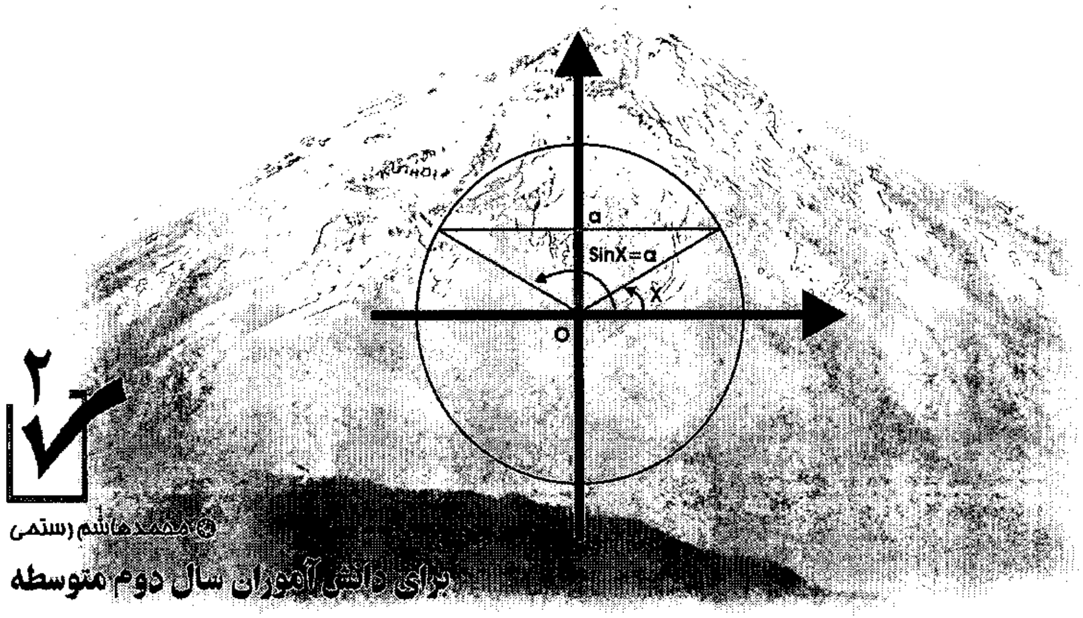


محمد هاشم رستمی

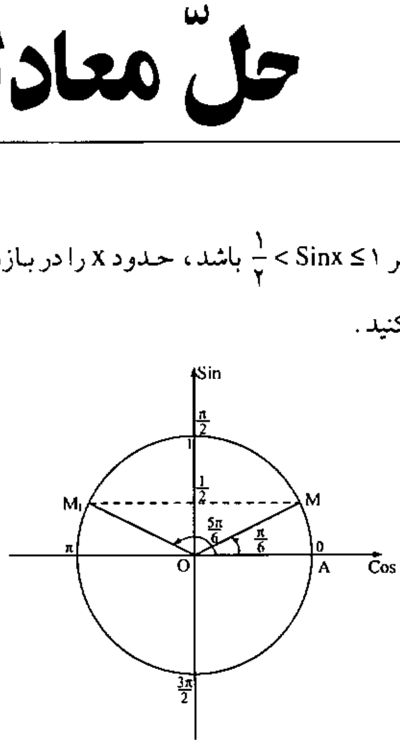
برای دانش‌آموزان سال دوم متوسطه

در شمارهٔ قبل حل معادلهٔ سادهٔ مثلثاتی $SinX = a(-1 \le a \le 1)$ را دیدیم. اینک چند مثال دیگر از حل این معادله و آزمون‌هایی از کنکورهای سراسری و دانشگاه آزاد که به این معادله مربوطند، ارائه می‌شوند. تست‌ها به صورت تشریحی حل شده و نکته‌های کلیدی مربوط به هر تست نیز بیان شده‌اند. در بخش آخر این قسمت، مسأله‌هایی برای حل ارائه شده‌اند تا دانش‌آموزان بتوانند میزان فراگیری خود را بسنجند. پاسخ این مسأله‌ها نیز آمده است.

حلّ معادله‌های مثلثاتی

مثال:

اگر $\frac{1}{2} < Sinx \le 1$ باشد، حدود x را در بازهٔ $[0,2\pi]$ تعیین کنید.



