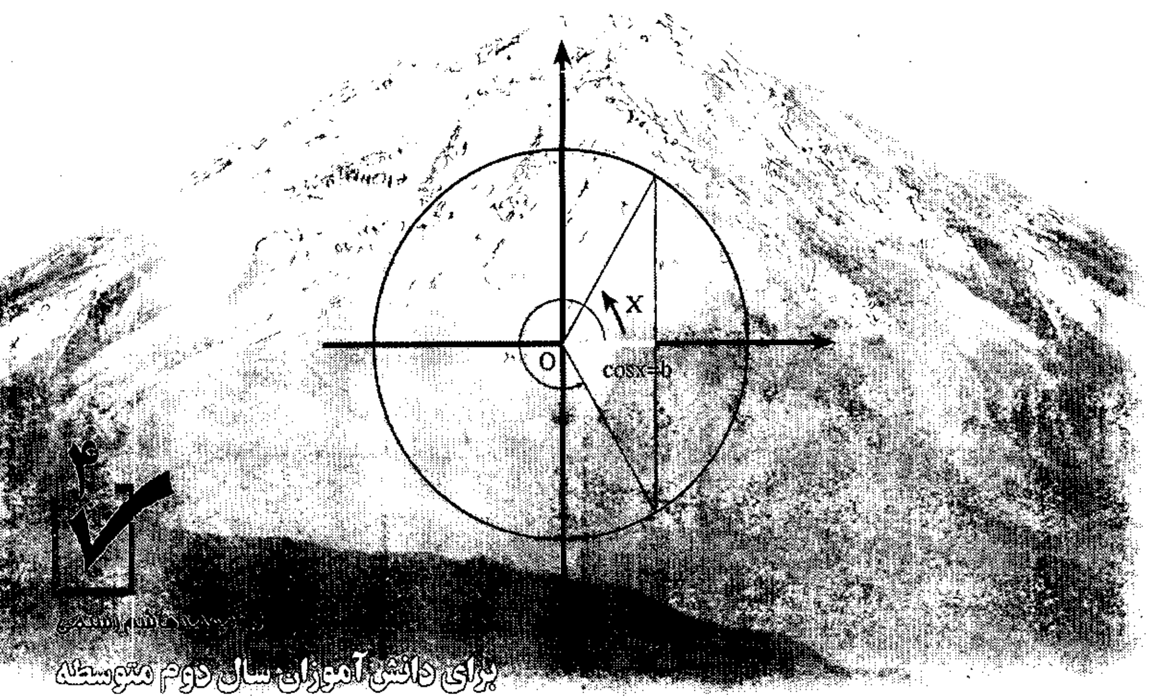


حلّ معادله های مثلثاتی

اشاره

حلّ معادلهٔ مثلثاتی $\cos x = b(-۱ \le b \le ۱)$ را در شمارهٔ قبل دیدیم. اکنون چند نکته دربارهٔ این معادله با مثال‌های مختلف ارائه می‌کنیم.

آزمون۱. اگر $-\frac{\pi}{۹} < x < \frac{\pi}{۹}$ و $\cos ۳x = \frac{m-۱}{۲}$، مقادیر m در کدام فاصله است؟

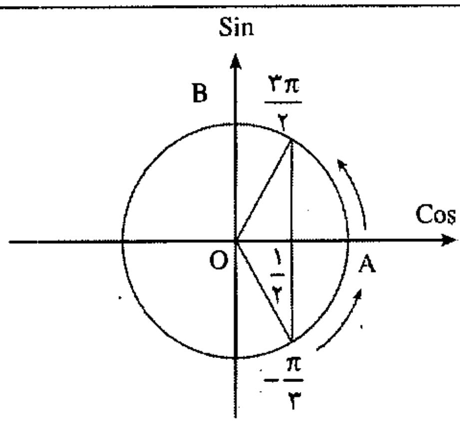
۱) (۱و۲]   ۲) (۱و۲)

۳) (۲و۳]   ۴) [۳و۴)

کنکور سراسری

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است. داریم:

$$-\frac{\pi}{۹} < x < \frac{\pi}{۹} \Rightarrow -\frac{\pi}{۳} < ۳x < \frac{\pi}{۳}$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} < \cos ۳x \le ۱ \Rightarrow \frac{۱}{۲} < \frac{m-۱}{۲} \le ۱$$
$$\Rightarrow ۱ < m-۱ \le ۲ \Rightarrow ۱+۱ < m-۱+۱ \le ۲+۱$$
$$\Rightarrow ۲ < m \le ۳ \Rightarrow m \in (۲,۳]$$



