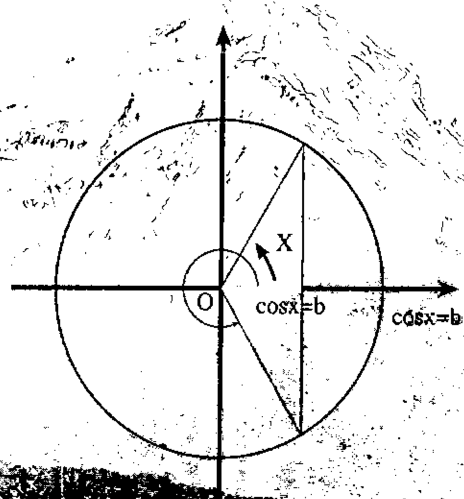

۳

مقمدهاشم رستمی

برای دانش آموزان سال دوم متوسطه

حلّ معادله های مثلثاتی

حل معادلهٔ سادهٔ مثلثاتی $SinX = a, (-1 \le a \le +1)$ را قبلاً دیدیم. اینک به حل معادلهٔ سادهٔ مثلثاتی $CosX = b, (-1 \le b \le 1)$ می‌پردازیم.

حل معادلهٔ $CosX = b, (-1 \le b \le +1)$

فرض می‌کنیم $b = Cos\alpha$ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$CosX = Cos\alpha \Rightarrow X = 2k\pi \pm \alpha$$

حالت خاص

$$CosX = 0 \Rightarrow X = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

زیرا داریم:

$$CosX = 0 = Cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} X = 2k\pi + \frac{\pi}{2} = \pi \text{مضرب زوج} + \frac{\pi}{2} \\ X = 2k\pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi - \pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \\ X = (2k-1)\pi + \frac{\pi}{2} = \pi \text{مضرب زوج} + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

درنتیجه داریم:

$$X = k\pi + \frac{\pi}{2} = \pi \text{ مضربی از } + \frac{\pi}{2}$$

مثال ۱. معادلهٔ $2Cosx - \sqrt{3} = 0$ را حل کنید.

حل. داریم:

$$2Cosx - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2Cosx = \sqrt{3} \Rightarrow Cosx = \frac{\sqrt{3}}{2} = Cos\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$$ جواب‌های عمومی معادله

مثال ۲. جواب‌های عمومی معادلهٔ $2Cosx + 1 = 0$ و سپس جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $(0, 2\pi)$ را تعیین کنید.

حل. داریم:

$$2Cosx + 1 = 0 \Rightarrow Cosx = -\frac{1}{2} = -Cos\frac{\pi}{3} = Cos(\pi - \frac{\pi}{3})$$

$$= \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$ جواب‌های عمومی معادله

برای تعیین جواب‌های خصوصی واقع در بازهٔ $(0,2\pi)$ به‌جای k عددهای مناسب قرار می‌دهیم. این عددها با توجه به جواب کلی معادله و بازهٔ داده شده، انتخاب می‌شوند.

k	x	
-1	$-\frac{8\pi}{3}<0,$	$-\frac{4\pi}{3}<0$
0	$+\frac{2\pi}{3}$ ج	$-\frac{2\pi}{3}<0$
1	$\frac{8\pi}{3}>0,$	$\frac{4\pi}{3}$ ج
2	$\frac{14\pi}{3}>2\pi,$	$\frac{10\pi}{3}>2\pi$

مثال ۳. معادلهٔ $2\cos(2x-\frac{\pi}{6})-\sqrt{2}=0$ را حل کنید.

حل. داریم:

$$2\cos(2x-\frac{\pi}{6})-\sqrt{2}=0 \Rightarrow 2\cos(2x-\frac{\pi}{6})=\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\cos(2x-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos\frac{\pi}{4} \Rightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{5\pi}{12} \\ 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = k\pi + \frac{5\pi}{24} \\ x = k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$ جواب‌های عمومی معادله

مثال ۴. $\cos(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4})+\sin(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3})=0$ را حل کنید و جواب‌های محصور بین 0 و 2π را به‌دست آورید.