حل: تغییرات Sinx را وقتی x از صفر تا 2π تغییر می‌کند، بررسی می‌کنیم. می‌دانیم که $Sin\frac{\pi}{2}=1$ و $Sin\frac{\pi}{6}=Sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}$ هستند. با توجه به این‌که $Sinx \le 1$ است، $x=\frac{\pi}{2}$ در دامنهٔ تغییرات x قرار دارد. از طرفی $Sinx > \frac{1}{2}$ است. بنابراین $\frac{\pi}{6} < x$ یا $x < \frac{5\pi}{6}$ است. یعنی با فرض $\overline{AM}=\frac{\pi}{6}$ و $\overline{AM_1}=\frac{5\pi}{6}$، انتهای کمان x می‌تواند روی کمان MM_1 تغییر مکان دهد. باید توجه داشت که وقتی $0 \le x \le \frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{6} \le x \le 2\pi$ باشد،

$\text{Sinx} \le \frac{1}{2}$ است. بنابراین حدود x به یکی از صورت‌های زیر می‌تواند باشد:

$$\frac{\pi}{6} < x \le \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad \frac{\pi}{2} \le x < \frac{5\pi}{6} \quad \text{و} \quad \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$$

مثال:

اگر $\frac{1}{2} < \text{Sin}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}) \le 1$ باشد، حدود x را در بازهٔ $[0,2\pi]$ تعیین کنید.

حل: با فرض $\alpha = \frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}$، داریم $\frac{1}{2} < \text{Sin}\alpha \le 1$.

بنابراین بنا به مثال بالا، خواهیم داشت:

$$\frac{\pi}{6} < \alpha \le \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad \frac{\pi}{2} \le \alpha < \frac{5\pi}{6} \quad \text{و} \quad \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5\pi}{6}$$

اکنون به جای α مقدار $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}$ را قرار می‌دهیم.

خواهیم داشت:

$$\frac{\pi}{6} < \frac{x}{2}+\frac{\pi}{3} \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{-\pi}{6} < \frac{x}{2} \le \frac{\pi}{6} \Rightarrow \frac{-\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\pi}{2} \le \frac{x}{2}+\frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \le \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{3} < x < \pi$$

$$\frac{\pi}{6} < \frac{x}{2}+\frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{-\pi}{6} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{-\pi}{3} < x < \pi$$

مثال:

به‌ازای چه مقادیری از a با شرط $\frac{\pi}{3} < x \le \frac{4\pi}{3}$، نامساوی مضاعف $a-2 \le \text{Sin}2x \le 2a+3$ برقرار است؟

حل: داریم:

$$\frac{\pi}{3} < x \le \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} < 2x \le \frac{8\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$$

چون انتهای کمان $\frac{8\pi}{3}$ و انتهای کمان $\frac{2\pi}{3}$ برهم منطبقند، پس تغییرات زاویهٔ 2x شامل یک دور کامل دایره است، بنابراین $-1 \le \text{Sinx} \le +1$ خواهد بود و خواهیم داشت:

$$\begin{cases} 2a+3 \ge 1 \\ a-2 \le -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a \ge -2 \\ a \le +2-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \ge -1 \\ a \le 1 \end{cases} \Rightarrow -1 \le a \le 1$$

آزمون ۱:

برای آن که $\text{Sinx} = 2a - 3$ گزاره‌ای درست باشد، حدود a کدام است؟

۱) $1 \le a < 2$ ۲) $1 < a \le -2$

۳) $1 \le a \le 2$ ۴) $1 < a < 2$

حل: گزینهٔ (۳) درست است، زیرا داریم:

$$-1 \le 2a-3 \le +1 \Rightarrow -1+3 \le 2a-3+3 \le +1+3$$
$$\Rightarrow 2 \le 2a \le 4 \Rightarrow 1 \le a \le 2$$

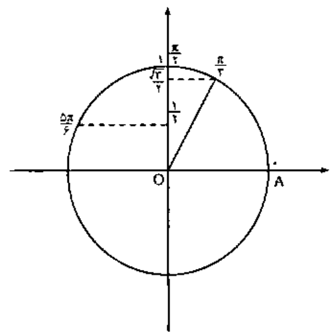
آزمون ۲:

با فرض $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6}$، $\text{Sinx} = \frac{3-m^2}{3+m^2}$، مقادیر m در کدام فاصله است؟

