حلّ معادله‌های مثلثاتی

محمدهاشم رستمی

۱. حل معادله‌های سادهٔ مثلثاتی

الف) حل معادلهٔ $\text{Sin}X = a, (-1 \le a \le +1)$

فرض می‌کنیم: $(-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2})$، $a = \text{Sin}\alpha$ باشد،

در این صورت داریم:

$$\text{Sin}X = \text{Sin}\alpha \Rightarrow \begin{cases} X = 2k\pi + \alpha \\ X = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}, \ (k \in z)$$

حالت خاص $\text{Sin}X = 0 \Rightarrow X = k\pi, \ (k \in z)$

زیرا داریم:

$$\text{Sin}X = 0 = \text{Sin}0 \Rightarrow \begin{cases} X = 2k\pi = \pi \text{ مضرب زوج} \\ X = 2k\pi + \pi = (2k+1)\pi = \pi \text{ مضرب فرد} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X = k\pi = \pi \text{ مضربی از}$$

این جواب‌ها را جواب‌های عمومی یا جواب‌های کلی معادلهٔ بالا می‌نامند. هرگاه بخواهیم جواب‌های موجود در یک بازهٔ معین را به دست آوریم، باید به جای k عددهای مناسب قرار دهیم. این جواب‌ها را جواب‌های اختصاصی یا خصوصی معادله می‌نامند.

نکتهٔ اول

منظور از حل یک معادلهٔ مثلثاتی، پیدا کردن جواب‌های کلی معادله جواب‌های کلی آن است. در صورتی که جواب‌های خصوصی معادله، خواسته شده باشد، باید بازهٔ مورد نظر داده شود:

مثال ۱. معادلهٔ $2\text{Sin}x - 1 = 0$ را حل کنید.

حل

داریم:

$$2\text{Sin}x - 1 = 0 \Rightarrow 2\text{Sin}x = 1 \Rightarrow \text{Sin}x = \frac{1}{2} = \text{Sin}\frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

مثال ۲. جواب‌های کلی معادلهٔ $2\text{Sin}x + \sqrt{2} = 0$ و جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0, 2\pi]$ را به‌دست آورید.

حل

داریم: $2\text{Sin}x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow 2\text{Sin}x = -\sqrt{2} \Rightarrow$

$$\text{Sin}x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = -\text{Sin}\frac{\pi}{4} = \text{Sin}(-\frac{\pi}{4}) \Rightarrow$$

جواب‌های کلی معادله

$$\begin{cases} x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{4}) \\ x = 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{4}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

برای تعیین جواب‌های خصوصی بین ۰ و ۲π به جای k، مقدارهای مناسب قرار می‌دهیم.

k	x
-1	$-\frac{9\pi}{4} < 0$, $-\frac{7\pi}{4} < 0$
0	$-\frac{\pi}{4} < 0$, $\frac{5\pi}{4}$ ج
1	$\frac{7\pi}{4}$ ج, $\frac{13\pi}{4} > 2\pi$
2	$\frac{15\pi}{4} > 2n$, $\frac{21\pi}{4} > 2\pi$

طوری که دیده می‌شود، جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0,2\pi]$، $\frac{5\pi}{4}$ و $\frac{7\pi}{4}$ هستند.

مثال ۳. معادلهٔ $2\mathrm{Sin}(3x - \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3} = 0$ را حل کنید.

حل

در این مسأله $X = 3x - \frac{\pi}{6}$ است، پس داریم:

$$2\mathrm{Sin}(3x - \frac{\pi}{6}) - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \mathrm{Sin}(3x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Sin}(3x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{Sin}\frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ 3x - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ 3x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \\ x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{5\pi}{18} \end{cases}$$ جواب‌های کلی معادله

مثال ۴. معادلهٔ $\mathrm{Sin}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) - \mathrm{Cos}(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}) = 0$ را حل کنید و جواب‌های اختصاصی موجود در بازهٔ $[-\pi \ +\pi]$ را بیابید.