حل. این معادله را می‌توان به صورت $\sin X=\sin\alpha$ یا $\cos X=\cos\alpha$ تبدیل کرد. ما آن را به صورت $\cos X=\cos\alpha$ درمی‌آوریم. همان‌طور که قبلاً گفته شد، X و α هر دو می‌توانند عبارت‌هایی شامل x (حرف مجهول) باشند.

$$\cos(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4})+\sin(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3})=0 \Rightarrow$$

$$\cos(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4})=-\sin(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3})=\sin(-\frac{x}{4}+\frac{\pi}{3}) \Rightarrow$$

$$\cos(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4})=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(-\frac{x}{4}+\frac{\pi}{3})\right]=\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}) \Rightarrow$$

$$\cos(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4})=\cos(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{6}) \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}=2k\pi \pm (\frac{x}{4}+\frac{\pi}{6})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{x}{4}+\frac{\pi}{6} \\ \frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}=2k\pi-\frac{x}{4}-\frac{\pi}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{3}-\frac{x}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4} \\ \frac{x}{3}+\frac{x}{4}=2k\pi-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{12}=2k\pi-\frac{\pi}{12} \\ \frac{7x}{12}=2k\pi-\frac{5\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=24k\pi-\pi \\ x=\frac{24k\pi}{7}-\frac{5\pi}{7} \end{cases}$$ جواب‌های عمومی ⇐

k	x	
0	$-\pi<0,$	$\frac{-5\pi}{7}<0$
1	$23\pi>2\pi,$	$\frac{19\pi}{7}>2\pi$

همان‌طور که دیده می‌شود، این معادله در بازهٔ $(0,2\pi)$ دارای جواب نیست.

مثال ۵. معادلهٔ $2\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})=m+3$ داده شده است.

الف) حدود m را چنان بیابید که این معادله دارای جواب باشد.

ب) حدود m را چنان تعیین کنید که $0<x<\pi$ باشد.

پ) مقدار m را چنان بیابید که یکی از جواب‌های معادله، $x=\frac{\pi}{6}$ باشد.

ت) مقدار m را طوری تعیین کنید که $2\cos\frac{x}{2}=\sqrt{3}$ باشد.

ث) به ازای $m=-3$، معادله را حل کنید.

حل. الف) داریم:

$$\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})=\frac{m+3}{2}\Rightarrow -1\le\frac{m+3}{2}\le+1\Rightarrow$$

$$-2\le m+3\le+2\Rightarrow -2-3\le m+3-3\le+2-3$$

$$\Rightarrow -5\le m\le -1$$

ب) معادله را به صورت $\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})=\frac{m+3}{2}$ در نظر می‌گیریم. با استفاده از شرط داده شده، داریم:

$$0<x<\pi\Rightarrow 0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow 0-\frac{\pi}{3}<\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{3}<\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{6}\Rightarrow \frac{1}{2}<\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}<\frac{m+3}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow 1<m+3<\sqrt{3}\Rightarrow -2<m<\sqrt{3}-3$$

پ) شرط لازم و کافی برای آن که $x=\frac{\pi}{6}$ یک ریشهٔ معادلهٔ $2\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})=m+3$ باشد، آن است که در این معادله صدق کند، یعنی داشته باشیم:

$$2\cos(\frac{\pi/6}{2}-\frac{\pi}{3})=m+3\Rightarrow 2\cos(-\frac{\pi}{6})=m+3$$

$$2\cos\frac{\pi}{6}=m+3\Rightarrow 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=m+3\Rightarrow m=-3+\sqrt{3}$$