۱) $|m| < \sqrt{3}$ ۲) $|m| < \sqrt{2}$

۳) $|m| < 1$ ۴) $|m| < \frac{1}{2}$

حل: گزینهٔ (۳) درست است. وقتی x از $\frac{\pi}{3}$ تا $\frac{5\pi}{6}$ تغییر می‌کند، Sinx از $\text{Sin}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ شروع به زیاد شدن می‌کند و هنگامی که $x = \frac{\pi}{2}$ شود، $\text{Sinx} = 1$ خواهد بود. اکنون وقتی x از $\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{5\pi}{6}$ تغییر کند، Sinx از $\text{Sin}\frac{\pi}{2} = 1$ تا $\text{Sin}\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ تغییر خواهد کرد. اما چون $x < \frac{5\pi}{6}$ است، پس $\text{Sinx} > \frac{1}{2}$ خواهد بود. بنابراین $\frac{1}{2} < \text{Sinx} \le 1$.



درنتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2} < \mathrm{Sin}x \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{3-m^2}{3+m^2} \le 1 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3-m^2}{3+m^2} > \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{3-m^2}{3+m^2} \le 1 \end{cases}$$

نامعادلهٔ دوم این دستگاه همواره برقرار است، زیرا با توجه به مثبت بودن $3+m^2$، می‌توان نوشت:
که همواره درست است.

$$3-m^2 \le 3+m^2 \Rightarrow -m^2 \le m^2 \Rightarrow 2m^2 \ge 0$$

بنابراین جواب دستگاه، جواب نامعادلهٔ اول آن است.
برای حل این نامعادله با توجه به این‌که $3+m^2$ همواره مثبت است، داریم:

$$6-2m^2 > 3+m^2 \Rightarrow 3m^2 < 3 \Rightarrow m^2 < 1 \Rightarrow |m| < 1$$

آزمون ۳:

اگر $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{6}$ و $\mathrm{Sin}x = m+1$ باشد، حدود m کدام است؟

۱) $0 \le m < \frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{2} \le m \le 1$

۳) $\frac{-\sqrt{3}}{2} < m \le 1$ ۴) $\frac{-1}{2} \le m \le 0$

حل: گزینهٔ (۴) درست است، زیرا داریم:

$$\mathrm{Sin}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } \mathrm{Sin}\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ و } \mathrm{Sin}\frac{\pi}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} \le \mathrm{Sin}x \le 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \le m+1 \le 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}-1 \le m \le 1-1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \le m \le 0$$

آزمون ۴:

اگر $\frac{-\sqrt{2}}{2} < \mathrm{Sin}2x < 1$ باشد، حدود x کدام است؟

۱) $-\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{8}$ ۲) $-\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{4}$

۳) $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ ۴) $-\frac{\pi}{8} \le x < \frac{\pi}{4}$

حل: گزینهٔ (۲) درست است. برای گزینه‌های داده‌شده داریم:

۱) $-\frac{\pi}{4} < 2x < \frac{\pi}{4}$ ۲) $-\frac{\pi}{4} < 2x < \frac{\pi}{2}$

۳) $0 \le 2x \le \frac{\pi}{2}$ ۴) $-\frac{\pi}{4} \le 2x \le \frac{\pi}{2}$

با توجه به نامساوی داده شده و این‌که $\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2} = 1$ و $\mathrm{Sin}(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ است، تنها گزینهٔ (۲) جواب است.

آزمون ۵:

اگر $\frac{1}{2} \le \mathrm{Sin}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}) < 1$ باشد، حدود x کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{3} \le x < \frac{4\pi}{3}$ ۲) $0 < x < \pi$

۳) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3}$ ۴) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{4\pi}{3}$

حل: گزینهٔ (۱) درست است. با استفاده از گزینه‌ها حدود $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}$ و سپس حدود سینوس آن را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$1)\ \frac{\pi}{3} \le x < \frac{4\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \le \frac{x}{2} < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6} < \frac{x}{2}+\frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3} \le \frac{x}{2}+\frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} < \mathrm{Sin}(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}) \le 1 =$$

بنابراین گزینهٔ (۱) جواب است. بدیهی است، جواب نبودن گزینه‌های دیگر را می‌توان بررسی کرد، اما لازم نیست.

نکته:

وقتی زاویهٔ $\frac{\pi}{6}+\frac{x}{2}$ از $\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{5\pi}{6}$ تغییر می‌کند، حداکثر مقدار سینوس آن $\mathrm{Sin}\frac{\pi}{2} = 1$ و حداقل مقدارش $\mathrm{Sin}\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ است.