نکته: $\cos(-\frac{\pi}{۳}) = \frac{۱}{۲}$ است هنگامی که زاویه از $-\frac{\pi}{۳}$ به صفر می‌رسد، کسینوس آن از $\frac{۱}{۲}$ به ۱ می‌رسد، زیرا $\cos ۰ = ۱$ است و هنگامی که زاویه از ۰ تا $+\frac{\pi}{۳}$ تغییر کند، کسینوس آن از ۱ تا $\frac{۱}{۲}$ تغییر می‌کند. بنابراین هنگامی که زاویه از $-\frac{\pi}{۳}$ تا $+\frac{\pi}{۳}$ تغییر کند، کسینوس آن حداقل مساوی $\frac{۱}{۲}$ و حداکثر مساوی ۱ است. که چون $-\frac{\pi}{۳} < ۳x < \frac{\pi}{۳}$ است، پس $\frac{۱}{۲} < \cos ۳x \le ۱$ است.

آزمون۲ . اگر $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ و $\text{Cos}2x = \frac{1}{1-m}$ ، آن‌گاه حدود تغییرات m کدام است؟

۱) $]-\infty, 2]$ و $]1, +\infty[$ ۲) $]1, +\infty[$

۳) $[2, +\infty[$ ۴) $]-\infty, 1[$

کنکور سراسری

حل : گزینهٔ (۳) صحیح است . داریم :

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < 2x < \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow -1 \le \text{Cos}2x \le 0 \Rightarrow -1 \le \frac{1}{1-m} < 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{1-m} \ge -1 \\ \frac{1}{1-m} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{1-m} + 1 \ge 0 \\ \frac{1}{1-m} \le 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2-m}{1-m} \ge 0 \Rightarrow m \ge 2 \ , \ m < 1 \\ \frac{1}{1-m} < 0 \Rightarrow m > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m \ge 2$$

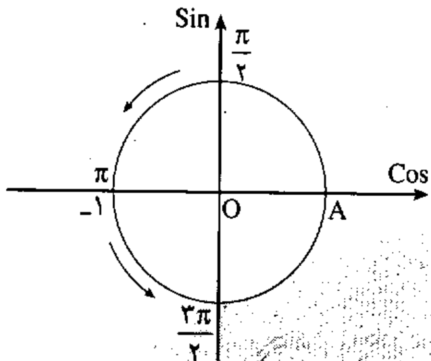
m	$-\infty$		1		2		$+\infty$
2−m		+		+	0	−	
1−m		+	0	−		−	
کسر اول		+	نامعین	−	0	+	
نامعادلهٔ اول		ج			ج	ج	
کسر دوم		+	نامعین	−		−	
نامعادلهٔ دوم				ج		ج	
دستگاه نامعادله					ج	ج	

نکتهٔ ۱ . برای تعیین جواب دستگاه نامعادله به دست آمده، باید از جدول تعیین علامت کنیم . امّا در این مسأله، کسر $\frac{2-m}{1-m}$ ، با $(2-m)(1-m)$ یا $m^2 - 3m + 2$ هم‌علامت است (مگر در m=1 که ریشهٔ مخرج کسر است) و این سه جمله‌ای به ازای مقادیر m بین دو ریشه منفی و به ازای مقادیر m خارج دو ریشه مثبت است ؛ پس جواب نامعادلهٔ اول $m \ge 2$ و $m < 1$ است .

جواب نامعادلهٔ دوم، یعنی $\frac{1}{1-m} < 0$ نیز $1 - m < 0$ یا $m > 1$ است .

جواب دستگاه اشتراک جواب‌های دو نامعادله، یعنی $m \ge 2$ است .

نکتهٔ ۲ . وقتی زاویه‌ای از $\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{3\pi}{2}$ تغییر می‌کند . کسینوس آن از ۰ تا ۱- تغییر می‌کند؛ زیرا $\text{Cos}\frac{\pi}{2} = 0$ ، $\text{Cos}\pi = -1$ و $\text{Cos}\frac{3\pi}{2} = 0$ است، بنابراین وقتی $\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{3\pi}{2}$ است، داریم $-1 \le \text{Cos}2x < 0$.