ت) ریشه‌های معادلهٔ $2\cos\frac{x}{2}=\sqrt{3}$ باید در معادلهٔ $2\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})=m+3$ صدق کنند. بنابراین نخست باید جواب‌های معادلهٔ $2\cos\frac{x}{2}=\sqrt{3}$ را به‌دست آوریم. سپس آن‌ها را در معادلهٔ $2\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})=m+3$ قرار دهیم.

$$2\cos\frac{x}{2}=\sqrt{3}\Rightarrow \cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6}\Rightarrow \frac{x}{2}=2k\pi\pm\frac{\pi}{6}\Rightarrow$$

دو جواب خصوصی $k=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{3},\ x=-\frac{\pi}{3}$ و

جواب‌های عمومی $x=4k\pi\pm\frac{\pi}{3}$

$$x=\frac{\pi}{3}\xrightarrow{\text{در معادلهٔ دومی}}2\cos(\frac{\pi/3}{2}-\frac{\pi}{3})=m+3\Rightarrow$$

$$2\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})=m+3\Rightarrow 2\cos(-\frac{\pi}{6})=m+3\Rightarrow$$

$$2\cos\frac{\pi}{6}=m+3\Rightarrow 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=m+3\Rightarrow m=-3+\sqrt{3}$$

ث)

$$m=-3\Rightarrow 2\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})=0\Rightarrow$$

$$\cos(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})=0\Rightarrow \frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{x}{2}=k\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\Rightarrow \frac{x}{2}=k\pi+\frac{5\pi}{6}\Rightarrow x=2k\pi+\frac{5\pi}{3}$$

مثال ۶. جواب‌های کلی معادلهٔ $2\cos 4\pi x-\sqrt{2+\sqrt{2}}=0$ را به‌دست آورید و جواب‌های موجود در بازهٔ $(0,1)$ را مشخص سازید.

حل. داریم:

$$2\cos 4\pi x-\sqrt{2+\sqrt{2}}=0\Rightarrow 2\cos 4\pi x=\sqrt{2+\sqrt{2}}\Rightarrow$$

$$\cos 4\pi x=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}=\cos\frac{\pi}{8}\Rightarrow 4\pi x=2k\pi\pm\frac{\pi}{8}\Rightarrow$$

$$x=\frac{2k\pi}{4\pi}\pm\frac{\pi/8}{4\pi},\quad x=\frac{k}{2}\pm\frac{1}{32}$$

$$x=\frac{k}{2}+\frac{1}{32},\quad x=\frac{k}{2}-\frac{1}{32}$$ جواب‌های کلی معادله

برای تعیین جواب‌های موجود در بازهٔ $(0,1)$، به جای k عددهای صحیح مناسب قرار می‌دهیم.

k	x	
-1	$-\frac{15}{32}<0$	$-\frac{17}{32}<0$
0	$\frac{1}{32}$ ج	$-\frac{1}{32}<0$
1	$\frac{17}{32}$	$\frac{15}{32}$ ج
2	$\frac{33}{32}>1$	$\frac{31}{32}$
3	$\frac{49}{32}>1$	$\frac{47}{32}>1$

همان‌طور که دیده می‌شود، جواب‌های خصوصی مورد

نظر مسأله $\frac{1}{32}$ ، $\frac{15}{32}$ ، $\frac{17}{32}$ و $\frac{31}{32}$ هستند.

مثال ۷. معادلهٔ $2\text{Cos}(\pi x+\frac{\pi}{4})-2m+3=0$ داده شده است.

الف) حدود m را چنان بیابید که این معادله جواب داشته باشد.

ب) حدود m را چنان تعیین کنید که $0<x<\frac{1}{2}$ باشد.

پ) به ازای $m=1$ معادله را حل کنید.