آزمون ۶:

جواب کلی معادلهٔ $\mathrm{Sin}(x-\frac{\pi}{3}) = \mathrm{Sin}(x+\frac{2\pi}{3})$ کدام است؟

۱) $k\pi+\frac{\pi}{3}$ ۲) $k\pi+\frac{2\pi}{3}$

۳) $2k\pi-\frac{\pi}{3}$ ۴) $2k\pi+\frac{2\pi}{3}$

حل: گزینهٔ (۱) درست است. این معادله، یک معادلهٔ سادهٔ مثلثاتی است و داریم:

$$\mathrm{Sin}(x-\frac{\pi}{3}) = \mathrm{Sin}(x+\frac{2\pi}{3}) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x-\frac{\pi}{3} = 2k\pi + x + \frac{2\pi}{3} \\ x-\frac{\pi}{3} = 2k\pi + \pi - (x+\frac{2\pi}{3}) \end{array} \right.$$

ممتنع

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} 0\times x = 2k\pi + \pi \\ 2x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3} \end{array} \right.$$ جواب کلی معادله

آزمون ۷:

معادلهٔ $\mathrm{Sin}3x = \mathrm{Cos}x$ در فاصلهٔ $0 \le x \le \pi$ چند ریشه دارد؟

۱) یک ۲) سه

۳) دو ۴) چهار

حل: گزینهٔ (۲) درست است. این معادله را به معادله‌ای ساده به صورت $\mathrm{Sin}x = \mathrm{Sin}\alpha$ تبدیل می‌کنیم. آن‌گاه با حل آن، نخست جواب‌های عمومی و سپس جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0,\pi]$ را به‌دست می‌آوریم. داریم:

$$\mathrm{Sin}3x = \mathrm{Cos}x \Rightarrow \mathrm{Sin}3x = \mathrm{Sin}(\frac{\pi}{2}-x) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ 3x = 2k\pi + \pi - (\frac{\pi}{2}-x) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \\ x = k\pi + \frac{\pi}{4} \end{array} \right.$$

k	x	
0	$\frac{\pi}{8}$ ، ج	$\frac{\pi}{4}$ ج
1	$\frac{5\pi}{8}$ ، ج	$\pi+\frac{\pi}{4} > \pi$
2	$\pi+\frac{\pi}{8} > \pi,$	$2\pi+\frac{\pi}{4} > \pi$

به‌طوری که دیده می‌شود، معادلهٔ داده‌شده تنها سه جواب $x = \frac{\pi}{8}$ ، $x = \frac{\pi}{4}$ و $x = \frac{5\pi}{8}$ را در بازهٔ $[0,\pi]$ داراست. بنابراین گزینهٔ (۲) درست است.

آزمون ۸ :

یکی از جواب‌های معادلهٔ $\sin(3x+\frac{\pi}{3})=\sin 2x$ کدام است؟

۱) $\frac{4\pi}{15}$ ۲) $\frac{\pi}{15}$

۳) $\frac{\pi}{3}$ ۴) $\frac{8\pi}{15}$

حل : گزینهٔ (۴) درست است.

راه اول : راه کلی : شرط آن که مقداری از x جواب یک معادله (برحسب x) باشد، آن است که در آن معادله صدق کند. بنابراین جواب‌های داده‌شده را در معادله قرار می‌دهیم. هر کدام که در معادله صدق کند، جواب مورد نظر است. بدیهی است که اگر یکی از مقدارهای داده‌شده در گزینه‌ها، در معادله صدق کند، دیگر لازم نیست مقدارهای دیگر داده‌شده در گزینه‌ها را در معادله قرار دهیم.

$$x=\frac{4\pi}{15}\xrightarrow{\text{در معادله}}\sin(\frac{12\pi}{15}+\frac{\pi}{3})\neq\sin\frac{8\pi}{15}\Rightarrow\sin\frac{17\pi}{15}\neq\sin\frac{8\pi}{15}$$

تساوی برقرار نیست

$$x=\frac{\pi}{15}\xrightarrow{\text{در معادله}}\sin(\frac{3\pi}{15}+\frac{\pi}{3})=\sin\frac{2\pi}{15}\Rightarrow\sin\frac{8\pi}{15}\neq\sin\frac{2\pi}{15}$$

تساوی برقرار نیست

$$x=\frac{\pi}{3}\xrightarrow{\text{در معادله}}\sin(\pi+\frac{\pi}{3})=\sin\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\sin\frac{4\pi}{3}=\sin\frac{2\pi}{3}$$

تساوی برقرار نیست

$$x=\frac{8\pi}{15}\xrightarrow{\text{در معادله}}\sin(\frac{8\pi}{5}+\frac{\pi}{3})=\sin\frac{16\pi}{15}\Rightarrow\sin\frac{29\pi}{15}=\sin\frac{16\pi}{15}$$

$$\Rightarrow\sin(2\pi-\frac{\pi}{15})=\sin(\pi+\frac{\pi}{15})\Rightarrow\sin(-\frac{\pi}{15})=-\sin\frac{\pi}{15}$$

تساوی برقرار است

بنابراین جواب معادله $x=\frac{8\pi}{15}$ است.