آزمون۳ . اگر $\text{Cos}x = \frac{2a-1}{a+2}$ و $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ باشد، حدود a کدام است؟

۱) $(0, \frac{4}{3})$ ۲) $(-2, \frac{4}{3})$

۳) $(-2, 0)$ ۴) $(\frac{4}{3}, +\infty)$

حل : گزینهٔ (۱) صحیح است . داریم :

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow -\frac{1}{2} < \text{Cos}x < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} < \frac{2a-1}{2a+2} < \frac{1}{2}$$

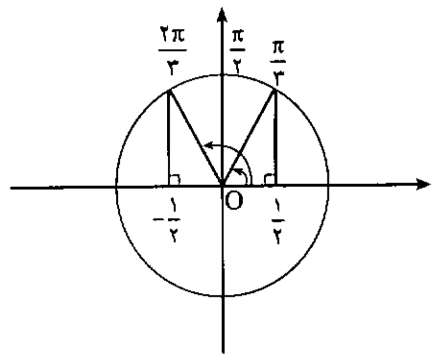
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2a-1}{a+2} > -\frac{1}{2} \\ \frac{2a-1}{a+2} < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2a-1}{a+2} + \frac{1}{2} > 0 \\ \frac{2a-1}{a+2} - \frac{1}{2} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{4a-2+a+2}{2(a+2)} > 0 \\ \frac{4a-2-a-2}{2(a+2)} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5a}{2(a+2)} > 0 \\ \frac{3a-4}{2(a+2)} < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a > 0 \text{ و } a < -2 \\ -2 < a < \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < a < \frac{4}{3}$$

نکته: با توجه به این که $\cos\frac{\pi}{3}=+\frac{1}{2}$ و $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$ است، وقتی x از $\frac{\pi}{3}$ تا $\frac{2\pi}{3}$ تغییر کند، Cosx از $+\frac{1}{2}$ تا $-\frac{1}{2}$ تغییر خواهد کرد.



آزمون۴. اگر $-1<\cos x<\frac{1}{2}$ باشد، حدود x کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{3}<x<\frac{\pi}{3}$　　۲) $0<x\le\pi$

۳) $\frac{\pi}{3}<x<\pi$　　۴) $\frac{\pi}{3}\le x\le\pi$

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است. می‌دانیم که $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ و $\cos\pi=-1$ است.

نکته: برای گزینهٔ (۱) $\frac{1}{2}<\cos x\le 1$، برای گزینهٔ (۲) $-1\le\cos x<1$ و برای گزینهٔ (۴)، $-1\le\cos x\le\frac{1}{2}$ است.

آزمون۵. اگر $-1<\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})<0$ باشد، حدود x کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3}<x<\pi$　　۲) $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$

در معادلهٔ دومی

۳) $\frac{\pi}{2}\le x<\frac{3\pi}{2}$　　۴) $\frac{\pi}{2}<x\le\frac{3\pi}{2}$

حل: گزینهٔ (۲) صحیح است. با استفاده از گزینه‌های داده شده، نخست حدود $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}$ و سپس حدود $\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$ را برای هر گزینه به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$(1)\ \frac{\pi}{3}<x<\pi \Rightarrow \frac{\pi}{6}<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{5\pi}{12}<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}\Rightarrow$$

$$\frac{-\sqrt{2}}{2}<\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})<\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\Rightarrow$$ (خلاف فرض است)

$$(2)\ \frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4}<\frac{x}{2}<\frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}<\pi$$

$$\Rightarrow -1<\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})<0$$ (جواب)

توجه: برای گزینهٔ (۳)، $-1<\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\le 0$ و برای گزینهٔ (۴)، $-1\le\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})<0$ است.

آزمون۶. معادلهٔ $\sin3x+\cos2x=0$ در فاصلهٔ $[0,\pi]$ چند ریشه دارد؟

۱) دو ریشه　　۲) سه ریشه

۳) چهار ریشه　　۴) شش ریشه

حل: گزینهٔ (۱) صحیح است. معادلهٔ داده شده را می‌توان به معادله‌ای ساده بر حسب سینوس زاویه‌ها یا به معادله‌ای ساده بر حسب کسینوس زاویه‌ها تبدیل کرد، که در این‌جا آن را به معادله‌ای ساده بر حسب کسینوس زاویه‌ها تبدیل و حل می‌کنیم تا تعداد ریشه‌ها در فاصلهٔ خواسته شده را تعیین کنیم. داریم:

$$\sin3x+\cos2x=0$$

$$\Rightarrow \cos2x=-\sin3x=\cos(\frac{\pi}{2}+3x)$$

$$\Rightarrow 2x=2k\pi\pm(\frac{\pi}{2}+3x) \Rightarrow 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}+3x$$ و

$$2x=2k\pi-\frac{\pi}{2}-3x \Rightarrow x=-2k\pi-\frac{\pi}{2}$$ و

$$x = \frac{2k\pi}{5} - \frac{\pi}{10}$$

k	x
-1	$\frac{3\pi}{2} > \pi$, $\frac{-2\pi}{5} - \frac{\pi}{10} = -\frac{\pi}{2} < 0$
0	$-\frac{\pi}{2} < 0$, $-\frac{\pi}{10} < 0$
1	$-2\pi - \frac{\pi}{2} < 0$, $\frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{10} = \frac{3\pi}{10}$ ج
2	$-4\pi - \frac{\pi}{2} < 0$, $\frac{4\pi}{5} - \frac{\pi}{10} = \frac{7\pi}{10}$ ج
3	$-6\pi - \frac{\pi}{2} < 0$, $\frac{6\pi}{5} - \frac{\pi}{10} = \frac{13\pi}{10} > \pi$

بنابراین معادلهٔ داده شده در بازهٔ $[0,\pi]$ ، تنها دو ریشه دارد.