حل. داریم:

الف)

$$2\text{Cos}(\pi x+\frac{\pi}{4})-2m+3=0\Rightarrow$$

$$\text{Cos}(\pi x+\frac{\pi}{4})=\frac{2m-3}{2}\Rightarrow -1\le\frac{2m-3}{2}\le 1\Rightarrow$$

$$-2\le 2m-3\le +2\Rightarrow -2+3\le 2m\le +2+3\Rightarrow$$

$$1\le 2m\le 5\Rightarrow\frac{1}{2}\le m\le\frac{5}{2}$$

ب)

$$0<x<\frac{1}{2}\Rightarrow 0<\pi x<\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{4}<\pi x+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{\pi}{4}<\pi x+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}\Rightarrow$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\text{Cos}(\pi x+\frac{\pi}{4})<+\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{2m+3}{2}<+\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow-\sqrt{2}<2m+3<\sqrt{2}\Rightarrow$$

$$-3-\sqrt{2}<2m<-3+\sqrt{2}\Rightarrow\frac{-3-\sqrt{2}}{2}<m<\frac{-3+\sqrt{2}}{2}$$

پ) به ازای $m=1$ داریم:

$$2\text{Cos}(\pi x+\frac{\pi}{4})-2+3=0\Rightarrow 2\text{Cos}(\pi x+\frac{\pi}{4})+1=0\Rightarrow$$

$$2\text{Cos}(\pi x+\frac{\pi}{4})=-1\Rightarrow\text{Cos}(\pi x+\frac{\pi}{4})=-\frac{1}{2}$$

$$=-\text{Cos}\frac{\pi}{3}=\text{Cos}(\pi-\frac{\pi}{3})=\text{Cos}\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow\text{Cos}(\pi x+\frac{\pi}{4})=\text{Cos}\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\pi x+\frac{\pi}{4}=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow x+\frac{1}{4}=2k\pm\frac{2}{3}\Rightarrow x=2k-\frac{1}{4}\pm\frac{2}{3}\Rightarrow$$

جواب‌های کلی معادله

$$\begin{cases}x=2k-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\Rightarrow x=2k+\frac{5}{12}\\ x=2k-\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\Rightarrow x=2k-\frac{11}{12}\end{cases}$$

مثال ۸. معادلهٔ $\text{Cos}(x-\frac{\pi}{6})-\text{Sin}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})=0$ را حل کنید.

حل. این معادله را می‌توان به صورت $\text{Sin}X=\text{Sin}\alpha$ یا $\text{Cos}X=\text{Cos}\alpha$ درآورد و سپس حل کرد. برای این کار از رابطه‌های بین نسبت‌های مثلثاتی دو زاویهٔ متمم $(\frac{\pi}{2}-\alpha,\alpha)$ و یا شبه‌متمم $(\frac{\pi}{2}+\alpha,\alpha)$ استفاده می‌کنیم. زیرا داریم:

$$\text{Sin}\alpha=\text{Cos}(\frac{\pi}{2}-\alpha)\quad\text{و}$$

$$\text{Cos}\alpha=\text{Sin}(\frac{\pi}{2}-\alpha)$$

در این جا، معادله را به صورت $\text{Cos}X=\text{Cos}\alpha$ درمی‌آوریم و حل می‌کنیم. داریم:

$$\text{Cos}(x-\frac{\pi}{6})-\text{Sin}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})=0\Rightarrow\text{Cos}(x-\frac{\pi}{6})=\text{Sin}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow\text{Cos}(x-\frac{\pi}{6})=\text{Cos}(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})\Rightarrow$$

$$\text{Cos}(x-\frac{\pi}{6})=\text{Cos}(-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\Rightarrow$$

$$x-\frac{\pi}{6}=2k\pi\pm(-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x=2k\pi-\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\\ x=2k\pi+\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{3x}{2}=2k\pi+\frac{5\pi}{12}\\ \frac{x}{2}=2k\pi-\frac{\pi}{12}\end{cases}$$

جواب‌های عمومی معادله

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{4k\pi}{3}+\frac{5\pi}{18}\\ x=4k\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}$$