حل

معادلهٔ داده شده را به صورت $\mathrm{Sin}X = \mathrm{Sin}\alpha$ درمی‌آوریم و آن‌گاه از دستورهای مربوط به حل این معادله استفاده می‌کنیم. باید توجه داشت که در معادلهٔ $\mathrm{Sin}X = \mathrm{Sin}\alpha$، x و α هردو می‌توانند عبارت‌هایی برحسب x (مجهول مسأله) باشند.

$$\mathrm{Sin}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) - \mathrm{Cos}(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{Sin}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) = \mathrm{Cos}(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4}) = \mathrm{Sin}(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow$$

$$\mathrm{Sin}(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}) = \mathrm{Sin}(\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{3}) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + (\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{3}) \\ \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \pi - (\frac{3\pi}{4} - \frac{x}{3}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \\ \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2k\pi + \pi - \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{5x}{6} = 2k\pi + \frac{7\pi}{12} \\ \frac{x}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{12k\pi}{5} + \frac{7\pi}{10} \\ x = 12k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

k	x
-1	$-\frac{17\pi}{10} < -\pi$, $-\frac{23\pi}{2} < -\pi$
0	$\frac{7\pi}{10}$ ج, $\frac{\pi}{2}$ ج
1	$\frac{31\pi}{10} > \pi$, $\frac{25\pi}{2} > \pi$

مثال ۵. معادلهٔ $\mathrm{Sin}(2x - \frac{\pi}{5}) = 0$ را حل کنید.

حل

با فرض $2x-\frac{\pi}{4}=X$ ، معادله به صورت $\text{Sin}X=0$ درمی‌آید که جواب آن $X=k\pi$ است. پس داریم:

$$\text{Sin}(2x-\frac{\pi}{4})=0\Rightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=k\pi\Rightarrow 2x=k\pi+\frac{\pi}{4}\Rightarrow$$
$$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}$$

مثال ۶. معادلهٔ $\text{Sin}(2x+\frac{\pi}{3})=2m+3$ داده شده است.

الف) حدود m را چنان بیابید که این معادله دارای جواب باشد.

ب) مقدار m را چنان بیابید که یکی از جواب‌های این معادله $x=\frac{\pi}{12}$ باشد.

ج) به ازای $m=-\frac{5}{4}$ ، معادله را حل کنید.

حل

الف) شرط وجود جواب آن است که داشته باشیم:

$$-1\le 2m+3\le +1\Rightarrow -4\le 2m\le -2\Rightarrow -2\le m\le -1$$

ب) به شرط آن که $x=\frac{\pi}{12}$ یک ریشهٔ این معادله باشد، آن است که در این معادله صدق کند، یعنی داشته باشیم:

$$\text{Sin}(2\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3})=2m+3\Rightarrow \text{Sin}\frac{\pi}{2}=2m+3\Rightarrow$$
$$1=2m+3\Rightarrow 2m=-2\Rightarrow m=-1$$

ج) در ازای $m=-\frac{5}{4}$ داریم:

$$\text{Sin}(2x+\frac{\pi}{3})=2(-\frac{5}{4})+3\Rightarrow \text{Sin}(2x+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\text{Sin}(2x+\frac{\pi}{3})=\text{Sin}\frac{\pi}{6}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{6}\\ 2x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi-\frac{\pi}{6}\\ 2x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}x=k\pi-\frac{\pi}{12}\\ x=k\pi+\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

مثال ۷. معادلهٔ $(\sqrt{6}-\sqrt{2})\text{Sin}\pi(\frac{3x}{2}-2)-1=0$ را حل کنید و جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0,3]$ را به دست آورید.