نکته : برای تعیین تعداد ریشه‌ها، می‌توان تعداد عددهای صحیح k را که به ازای آن‌ها، نامساوی‌های زیر:

$$0 < -2k\pi - \frac{\pi}{2} < \pi \quad و \quad 0 < \frac{2k\pi}{5} - \frac{\pi}{10} < \pi$$

برقرارند، تعیین کرد. نامعادلهٔ اول تنها به ازای $k=1$ و $k=2$ برقرار است و نامعادلهٔ دوم به ازای هیچ مقداری از k برقرار نیست؛ بنابراین معادلهٔ داده شده، تنها دو ریشه دارد.

آزمون ۷ . مجموع جواب‌های معادلهٔ زیر:

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{x}{4} + \pi)$$

که در شرط $0 \le x \le \pi$ صدق می‌کنند، کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{8}$　　　۲) $\frac{5\pi}{8}$

۳) $\frac{8\pi}{3}$　　　۴) $\frac{8\pi}{5}$

کنکور سراسری

حل : گزینهٔ (۴) صحیح است. نخست باید جواب‌های کلی معادله و سپس جواب‌های خصوص موجود در بازهٔ $[0,\pi]$ ، و آن‌گاه مجموع این جواب‌ها را به دست آوریم. داریم:

$$\cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{x}{4} + \pi)$$

$$\Rightarrow \quad x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi \pm (\frac{x}{4} + \pi)$$

$$\Rightarrow \quad x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{x}{4} + \pi \quad و \quad x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi - \frac{x}{4} - \pi$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3x}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \quad و \quad \frac{5x}{4} = 2k\pi - \frac{5\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{8k\pi}{3} + \pi \quad و \quad x = \frac{8k\pi}{5} - \pi$$

k	x
0	π ج , $-\pi < 0$
1	$\frac{8\pi}{3} + \pi > \pi$, $\frac{8\pi}{5} - \pi = \frac{3\pi}{5}$ ج
2	$\frac{16\pi}{3} + \pi > \pi$, $\frac{16\pi}{5} - \pi = \frac{11\pi}{5} > \pi$

بنابراین معادلهٔ داده شده در بازهٔ $[0,\pi]$ ، دارای دو جواب π و $\frac{3\pi}{5}$ است، که مجموع آن‌ها برابر $\pi + \frac{3\pi}{5} = \frac{8\pi}{5}$ است.

آزمون ۸ . انتهای کمان‌های جواب معادلهٔ زیر:

$$\cos 2x + \sin(\frac{\pi}{2} + x) = 0$$

روی دایرهٔ مثلثاتی رأس‌های کدام چهارضلعی است؟

۱) مثلث متساوی‌الاضلاع　　　۲) مثلث قائم‌الزاویه

۳) مستطیل　　　۴) مربع

کنکور سراسری

حل : گزینهٔ (۱) صحیح است. جواب‌های خصوصی معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ را به دست می‌آوریم و شکل حاصل از انتهای کمان‌ها را بررسی می‌کنیم. داریم:

$$\cos 2x + \sin(\frac{\pi}{2} + x) = 0 \;\Rightarrow\; \cos 2x + \cos x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \cos 2x = -\cos x = \cos(\pi - x)$$

$$\Rightarrow \quad 2x = 2k\pi \pm (\pi - x)$$

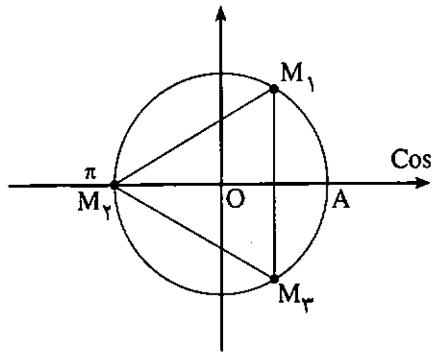
$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \pi - x, \\ 2x = 2k\pi - \pi + x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \pi \end{cases}$$

k	x
0	$\frac{\pi}{3}$ ج , $-\pi < 0$
1	$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi$ ج , π ج
2	$\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ ج , $3\pi > 2\pi$
3	$2\pi + \frac{\pi}{3} > 2\pi$, $5\pi > 2\pi$