نکته :

اگر ابتدا $x=\frac{8\pi}{15}$ را در معادله قرار می‌دادیم و جواب بودن آن مشخص می‌شد، دیگر نیازی به قرار دادن مقدارهای دیگر داده‌شده در معادله، نبود.

راه دوم : معادله را حل و جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0,\pi]$ را مشخص می‌کنیم.

$$\sin(3x+\frac{\pi}{3})=\sin 2x\Rightarrow\left|\begin{array}{l}3x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+2x\\ 3x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi-2x\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow\left|\begin{array}{l}x=2k\pi-\frac{\pi}{3}\\ x=\frac{2k\pi}{5}+\frac{2\pi}{15}\end{array}\right.$$

k	x	
۰	$-\frac{\pi}{3}<0,$	$\frac{2\pi}{15}$
۱	$\frac{5\pi}{3},$	$\frac{8\pi}{15}$

طوری که دیده می‌شود، $x=\frac{8\pi}{15}$ جواب معادله است.

آزمون ۹ :

به‌ازای کدام مقدار a، $x=\frac{3\pi}{4}$، یکی از ریشه‌های معادلهٔ $a\sin(2x-\frac{\pi}{4})-1=0$ است؟

۱) $\sqrt{2}$ ۲) 1

۳) $-\sqrt{2}$ ۴) -1

حل: گزینهٔ (۳) درست است. $x=\frac{3\pi}{4}$ باید در معادله صدق کند. داریم:

$$x=\frac{3\pi}{4}\xrightarrow{\text{در معادله}} a\mathrm{Sin}(2\times\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{4})-1=0\Rightarrow$$

$$a\mathrm{Sin}(\frac{5\pi}{4})-1\Rightarrow a\times\frac{-\sqrt{2}}{2}=1\Rightarrow a=\frac{2}{-\sqrt{2}}=-\sqrt{2}$$

آزمون ۱۰ :

مجموع جواب‌های بین ۰ و π ی معادلهٔ $2\mathrm{Sin}2x-\sqrt{2+\sqrt{2}}=0$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi}{2}$ ۲) $\frac{7\pi}{16}$

۳) $\frac{5\pi}{16}$ ۴) $\frac{7\pi}{8}$

حل: گزینهٔ (۱) درست است. جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0,\pi]$ و سپس مجموع آن‌ها را به‌دست می‌آوریم. داریم:

جواب:

k	x	
۰	$\frac{3\pi}{16}$ ، ج	$\frac{5\pi}{16}$ ج
۱	$\pi+\frac{3\pi}{16}>\pi,$	$\pi+\frac{5\pi}{16}>\pi$

بنابراین معادلهٔ داده‌شده، در بازهٔ $[0,\pi]$ تنها دو جواب $\frac{3\pi}{16}$ و $\frac{5\pi}{16}$ دارد که مجموع آن‌ها برابر است با:

$$\frac{3\pi}{16}+\frac{5\pi}{16}=\frac{8\pi}{16}=\frac{\pi}{2}$$

مسأله‌ها

۱. معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $2\mathrm{Sin}x-1=0$

ب) $2\mathrm{Sin}3x+\sqrt{3}=0$

پ) $2\mathrm{Sin}2\pi x-\sqrt{2}=0$

ت) $2\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2})+\sqrt{2}=0$

ث) $4\mathrm{Sin}(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{4})-\sqrt{6}+\sqrt{2}=0$

ج) $\mathrm{Sin}(2x-\frac{\pi}{6})-\mathrm{Sin}(3x+\frac{\pi}{2})=0$

چ) $\mathrm{Sin}(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{4})+\mathrm{Cos}(\frac{2\pi x}{3}-\frac{\pi}{3})=0$

۲. جواب‌های عمومی معادله‌های زیر را به‌دست آورید. سپس، جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ داده شده برای هر معادله را بیابید.