حل

داریم:

$$(\sqrt{6}-\sqrt{2})\text{Sin}\pi(\frac{3x}{2}-2)=1\Rightarrow \text{Sin}\pi(\frac{3x}{2}-2)=$$
$$\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \text{Sin}\pi(\frac{3x}{2}-2)=\text{Sin}\frac{5\pi}{12}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\pi(\frac{3x}{2}-2)=2k\pi+\frac{5\pi}{12}\\ \pi(\frac{3x}{2}-2)=2k\pi+\pi-\frac{5\pi}{12}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{3x}{2}-2=2k+\frac{5}{12}\\ \frac{3x}{2}-2=2k+1-\frac{5}{12}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{3x}{2}=2k+\frac{29}{12}\\ \frac{3x}{2}=2k+\frac{31}{12}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{4k}{3}+\frac{29}{18}\\ x=\frac{4k}{3}+\frac{31}{18}\end{cases}$$ جواب‌های کلی معادله

k	x
-2	$\frac{-19}{18}<0,\ \frac{-17}{18}<0$
-1	$0<\frac{5}{18}<3\ ,\ 0<\frac{7}{18}<3$
0	$0<\frac{29}{18}<3\ ,\ 0<\frac{31}{18}<3$
1	$0<\frac{53}{18}<3\ ,\ \frac{55}{18}>3$
2	$\frac{77}{18}>3,\ \frac{79}{18}>3$

به طوری که دیده می‌شود، جواب‌های خصوصی موجود در بازهٔ $[0,3]$ عبارتند از:

$\frac{5}{18}$ ، $\frac{7}{18}$ ، $\frac{29}{18}$ ، $\frac{31}{18}$ و $\frac{53}{18}$

نکتهٔ دوم

معادلهٔ $\text{Sin}x=1$ دارای ریشهٔ مضاعف $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$

و معادلهٔ $Sinx = -1$ دارای ریشهٔ مضاعف $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ (یا $x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$) است. زیرا داریم:

$$Sinx = 1 = Sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}}$$

$$Sinx = -1 = Sin(-\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + (-\frac{\pi}{2}) \\ x = 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

اما انتهای کمان‌های $-\frac{\pi}{2}$ و $+\frac{3\pi}{2}$ برهم منطبق هستند. بنابراین داریم:

$$\boxed{x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}}$$

مثال ۱. معادلهٔ $Sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{6}) = 1$ را حل کنید.

حل

داریم:

$$Sin(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) = 1 \Rightarrow \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{2} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{4k\pi}{3} + \frac{4\pi}{9}$$

مثال ۲. معادله $Sin(2x + \frac{\pi}{12}) = -1$ را حل کنید.

حل

داریم:

$$Sin(2x + \frac{\pi}{12}) = -1 \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{12} = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow 2x = 2k\pi - \frac{7\pi}{12} \Rightarrow x = k\pi - \frac{7\pi}{24}$$

مثال ۳. معادلهٔ $Sin(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}) = m - 1$ داده شده است.

الف) حدود m را چنان بیابید که این معادله دارای جواب باشد.

ب) مقدار m را چنان بیابید که $x = \frac{\pi}{2}$ ریشهٔ این معادله باشد.

ج) مقدار m را چنان بیابید که $x = -\frac{\pi}{2}$ ریشهٔ این معادله باشد.

د) به ازای $m = 2$ معادله را حل کنید.

حل

الف) شرط آن‌که معادلهٔ داده شده دارای جواب باشد، آن است که:

$$-1 \le m - 1 \le +1 \Rightarrow 0 \le m \le 2$$

ب) $x = \frac{\pi}{2}$ باید در معادله صدق کند؛ یعنی داشته باشیم:

$$Sin(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) = m - 1 \Rightarrow Sin\frac{\pi}{3} = m - 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = m - 1 \Rightarrow m = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ج) باید $x = -\frac{\pi}{2}$ در معادله صدق کند، یعنی داشته باشیم:

$$Sin(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) = m - 1 \Rightarrow Sin = m - 1 \Rightarrow 0 = m - 1 \Rightarrow m = 1$$

د) در ازای $m = 2$ داریم:

$$Sin(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}) = 2 - 1 = 1 = Sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} =$$

$$2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = 6k\pi + \pi$$