بنابراین جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0,2\pi]$ سه جواب دارد، که عبارتند از $\frac{\pi}{3}$ ، π و $\frac{5\pi}{3}$ ؛ بنابراین اگر $\widehat{AM_1}=\frac{\pi}{3}$ ، $\widehat{AM_2}=\pi$ و $\widehat{AM_3}=\frac{5\pi}{3}$ اختیار کنیم، دیده می‌شود که:

$$\widehat{M_1M_2}=\widehat{M_2M_3}=\widehat{M_3M_1}=\frac{2\pi}{3}$$

بنابراین $\widehat{M_1M_2}=\widehat{M_2M_3}=\widehat{M_3M_1}$ و در نتیجه مثلث $M_1M_2M_3$ متساوی‌الاضلاع است.



آزمون ۹ . یک جواب کلی معادلهٔ زیر کدام است؟

$$\cos(2x-\frac{\pi}{6})-\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})=0$$

۱) $\frac{4k\pi}{5}+\frac{5\pi}{3}$ ۲) $\frac{4k\pi}{5}-\frac{7\pi}{15}$

۳) $\frac{4k\pi}{5}+\frac{7\pi}{15}$ ۴) $\frac{4k\pi}{5}-\frac{5\pi}{3}$

حل: گزینهٔ (۳) صحیح است. داریم:

$$\cos(2x-\frac{\pi}{6})-\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})=0$$

$$\Rightarrow \cos(2x-\frac{\pi}{6})=\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2})=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \cos(2x-\frac{\pi}{6})=\cos(\pi-\frac{x}{2})$$

$$\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=2k\pi\pm(\pi-\frac{x}{2})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x-\frac{\pi}{6}=2k\pi+\pi-\frac{x}{2} \\ 2x-\frac{\pi}{6}=2k\pi-\pi+\frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5x}{2}=2k\pi+\frac{7\pi}{6} \\ \frac{3x}{2}=2k\pi-\frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{4k\pi}{5}+\frac{7\pi}{15} \\ x=\frac{4k\pi}{3}-\frac{5\pi}{3} \end{cases}$$

آزمون ۱۰ . یک جواب معادلهٔ $\cos 3x-\cos x=0$ کدام است؟

۱) $x=\frac{\pi}{3}$ ۲) $x=\pi$

۳) $x=\frac{7\pi}{6}$ ۴) $x=\frac{5\pi}{3}$

حل: گزینهٔ (۲) صحیح است.

راه اول: برای آن‌که مقداری از x ریشهٔ معادله‌ای باشد، باید در آن معادله صدق کند. بنابراین عددهای داده شده در گزینه‌ها را، درمعادله قرار می‌دهیم تا ریشهٔ معادله مشخص شود. داریم:

$$x=\frac{\pi}{3}\xrightarrow{\text{در معادله}}\cos 3(\frac{\pi}{2})-\cos\frac{\pi}{3}=0$$

$$\Rightarrow \cos\pi-\cos\frac{\pi}{3}=0$$

$$\Rightarrow -1-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow -\frac{3}{2}=0$$

$$x=\pi\xrightarrow{\text{در معادله}}\cos 3\pi-\cos\pi=0$$

$$\Rightarrow \cos\pi-\cos\pi=0\Rightarrow 0=0$$

بنابراین $x=\pi$ یک جواب معادلهٔ داده شده است.

توجه: $x=\frac{7\pi}{6}$ و $x=\frac{5\pi}{3}$ در معادله صدق نمی‌کنند.

آزمون ۱۱ . به ازای کدام مقدار m ، یکی از جواب‌های معادلهٔ $(m-1)\cos 2x=2m+1$ ، برابر $\frac{2\pi}{3}$ است؟

۱) $\frac{2}{5}$ ۲) $\frac{-2}{5}$

۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{-1}{5}$

حل: گزینهٔ (۴) صحیح است. $x=\frac{2\pi}{3}$ باید در معادلهٔ داده شده صدق کند. بنابراین داریم:

$$x=\frac{2\pi}{3}\xrightarrow{\text{در معادله}}(m-1)\cos\frac{4\pi}{3}=2m+1$$

$$\Rightarrow (m-1)(-\frac{1}{2})=2m+1 \Rightarrow -m+1=4m+2$$

$$\Rightarrow 5m=-1 \Rightarrow m=-\frac{1}{5}$$