الف) $2\mathrm{Sin}4x-\sqrt{3}=0,\ [0,\pi]$

ب) $2\mathrm{Sin}\frac{3x}{2}+1=0,\ [,\pi,\pi]$

پ) $2\mathrm{Sin}5\pi x-1=0,\ [0,1]$

ت) $\mathrm{Sin}(2x-\frac{\pi}{6})+\mathrm{Sin}(\frac{\pi}{4}-x)=0,\ [-\pi,0]$

ث) $\mathrm{Sin}(\frac{\pi x}{5}+\frac{\pi}{3})+\mathrm{Cos}(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi x}{3})=0,\ [-1,5]$

۳. معادلهٔ $3\mathrm{Sin}(2x+\frac{5\pi}{6})-2m+4=0$ داده شده است.

الف) حدود m را چنان تعیین کنید که این معادله جواب داشته باشد.

ب) حدود m را چنان بیابید که $\frac{-\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$ باشد.

پ) مقدار m را چنان تعیین کنید که یکی از جواب‌های معادله $x = \frac{2\pi}{3}$ باشد.

ت) مقدار m را چنان بیابید که $\sin\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد.

ث) مقدار m را چنان بیابید که $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) = -1$ باشد.

ج) به ازای $m = \frac{11}{4}$ جواب‌های کلی معادله را به دست آورید. سپس جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[-\pi, \pi]$ را تعیین کنید.

۴. معادلهٔ $2\sin(\frac{\pi x}{2} - \frac{\pi}{6}) - m - 2 = 0$ داده شده است.

الف) حدود m را چنان بیابید که این معادله ریشه داشته باشد.

ب) حدود m را چنان بیابید که $1 < x < 2$ باشد.

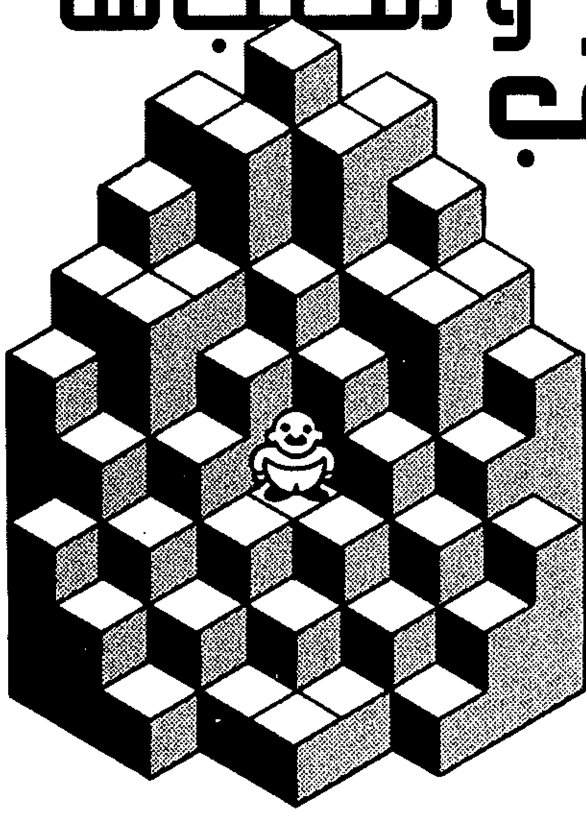
پ) مقدار m را چنان بیابید که یکی از جواب‌های معادله $x = 2$ باشد.

ت) مقدار m را چنان بیابید که $2\sin 2\pi x = 1$ باشد.

ث) به ازای $m = -3$ معادله را حل کنید.

۵. اگر $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin(2x - \frac{\pi}{6}) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد، حدود x را در بازهٔ $[0, 2\pi]$ بیابید.

وروجک و مکعب‌ها



وروجک می‌خواهد از آن‌جایی که ایستاده است، روی حداکثر مکعب‌های ممکن برود؛ بی‌آن‌که ناگزیر شود، روی یک مکعب بیش از یک بار پا بگذارد. او هربار می‌تواند، به یک مکعب مجاور هم‌سطح، یک مکعب بالا یا پائین محل استقرار خود (مکعبی که با مکعب زیر پای او یک وجه مشترک دارد) برود. هیچ حرکتی در راستای قطر مجاز نیست. حال، با احتساب مکعبی که روی آن ایستاده است، او روی چند مکعب گام خواهد گذاشت؟